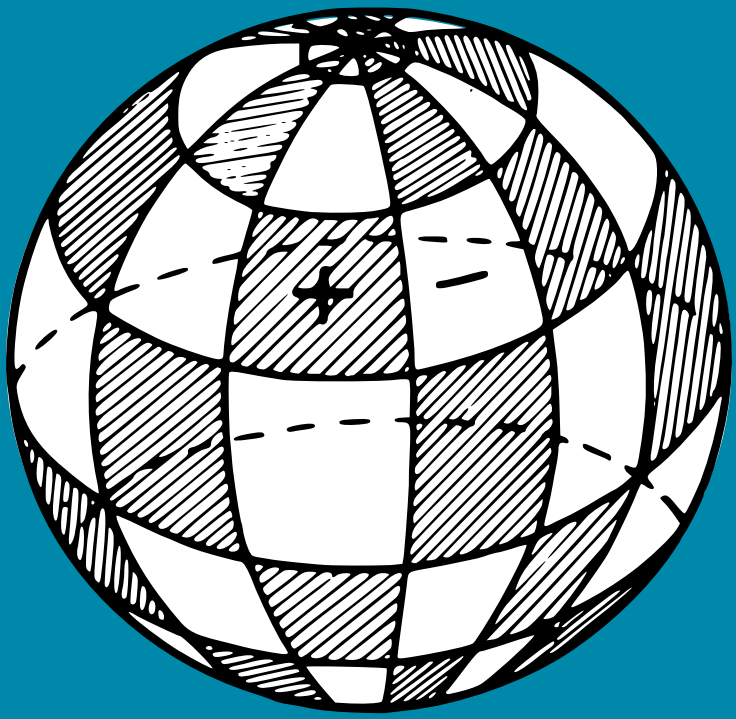
A.N. Tichonov, A. A. Samarskij

EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA



Edizioni Mir Mosca

Andrej N. Tichonov Aleksandr A. Samarskij

Equazioni della fisica matematica

Edizioni Mir

I edizione: 1981

Titolo originale: *Uravnenija matematičeskoi fiziki*

© Copyright by Nauka, 1977
Traduzione di Alexandr Machov
© Copyright by Edizioni Mir, Mosca

INDICE

Dalla prefazione alla prima edizione russa 13

Capitolo I. Classificazione delle equazioni differenziali alle eerivate parziali

§ 1. *Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine* 15

1. Equazioni differenziali in due variabili indipendenti (15). 2. Classificazione delle equazioni del secondo ordine in più variabili indipendenti (21). 3. Forme canoniche delle equazioni lineari a coefficienti costanti (24).

Problemi al capitolo I 25

Capitolo II. Equazioni di tipo iperbolico

§ 1. *Problemi elementari che conducono ad equazioni di tipo iperbolico. Impostazione dei problemi ai limiti* 27

1. Equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una corda (27). 2. Equazione delle vibrazioni longitudinali nelle sbarre e nelle corde (31). 3. Energia di vibrazione di una corda (32). 4. Deduzione dell'equazione delle oscillazioni elettriche nei conduttori (34). 5. Vibrazioni trasversali di una membrana (35). 6. Equazioni idrodinamiche ed acustiche (38). 7. Condizioni iniziali e al contorno (42). 8. Riduzione del problema generale (47). 9. Impostazione dei problemi ai limiti nel caso di più variabili (49). 10. Teorema di unicità (50). Problemi (53).

§ 2. *Metodo di propagazione delle onde* 54

1. Formula di D'Alembert (54). 2. Interpretazione fisica (56). 3. Esempi (58). 4. Equazione non omogenea (62). 5. Stabilità delle soluzioni (64). 6. Retta semilimitata e metodo dei prolungamenti (67). 7. Problemi per un segmento limitato (74). 8. Dispersione delle onde (77). 9. Equazione integrale delle vibrazioni (78). 10. Distribuzione delle discontinuità lungo le caratteristiche (82). Problemi (83).

§ 3. *Metodo di separazione delle variabili* 86

1. Equazione delle vibrazioni libere di una corda (86). 2. Interpretazione della soluzione (91). 3. Rappresentazione di vibra-

zioni arbitrarie sotto forma di sovrapposizione di onde stazionarie (95). 4. Equazioni non omogenee (100). 5. Primo problema generale ai limiti (107). 6. Problemi ai limiti con disomogeneità stazionarie (108). 7. Problemi senza condizioni iniziali (110). 8. Forza concentrata (115). 9. Schema generale del metodo di separazione delle variabili (118). Problemi (124).

§ 4. *Problemi con dati relativi alle caratteristiche* 126

1. Impostazione del problema (126). 2. Metodo delle approssimazioni successive per il problema di Goursat (127). Problemi (132).

§ 5. *Risoluzione delle equazioni lineari generali di tipo iperbolico* 133

1. Operatori differenziali coniugati (133). 2. Forma integrale della soluzione (133). 3. Interpretazione fisica della funzione di Riemann (136). 4. Equazioni a coefficienti costanti (139).

Problemi al capitolo II 144

Appendici al capitolo II 144

I. Sulle vibrazioni delle corde degli strumenti musicali 144

II. Sulle vibrazioni delle sbarre 148

III. Vibrazioni di una corda tesa 152

1. Impostazione del problema (152). 2. Autovibrazioni di una corda tesa (153). 3. Corda con un carico applicato a uno degli estremi (157). 4. Correzioni degli autovalori (158).

IV. Equazioni della dinamica dei gas e teoria delle onde d'urto . . . 159

1. Equazioni della dinamica dei gas. Legge di conservazione dell'energia (159). 2. Onde d'urto. Condizioni di compatibilità dinamica (161). 3. Discontinuità deboli (166).

V. Dinamica dell'assorbimento dei gas 170

1. Equazioni descriventi il processo di assorbimento dei gas (170). 2. Soluzione asintotica (174).

VI. Analogie fisiche 181

Capitolo III. Equazioni di tipo parabolico

§ 1. *Problemi elementari che conducono ad equazioni di tipo parabolico. Impostazione dei problemi ai limiti* 185

1. Problema lineare della propagazione di calore (185). 2. Equazione della diffusione (189). 3. Propagazione di calore nello spazio (190). 4. Impostazione dei problemi ai limiti (192). 5. Principio del valore massimo (198). 6. Teorema di unicità (201). 7. Teorema di unicità per la retta infinita (204).

§ 2. *Metodo di separazione delle variabili* 205

1. Problema ai limiti omogeneo (205). 2. Funzione della sorgente (209). 3. Problemi ai limiti con condizioni iniziali discontinue (211). 4. Equazione non omogenea della conduzione termica (219). 5. Primo problema ai limiti generale (222). Problemi (223).

§ 3. *Problemi sulla retta infinita* 225

1. Propagazione di calore lungo una retta infinita. Funzione della sorgente per un dominio illimitato (225). 2. Problemi ai limiti per una retta semilimitata (239).

§ 4. *Problemi senza condizioni iniziali* 247

Problemi al capitolo III 250

Appendici al capitolo III 252

I. Onde termiche 252

II. Influenza del decadimento radioattivo sulla temperatura della crosta terrestre 255

II. Metodo della similitudine nella teoria della conduzione termica 261

1. Funzione di sorgente per la retta infinita (261). 2. Problemi ai limiti per l'equazione della conduzione termica quasi-lineare (263).

V. Problema della transizione di fase 265

V. Equazione di Einstein-Kolmogorov 270

VI. La funzione delta 273

1. Definizione di funzione δ (273). 2. Sviluppo della funzione δ in serie di Fourier (276). 3. Applicazione della funzione δ alla costruzione della funzione di sorgente (278).

Capitolo IV. Equazioni di tipo ellittico

§ 1. *Problemi che conducono all'equazione di Laplace* 282

1. Campo termico stazionario. Impostazione dei problemi ai limiti (282). 2. Corrente potenziale di un liquido. Potenziale di corrente stazionaria e di campo elettrostatico (283). 3. Equazione di Laplace in un sistema di coordinate curvilinee (285). 4. Alcune soluzioni particolari dell'equazione di Laplace (288). 5. Funzioni armoniche e funzioni analitiche di variabile complessa (289). 6. Trasformazione per raggi vettori reciproci (292).

§ 2. *Proprietà generali delle funzioni armoniche* 293

1. Formule di Green. Rappresentazione integrale della soluzione (293). 2. Alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche (300). 3. Unicità e stabilità del primo problema ai limiti (303). 4. Problemi con condizioni al contorno discontinue (304). 5. Punti singolari isolati (306). 6. Regolarità di una funzione armonica di tre variabili all'infinito (308). 7. Problemi ai limiti esterni. Unicità della soluzione per problemi bi- e tridimensionali (309). 8. Secondo problema ai limiti. Teorema di unicità (312).

§ 3. *Risoluzione dei problemi ai limiti per domini elementari con il metodo di separazione delle variabili* 315

1. Primo problema ai limiti per un cerchio (315). 2. Integrale di Poisson (320). 3. Caso di valori al contorno discontinui (323).

§ 4. *Funzione di sorgente* 324

1. Funzione di sorgente per l'equazione $\Delta u = 0$ e sue proprietà fondamentali (324). 2. Metodo delle immagini elettrostatiche e della funzione di sorgente per la sfera (329). 3. Funzione di sorgente per il cerchio (332). 4. Funzione di sorgente per il semispazio (333).

§ 5. *Teoria del potenziale* 335

1. Potenziale volumetrico (335). 2. Problema piano. Potenziale logaritmico (337). 3. Integrali impropri (339). 4. Derivate prime del potenziale volumetrico (346). 5. Derivate seconde del potenziale volumetrico (349). 6. Potenziali superficiali (353). 7. Superfici e curve di Ljapunov (357). 8. Discontinuità del potenziale a strato doppio (359). 9. Proprietà del potenziale a strato semplice (363). 10. Applicazione dei potenziali superficiali alla soluzione dei problemi ai limiti (366). 11. Equazioni integrali corrispondenti ai problemi ai limiti (371).

Problemi al capitolo IV 375

Appendici al capitolo IV 377

I. Espressione asintotica del potenziale volumetrico 377

II. Problemi elettrostatici 381

III. Problema fondamentale dell'esplorazione elettrica 386

IV. Determinazione dei campi vettoriali 392

V. Applicazione del metodo delle trasformazioni conformi in elettrostatica 396

VI. Applicazione del metodo delle trasformazioni conformi in idrodinamica 400

VII. Equazione biarmonica 406

1. Unicità della soluzione (407). 2. Rappresentazione delle funzioni biarmoniche mediante funzioni armoniche (407). 3. Soluzione dell'equazione biarmonica per un cerchio (409).

Capitolo V. Propagazione delle onde nello spazio

1. *Problema con le condizioni iniziali* 411

1. Equazione delle vibrazioni nello spazio (411). 2. Metodo della media (413). 3. Formula di Poisson (414). 4. Metodo della « discesa » (416). 5. Interpretazione fisica (418). 6. Metodo della riflessione (420).

2. *Formula integrale* 422

1. Deduzione della formula integrale (422). 2. Conseguenze della formula integrale (425).

§ 3. *Vibrazioni di volumi limitati* 428

1. Schema generale del metodo di separazione delle variabili. Onde stazionarie (428). 2. Vibrazioni di una membrana rettangolare (434). 3. Vibrazioni di una membrana circolare (438).

Problemi al capitolo V 444
Appendici al capitolo V 445
I. Riduzione delle equazioni della teoria dell'elasticità a equazioni delle vibrazioni 445
II. Equazioni del campo elettromagnetico 447
1. Equazioni del campo elettromagnetico e condizioni al contorno (447). 2. Potenziali del campo elettromagnetico (451). 3. Campo elettromagnetico di un oscillatore (453).

Capitolo VI. Propagazione di calore nello spazio

§ 1. *Propagazione di calore nello spazio illimitato* 460
1. Funzione di influenza termica (460). 2. Propagazione di calore nello spazio illimitato (464).

§ 2. *Propagazione di calore in volumi limitati* 469
1. Schema del metodo di separazione delle variabili (469). 2. Raffreddamento di un cilindro circolare (472). 3. Calcolo delle dimensioni critiche (474).

§ 3. *Problemi ai limiti per domini a frontiere mobili* 476
1. Formula di Green per l'equazione della conduzione termica e funzione di sorgente (476). 2. Risoluzione di un problema ai limiti (480). 3. Funzione di sorgente per un segmento (482).

§ 4. *Potenziali termici* 485
1. Proprietà dei potenziali termici a strato semplice e doppio (485). 2. Risoluzione dei problemi ai limiti (487).
Problemi al capitolo VI 489
Appendici al capitolo VI 490
I. Diffusione di una nube 490
II. Smagnetizzazione di un cilindro con avvolgimento 493

Capitolo VII. Equazioni di tipo ellittico (seguito)

§ 1. *Problemi fondamentali che conducono all'equazione* $\Delta v + cv = 0$ 499
1. Vibrazioni stabili (499). 2. Diffusione di un gas per decadimento o per reazione a catena (500). 3. Diffusione di un mezzo in moto (500). 4. Impostazione dei problemi ai limiti interni per l'equazione $\Delta v + cv = 0$ (501).

§ 2. *Funzione di influenza delle sorgenti puntuali* 503
1. Funzione di influenza delle sorgenti puntuali (503). 2. Rappresentazione integrale della soluzione (505). 3. Potenziali (508).

§ 3. *Problemi per i domini illimitati. Principio di radiazione* . . . 511
1. Equazione $\Delta v + cv = -f$ nello spazio illimitato (511). 2. Principio di assorbimento limite (512). 3. Principio di ampiezza limite (514). 4. Condizioni di radiazione (515).

§ 4. *Problemi della teoria matematica della diffrazione* 520

1. Impostazione del problema (520). 2. Unicità della soluzione del problema della diffrazione (521). 3. Diffrazione sulla sfera (524).

Problemi al capitolo VII 531

Appendici al capitolo VII 533

I. Onde in tubi cilindrici 533

II. Vibrazioni elettromagnetiche in risonatori vuoti 543

1. Autovibrazioni di un endovibratore cilindrico (544). 2. Energia elettromagnetica delle autovibrazioni (548). 3. Eccitazione delle vibrazioni in un endovibratore (550).

III. Effetto skin 552

IV. Propagazione delle onde radio sopra la superficie della terra . . 557

Complemento I. Metodo alle differenze finite

§ 1. *Nozioni fondamentali* 562

1. Reti e funzioni reticolari (563). 2. Approssimazione degli operatori differenziali elementari (564). 3. Problema alle differenze (570). 4. Stabilità (571).

§ 2. *Schemi di differenze per l'equazione della conduzione termica* . . 575

1. Schemi per l'equazione a coefficienti costanti (575). 2. Errore di approssimazione (577). 3. Identità energetica (579). 4. Stabilità (582). 5. Convergenza e precisione (586). 6. Schemi di differenze per le equazioni a coefficienti variabili (587). 7. Metodo del bilancio. Schemi conservativi (588). 8. Schemi a due strati per l'equazione della conduzione termica a coefficienti variabili (592). 9. Schemi a tre strati (599). 10. Soluzione dei sistemi di equazioni alle differenze. Metodo di fattorizzazione (601). 11. Metodi alle differenze per la soluzione di equazioni quasi-lineari (603).

§ 3. *Metodo alle differenze finite per la soluzione del problema di Dirichlet* 607

1. Approssimazione dell'operatore di Laplace con il metodo alle differenze (607). 2. Principio del massimo (611). 3. Valutazione della soluzione di un'equazione non omogenea (613). 4. Convergenza della soluzione del problema di Dirichlet alle differenze (615). 5. Soluzione delle equazioni alle differenze con il metodo dell'iterazione semplice (616).

§ 4. *Metodi alle differenze per la soluzione dei problemi a più variabili spaziali* 619

1. Schemi pluridimensionali (619). 2. Schemi economici (621). 3. Metodi iterativi a direzione variabile per la soluzione del problema di Dirichlet alle differenze (631).

Complemento II. Funzioni speciali

1. Introduzione (636). 2. Equazione generale della teoria delle funzioni speciali (638). 3. Andamento delle soluzioni nell'intorno di $x = a$ se $k(a) = 0$ (639). 4. Impostazione dei problemi ai limiti (641).

Parte I. Funzioni cilindriche 644

§ 1. *Funzioni cilindriche* 644

1. Serie di potenze (645). 2. Formule ricorrenti (649). 3. Funzioni di ordine semintero (650). 4. Ordine asintotico delle funzioni cilindriche (651).

§ 2. *Problemi ai limiti per l'equazione di Bessel* 654

§ 3. *Vari tipi di funzioni cilindriche* 657

1. Funzioni di Hankel (657). 2. Funzioni di Hankel e di Neumann (659). 3. Funzioni di argomento immaginario (661). 4. La funzione $K_0(x)$ (663).

§ 4. *Rappresentazione delle funzioni cilindriche sotto forma di integrali di contorno* 667

1. Integrali di contorno (667). 2. Funzioni di Hankel (669). 3. Alcune proprietà della funzione gamma (670). 4. Rappresentazione integrale della funzione di Bessel (672). 5. Rappresentazione integrale della funzione $K_\nu(x)$ (674). 6. Formule asintotiche per le funzioni cilindriche (675).

§ 5. *Integrale di Fourier-Bessel e altri integrali contenenti le funzioni di Bessel* 678

1. Integrale di Fourier-Bessel (678). 2. Alcuni integrali contenenti le funzioni di Bessel (679).

Parte II. Funzioni sferiche 683

§ 1. *Polinomi di Legendre* 683

1. Funzione generatrice e polinomi di Legendre (683). 2. Formule ricorrenti (685). 3. Equazione di Legendre (686). 4. Ortogonalità dei polinomi di Legendre (686). 5. Norma dei polinomi di Legendre (688). 6. Zeri dei polinomi di Legendre (688). 7. Limitatezza dei polinomi di Legendre (689).

§ 2. *Funzioni associate di Legendre* 690

1. Funzioni associate (690). 2. Norma delle funzioni associate (690). 3. Chiusura del sistema di funzioni associate (691).

§ 3. *Polinomi armonici e funzioni sferiche* 694

1. Polinomi armonici (694). 2. Funzioni sferiche (695). 3. Ortogonalità del sistema di funzioni sferiche (698). 4. Completezza del sistema di funzioni sferiche (701). 5. Sviluppo in funzioni sferiche (702).

§ 4. *Alcuni esempi di applicazione delle funzioni sferiche* 706

1. Problema di Dirichlet per la sfera (706). 2. Sfera conduttrice nel campo di una carica puntuale (707). 3. Polarizzazione di una palla in un campo omogeneo (708). 4. Autovibrazioni di una sfera (710). 5. Problema ai limiti esterno per una sfera (713). 715

Parte III. Polinomi di Čebyšev-Hermite e di Čebyšev-Laguerre . . . 715

§ 1. *Polinomi di Čebyšev-Hermite* 715

1. Formula differenziale (715). 2. Formule ricorrenti (716). 3. Equazione di Čebyšev-Hermite (716). 4. Norma dei polinomi $H_n(x)$ (717). 5. Funzioni di Čebyšev-Hermite (718).

§ 2. *Polinomi di Čebyšev-Laguerre* 718

1. Formula differenziale (718). 2. Formule ricorrenti (719). 3. Equazione di Čebyšev-Laguerre (719). 4. Ortogonalità e norma dei polinomi di Čebyšev-Laguerre (720). 5. Polinomi generalizzati di Čebyšev-Laguerre (721.)

§ 3. *Problemi elementari per l'equazione di Schrödinger* 722

1. Equazione di Schrödinger (722). 2. Oscillatore armonico (724). 3. Rotatore (725). 4. Moto dell'elettrone in un campo coulombiano (726).

Parte IV. Formule, tabelle, grafici 730

I. Proprietà fondamentali delle funzioni speciali 731

II. Tabelle 736

III. Grafici delle funzioni speciali 740

IV. Vari sistemi di coordinate ortogonali 742

DALLA PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE RUSSA

Le questioni della fisica matematica sono strettamente legate allo studio dei processi fisici più disparati nel cui novero rientrano fenomeni studiati in idrodinamica, teoria della elasticità, elettrodinamica ecc. I problemi matematici che sorgono in questo caso contengono numerosi elementi comuni e costituiscóno l'oggetto della fisica matematica.

Il metodo di indagine, che caratterizza questa branca scientifica, è sostanzialmente matematico. Tuttavia l'impostazione dei problemi della fisica matematica, strettamente connessa allo studio di problemi fisici, ha dei tratti specifici.

La cerchia di questioni inerenti alla fisica matematica è estremamente larga. Nel presente volume sono trattati problemi di fisica matematica che conducono ad equazioni alle derivate parziali.

Abbiamo cercato di subordinare la scelta e l'esposizione del materiale alle proprietà caratteristiche dei processi fisici tipici, per cui la disposizione del materiale corrisponde ai tipi fondamentali di equazioni.

Lo studio di ciascun tipo di equazioni inizia dai problemi fisici elementari che conducono alle equazioni del tipo considerato. Un'attenzione particolare viene prestata all'impostazione matematica di problemi, all'esposizione rigorosa dei metodi di soluzione dei problemi elementari e all'interpretazione fisica dei risultati ottenuti. Ogni capitolo contiene problemi il cui scopo principale è quello di acquisire esperienza pratica. Alcuni problemi presentano di per sé interesse fisico rilevante. Alla fine di ciascun capitolo sono date appendici contenenti applicazioni dei metodi descritti nel testo alla soluzione dei problemi più disparati della fisica e della tecnica e una serie di esempi che escono dai limiti dei problemi trattati nel testo. La scelta di questi esempi potrebbe, ovviamente, essere diversa.

Il libro contiene soltanto parte del materiale trattato nel corso di metodi della fisica matematica, senza considerare la teoria delle equazioni integrali e i metodi variazionali. I metodi approssimati sono esposti in modo non sufficientemente completo.

Il libro è basato su lezioni tenute per un decennio da A. N. Tichonov alla facoltà fisica dell'Università di Mosca.

A. Tichonov,
A. Samarskij

Capitolo 1

CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

Numerosi problemi della fisica matematica conducono ad equazioni differenziali alle derivate parziali. Più spesso si incontrano equazioni differenziali del secondo ordine la cui classificazione verrà considerata nel presente capitolo.

§ 1. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

1. Equazioni differenziali in due variabili indipendenti. Diamo le definizioni necessarie.

Si chiama equazione alle derivate parziali del secondo ordine nelle due variabili indipendenti x, y una relazione fra la funzione incognita $u(x, y)$ e le sue derivate parziali fino al secondo ordine *):

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Analogamente si scrive un'equazione per un numero più grande di variabili indipendenti.

Un'equazione si dice *lineare rispetto alle derivate d'ordine superiore* se ha la forma

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

dove a_{11}, a_{12}, a_{22} sono funzioni di x e y.

Se i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22} dipendono non soltanto da x e y, ma, come F_1, sono funzioni di x, y, u, u_x, u_y, allora questa equazione è detta *quasi-lineare*.

Un'equazione si dice *lineare* se è lineare sia rispetto alle derivate di ordine superiore u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} che rispetto alla funzione u e alle sue derivate prime u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \qquad (2)$$

*) Noi usiamo per le derivate le seguenti notazioni:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ ecc.}$$

dove a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f sono funzioni unicamente di x e y. Se i coefficienti dell'equazione (2) sono indipendenti da x e y, si ha un'equazione lineare a coefficienti costanti. Un'equazione si dice *omogenea* se $f(x, y) = 0$.

Una trasformazione di variabili

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

che ammetta trasformazione inversa, permette di ottenere una nuova equazione equivalente a quella iniziale. È naturale chiedersi: come scegliere ξ ed η affinché l'equazione in queste variabili sia di forma più semplice?

Nel presente numero daremo la risposta a questa domanda per le equazioni della forma (1), lineari rispetto alle derivate di ordine superiore e in due variabili indipendenti x, y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Trasformando le derivate nelle variabili nuove, otteniamo

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \\ \qquad + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{cases} \tag{3}$$

Sostituendo i valori delle derivate dalla (3) nell'equazione (1), avremo

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \tag{4}$$

dove

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

e la funzione $\bar{F}$ è indipendente dalle derivate seconde. Osserviamo che, se l'equazione iniziale è lineare, cioè se

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

allora $\bar{F}$ ha la forma

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

vale a dire l'equazione resta lineare *).

*) Notiamo che se la trasformazione di variabili è lineare, allora $\bar{F} = F$, poiché le derivate seconde rispetto a ξ ed η nelle formule (3) sono nulle e $\bar{F}$ non riceve addendi per trasformazione delle derivate seconde.

Consideriamo le variabili ξ ed η in modo tale che il coefficiente $\bar{a}_{11}$ sia nullo. Sia data l'equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{5}$$

$z = \varphi(x, y)$ sia una soluzione parziale. Se poniamo $\xi = \varphi(x, y)$, allora il coefficiente $\bar{a}_{11}$ sarà, evidentemente, nullo. Quindi, il menzionato problema della scelta di nuove variabili indipendenti è legato alla soluzione dell'equazione (5).

Dimostriamo i seguenti lemmi.

1. *Se* $z = \varphi(x, y)$ *è una soluzione parziale dell'equazione*

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0,$$

allora la relazione $\varphi(x, y) = C$ *rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0. \tag{6}$$

2. *Se* $\varphi(x, y) = C$ *rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0,$$

allora la funzione $z = \varphi(x, y)$ *soddisfa l'equazione* (5).

Dimostriamo il primo lemma. Poiché la funzione $z = \varphi(x, y)$ soddisfa l'equazione (5), l'uguaglianza

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{7}$$

è un'identità, ossia si verifica per ogni x, y nel dominio in cui è data la soluzione. La relazione $\varphi(x, y) = C$ è l'integrale generale dell'equazione (6) se la funzione y definita dalla relazione implicita $\varphi(x, y) = C$, verifica l'equazione (6). Sia

$$y = f(x, C)$$

questa funzione; allora

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)}, \tag{8}$$

dove la parentesi quadra e l'indice $y = f(x, C)$ indicano che y a secondo membro dell'uguaglianza (8) non è una variabile indipendente, bensì ha un valore uguale a $f(x, C)$. Ne segue che $y = f(x, C)$ soddisfa l'equazione (6) in quanto

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C)} = 0,$$

poiché l'espressione fra parentesi quadra è nulla per tutti i valori di x, y e non soltanto per $y = f(x, C)$.

Dimostriamo il secondo lemma. Sia $\varphi(x, y) = C$ l'integrale generale dell'equazione (6). Dimostriamo che

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{7'}$$

per ogni punto (x, y). Sia (x_0, y_0) un punto qualsiasi. Dimostrando che per esso l'uguaglianza (7') è soddisfatta, ne consegue, per l'arbitrarietà del (x_0, y_0), che l'uguaglianza (7') è un'identità e che la funzione $\varphi(x, y)$ è una soluzione. Tracciamo per il punto (x_0, y_0) una curva integrale dell'equazione (6), ponendo $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ e considerando la curva $y = f(x, C_0)$. È evidente che $y_0 = f(x_0, C_0)$. Per tutti i punti di questa curva abbiamo

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,\, C_0)} = 0.$$

Ponendo nell'ultima uguaglianza $x = x_0$, otteniamo

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0y_0)\,\varphi_y(x_0y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0y_0) = 0,$$

come dovevasi dimostrare *).

L'equazione (6) si dice *caratteristica* per l'equazione (1) e i suoi integrali si chiamano *caratteristiche*.

Ponendo $\xi = \varphi(x, y)$, dove $\varphi(x, y) =$ costante è l'integrale generale dell'equazione (6), annulliamo il coefficiente di $u_{\xi\xi}$. Se $\psi(x, y) =$ costante è un altro integrale generale dell'equazione (6), che non dipende da $\varphi(x, y)$, allora, ponendo $\eta = \psi(x, y)$, annulliamo anche il coefficiente di u_{η}.

L'equazione (6) si divide in due equazioni:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{10}$$

Il segno dell'espressione sotto il radicale determina il tipo di equazione

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{1}$$

Questa equazione, in un punto M, si dice di tipo *iperbolico* se nel punto $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, di tipo *ellittico* se nel punto $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, e di tipo *parabolico* se nel punto $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ **).

*) Il legame stabilito fra le equazioni (5) e (6) è equivalente al noto legame (vedi V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. II, Editori Riuniti, Roma, 1978) fra un'equazione alle derivate parziali del primo ordine e un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Si può convincersene sviluppando il primo membro dell'equazione (5) come prodotto di due espressioni differenziali lineari.

**) Questa terminologia è presa dalla teoria delle curve del secondo ordine.

È facile convincersi che la relazione

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\,D^2, \quad D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y$$

è vera; ne deriva l'invarianza del tipo di equazione per trasformazione di variabili in quanto il determinante funzionale (jacobiano) D è diverso da zero per questa trasformazione. L'equazione può appartenere a diversi tipi in vari punti del dominio di definizione.

Consideriamo il dominio G in tutti i punti del quale l'equazione è del medesimo tipo. Per ogni punto del dominio G passano due caratteristiche; è da notare inoltre che per un'equazione di tipo iperbolico le caratteristiche sono reali e distinte, per una di tipo ellittico complesse e distinte, e per le equazioni di tipo parabolico ambedue le caratteristiche sono reali e coincidenti.

Esaminiamo separatamente ognuno di questi casi.

1. Nel caso di un'equazione di tipo iperbolico si ha $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ e i secondi membri delle equazioni (9) e (10) sono reali e distinti. I loro integrali generali $\varphi(x, y) = C$ e $\psi(x, y) = C$ definiscono due famiglie reali di caratteristiche. Ponendo

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{11}$$

riduciamo l'equazione (4) dopo divisione per il coefficiente di $u_{\xi\eta}$ alla forma

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \text{dove} \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

È la cosiddetta forma *canonica* delle equazioni di tipo iperbolico *). Spesso si ricorre a una seconda forma canonica. Poniamo

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

---

*) Per poter introdurre le nuove variabili ξ ed η mediante le funzioni φ e ψ, bisogna convincersi che queste funzioni siano indipendenti; è condizione sufficiente la non nullità del determinante funzionale corrispondente. Supponiamo che il determinante funzionale

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

si annulli in un certo punto M. Allora si ha la proporzionalità delle righe, cioè

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

ma ciò è impossibile poiché

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{e} \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$

(supponiamo in questo caso che $a_{11} \neq 0$, senza perdita di generalità). Con ciò abbiamo stabilito l'indipendenza delle funzioni φ e ψ.

ossia

$$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \qquad \beta = \frac{\xi-\eta}{2},$$

dove α e β sono due variabili nuove. Allora

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \qquad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \qquad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

Come risultato l'equazione (4) diventa

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Nel caso di un'equazione di tipo parabolico, si ha $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, le equazioni (9) e (10) coincidono, e noi otteniamo un integrale generale dell'equazione (6): $\varphi(x, y) =$ costante. Poniamo in questo caso

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y),$$

dove $\eta(x, y)$ è una funzione qualsiasi indipendente da φ. Con queste variabili il coefficiente

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

poiché $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; ne segue che

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

Dopo aver diviso l'equazione (4) per il coefficiente di $u_{\eta\eta}$ otteniamo la forma canonica per un'equazione di tipo parabolico

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

Se u_ξ non figura a secondo membro, allora si tratta di un'equazione differenziale ordinaria dipendente da ξ come da un parametro.

3. Nel caso di un'equazione di tipo ellittico, si ha $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ e i secondi membri delle equazioni (9) e (10) sono complessi. Sia

$$\varphi(x, y) = C$$

un integrale complesso dell'equazione (9). Allora

$$\varphi^*(x, y) = C_*$$

dove φ^* quale coniugata di φ rappresenterà l'integrale generale dell'equazione coniugata (10). Passiamo alle variabili complesse, ponendo

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

In questo caso un'equazione di tipo ellittico si riduce alla stessa forma di una iperbolica.

Per non avere a che fare con le variabili complesse, introduciamo due variabili nuove α e β che valgono

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

di modo che

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

In questo caso

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) -$$
$$- (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + 2i\,(a_{11}\alpha_x\beta_x +$$
$$+ a_{12}\,(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

cioè

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \quad \text{e} \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

L'equazione (4), divisa per il coefficiente di $u_{\alpha\alpha}$, diventa *)

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi\,(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

Quindi, secondo il segno dell'espressione $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ esistono le forme canoniche seguenti dell'equazione (1):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (tipo iperbolico) $\quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ o $u_{xy} = \Phi$;

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (tipo ellittico) $\quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi$;

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (tipo parabolico) $\quad u_{xx} = \Phi$.

2. Classificazione delle equazioni del secondo ordine in più variabili indipendenti. Consideriamo un'equazione lineare a coefficienti reali

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{12}$$

dove a, b, c, f sono funzioni di x_1, x_2, . . ., x_n. Introduciamo le variabili indipendenti nuove ξ_k, ponendo

$$\xi_k = \xi_k\,(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n) \quad (k = 1, \ \ldots, \ n).$$

---

*) Questa trasformazione è legittima soltanto nel caso in cui i coeffi cienti dell'equazione (1) siano funzioni analitiche. Infatti, se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, allora i secondi membri delle equazioni (9) e (10) sono complessi e, di conseguenza, la funzione y deve assumere valori complessi. Si può parlare della soluzione di queste equazioni soltanto nel caso in cui i coefficienti $a_{ik}\,(x, y)$ sono definiti per valori complessi di y. Nel ridurre un'equazione di tipo ellittico alla forma canonica ci limiteremo a coefficienti analitici.

Allora

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \alpha_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

dove

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Rimpiazzando le espressioni delle derivate nell'equazione iniziale, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

dove

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Consideriamo la forma quadratica

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^0_{ij} y_i y_j, \tag{13}$$

i cui coefficienti sono uguali ai coefficienti a_{ij} dell'equazione iniziale in un certo punto M_0 $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$. Trasformando linearmente le variabili y

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \eta_k,$$

otteniamo l'espressione nuova per la forma quadratica:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}^0_{kl} \eta_k \eta_l, \quad \text{dove} \quad \bar{a}^0_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^0_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

In tal modo i coefficienti della parte principale dell'equazione cambiano analogamente ai coefficienti della forma quadratica per una trasformazione lineare.

Come è noto, una scelta appropriata della trasformazione lineare permette di ridurre la matrice (a^0_{ij}) della forma quadratica alla forma diagonale in cui

$$\bar{a}^0_{ii} = 1 \quad \text{o} \quad 0;$$

$$\bar{a}^0_{ij} = 0 \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Secondo la *legge d'inerzia* il numero di coefficienti $\overline{a}_{ii}^0$ positivi, negativi e nulli di una forma quadratica canonica è invariante rispetto alle trasformazioni lineari.

L'equazione (12) nel punto M_0 è detta di tipo *ellittico* se tutti gli n coefficienti $\overline{a}_{ii}^0$ sono del medesimo segno; di tipo *iperbolico* (o di tipo *iperbolico normale*) se $n-1$ coefficienti $\overline{a}_{ii}^0$ sono del medesimo segno e un coefficiente è di segno contrario; di tipo *ultraiperbolico* se fra gli $\overline{a}_{ii}^0$ esistono m coefficienti del medesimo segno e $n-m$ di segno contrario ($m,\ n-m>1$); di tipo *parabolico* se almeno uno dei coefficienti $\overline{a}_{ii}^0$ è nullo.

Considerando nuove variabili indipendenti ξ_i in modo che nel punto M_0 si abbia

$$\alpha_{ik}=\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}=\alpha_{ik}^0,$$

dove α_{ik}^0 sono i coefficienti della trasformazione che riduce la forma quadratica (13) alla forma canonica (ponendo $\xi_k=\sum \alpha_{ik}^0 x_i$ ad esempio), otteniamo che nel punto M_0 l'equazione si riduce, secondo il tipo, a una delle forme canoniche seguenti:

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}+\Phi=0 \qquad \text{(tipo ellittico)},$$

$$u_{x_1x_1}=\sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i}+\Phi \qquad \text{(tipo iperbolico)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i}=\sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i}+\Phi \qquad (m>1,\ n-m>1)$$
(tipo ultraiperbolico),

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i})+\Phi=0 \ \ (m>0) \qquad \text{(tipo parabolico)}.$$

Non ci soffermiamo su una suddivisione più particolareggiata delle equazioni di tipo parabolico in equazioni ellitticamente paraboliche, iperbolicamente paraboliche ecc.

Quindi, se l'equazione (12) in un punto M appartiene a un determinato tipo, la si può ridurre in questo punto alla forma canonica corrispondente.

Consideriamo in modo più dettagliato la possibilità di ridurre alla forma canonica un'equazione in un intorno di M se in tutti i punti dell'intorno in questione questa equazione appartiene a un medesimo tipo.

Per ridurre l'equazione alla forma canonica in un certo dominio, dovremmo subordinare le funzioni $\xi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ alle relazioni differenziali $\overline{a}_{kl}=0$ per $k\neq l$. Il numero di queste condizioni, uguale a $n(n-1)/2$, è superiore al numero n di funzioni ξ da definire per $n>3$. Per $n=3$, gli elementi non diagonali della matrice $(\overline{a}_{ik})$ si potrebbero in ge-

nerale annullare, ma in questo caso gli elementi diagonali possono essere distinti.

Quindi, per $n \geqslant 3$ l'equazione non si può ridurre alla forma canonica nell'intorno del punto M. Per $n = 2$ si può annullare l'unico coefficiente non diagonale e verificare la condizione di uguaglianza di due coefficienti diagonali, ciò che è stato già fatto nel n. 1.

Se i coefficienti dell'equazione (12) sono costanti allora, nel ridurre la (12) alla forma canonica nel solo punto M, otteniamo un'equazione ridotta alla forma canonica in tutto il dominio di definizione dell'equazione.

3. Forme canoniche delle equazioni lineari a coefficienti costanti. Nel caso di due variabili indipendenti, un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti ha la forma

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + \\ + f(x, y) = 0. \tag{14}$$

Le corrisponde un'equazione caratteristica a coefficienti costanti. Perciò le caratteristiche sono due rette

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C_2.$$

L'equazione (14) si riduce mediante una trasformazione appropriata di variabili a una delle forme elementari:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(tipo ellittico)}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \\ \text{ossia} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(tipo iperbolico)}, \tag{16}$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(tipo parabolico)}. \tag{17}$$

Come semplificazione ulteriore, introduciamo al posto di u una nuova funzione v:

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v,$$

dove λ e μ sono costanti per il momento indeterminate. Allora

$$u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v),$$
$$u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v),$$
$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),$$
$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),$$
$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).$$

Rimpiazzando le espressioni delle derivate nell'equazione (15) e dividendo quindi per $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, otteniamo

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)\, v_\xi + (b_2 + 2\mu)\, v_\eta +$$
$$+ (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)\, v + f_1 = 0.$$

Scegliamo i parametri λ e μ in modo tale che due coefficienti, ad esempio quelli delle derivate prime, si annullino ($\lambda = -b_1/2$; $\mu = -b_2/2$). Come risultato otteniamo

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

dove γ è una costante che si esprime in funzione di c, b_1, b_2 e $f_1 = fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$. Eseguendo operazioni analoghe anche per i casi (16) e (17), giungiamo alle forme canoniche seguenti per le equazioni ai coefficienti costanti

$$\text{ossia} \quad \begin{cases} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 & \text{(tipo ellittico)}, \\ \left.\begin{aligned} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \end{aligned}\right\} & \text{(tipo iperbolico)}, \\ v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0 & \text{(tipo parabolico)}. \end{cases}$$

Come è stato rilevato nel n. 2, un'equazione a coefficienti costanti nel caso di più variabili

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

si riduce mediante una trasformazione lineare di variabili alla forma canonica contemporaneamente in tutti i punti del suo dominio di definizione. Introducendo al posto di u una funzione nuova v

$$u = ve^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}$$

e scegliendo i λ_i in modo appropriato, possiamo semplificare ancora di più l'equazione, ciò che ci conduce a forme canoniche simili a quelle del caso $n = 2$.

Problemi al capitolo I

1. Trovare i domini di iperbolicità, ellitticità e parabolicità dell'equazione

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0$$

e ridurla alla forma canonica nel dominio di iperbolicità.

2. Ridurre alla forma canonica le seguenti equazioni:

a) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

b) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0$.

c) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}\, u_{xy} + e^{2y}\, u_{yy} = 0$.

d) $u_{xx} + (1 + y)^2 u_{yy} = 0$.

e) $xu_{xx} + 2\sqrt{xy}\, u_{xy} + yu_{yy} - u_x = 0$.

f) $(x - y) u_{xx} + (xy - y^2 - x + y) u_{xy} = 0$.

g) $y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u_x = 0$.

h) $\text{sen}^2 y u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.

i) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

3. Ridurre alla forma canonica e semplificare al massimo l'equazione $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$; a, b, c costanti.

4. Introducendo la funzione $v = ue^{\lambda x + \mu y}$ e scegiendo in modo appropriato i parametri λ e μ, semplificare le seguenti equazioni a coefficienti costanti:

a) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$.

b) $u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_y + \alpha u + \beta u_x$.

c) $u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{yy} = \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$.

d) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$.

Capitolo II

EQUAZIONI DI TIPO IPERBOLICO

Le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico si incontrano spesso in problemi fisici legati a processi vibratori. L'equazione elementare di tipo iperbolico

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

è detta di solito *equazione delle vibrazioni di una corda*. Nel presente capitolo, così come in quelli successivi, ci limiteremo allo studio della classe delle equazioni lineari.

§ 1. Problemi elementari che conducono ad equazioni di tipo iperbolico. Impostazione dei problemi ai limiti

1. Equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una corda. Ogni punto di una corda di lunghezza l si può caratterizzare mediante il valore della sua ascissa x. La descrizione del processo di vibrazione della corda si può eseguire assegnando la posizione dei punti della corda in diversi istanti. Per determinare la posizione della corda all'istante t, è sufficiente che siano date le componenti del vettore di spostamento $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ del punto x all'istante t.

Considereremo il più semplice problema delle vibrazioni della corda. Noi supporremo che gli spostamenti della corda giacciano in un medesimo piano (x, y) e che il vettore di spostamento $\boldsymbol{u}$ sia perpendicolare all'asse x in qualsiasi istante; allora il processo di vibrazione si può descrivere con una delle funzioni $u(x, t)$ che caratterizza lo spostamento verticale della corda. Considereremo la corda come un filo elastico flessibile. L'espressione matematica della flessibilità è basata sul fatto che le tensioni generate nella corda sono sempre dirette lungo le tangenti al suo profilo istantaneo (fig. 1). Questa condizione significa che la corda non resiste alla flessione.

Il valore della tensione generata nella corda per elasticità può essere calcolato mediante la legge di Hooke *). Noi considereremo vibrazioni piccole della corda trascurando il quadrato di u_x rispetto all'unità.

Partendo da questa condizione, calcoliamo l'allungamento del tratto (x_1, x_2) della corda. La lunghezza dell'arco di questo tratto vale

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2}\, dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Quindi, nei limiti della nostra approssimazione il processo di vibrazione non implica nessun allungamento dei tratti della corda;

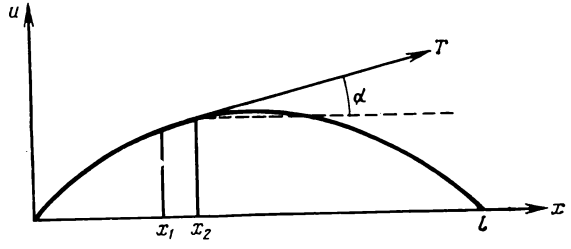


Fig. 1

ne consegue in virtù della legge di Hooke che il valore della tensione T in ogni punto non varia con il tempo. Mostriamo che non dipende neanche da x, cioè che

$$T(x) = T_0 = \text{costante}.$$

Troviamo le proiezioni della tensione sugli assi x e u (denotiamole con T_x e T_u):

$$T_x(x) = T(x) \cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \operatorname{sen}\alpha \cong T(x) \operatorname{tg}\alpha = T(x)\, u_x,$$

dove α è l'angolo formato dalla tangente alla curva $u(x, t)$ e l'asse x. Il tratto (x_1, x_2) è soggetto a forze di tensione, forze esterne e forze d'inerzia. La somma delle proiezioni di tutte le forze sull'asse x deve essere nulla (stiamo considerando soltanto vibrazioni trasversali). Siccome le forze d'inerzia e le forze esterne sono dirette, per ipotesi, lungo l'asse u, allora

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{ossia} \quad T(x_1) = T(x_2). \tag{1}$$

*) L. D. Landau e E. M. Lifšits, Fisica teorica, vol. VII, *Teoria dell'elasticità*, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1978.

Essendo x_1 e x_2 arbitrari, ne segue che la tensione è indipendente da x, vale a dire che per tutti i valori di x e t si ha

$$T(x) \equiv T_0. \tag{2}$$

Dopo le osservazioni preliminari passiamo alla deduzione dell'equazione delle vibrazioni trasversali della corda. A tal fine ricorriamo al secondo principio di Newton. La componente della quantità di moto del tratto (x_1, x_2) sull'asse u vale

$$\int_{1}^{x_2} u_t(\xi, t)\, \rho(\xi)\, d\xi,$$

dove ρ è la densità lineare della corda. Eguagliamo la variazione della quantità di moto nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\, [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, d\xi$$

all'impulso delle forze agenti provenienti dalla tensione

$$T_0 u_x \,|_{x=x} - T_0 u_x \,|_{x=x}$$

nei punti x_2 e x_1 e dalla forza esterna che supporremo distribuita continuamente a densità (carico) $F(x, t)$ per unità di lunghezza. Come risultato otteniamo l'equazione delle vibrazioni trasversali di un elemento della corda in forma integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, \rho(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0\, [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{3}$$

Per passare all'equazione differenziale, supponiamo l'esistenza e la continuità delle derivate seconde di $u(x, t)$ *). Allora dopo una doppia applicazione del teorema della media la formula (3) diventa

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\, \rho(\xi^*)\, \Delta t \Delta x = \{T_0\, [u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] +$$
$$+ F(\xi^{***}, t^{***})\}\, \Delta t \Delta x,$$

---

*) Supponendo che le funzioni siano due volte derivabili, conveniamo di fatto di considerare soltanto funzioni possedenti questa proprietà. Quindi, un'ipotesi di questo genere è legata alla limitazione dell'ambito di fenomeni fisici studiati e non contiene l'affermazione che non esistono funzioni soddisfacenti all'equazione integrale delle vibrazioni e non aventi derivate seconde. Tali funzioni esistono e presentano interesse pratico notevole. In dettaglio si veda il § 2, n. 7.

dove

$\xi^*,\ \xi^{**},\ \xi^{***} \in (x_1,\ x_2)$ e $t^*,\ t^{**},\ t^{***} \in (t_1,\ t_2)$.

Semplificando per $\Delta x \Delta t$ e passando al limite per $x_2 \to x_1$ e $t_2 \to t_1$, otteniamo l'equazione differenziale delle vibrazioni trasversali della corda

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x,\ t). \tag{4}$$

Nel caso di densità costante ρ = costante si suole scrivere questa equazione nella forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \tag{5}$$

dove

$$f(x,\ t) = \frac{1}{\rho} F(x,\ t) \tag{6}$$

è la densità della forza, riferita all'unità di massa. In assenza di forza esterna otteniamo l'equazione omogenea

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$

ossia

$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at)$

descrivente le vibrazioni libere della corda. Questa equazione fornisce l'esempio più semplice di un'equazione di tipo iperbolico.

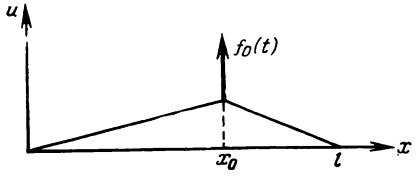


Fig. 2

Se al punto x_0 $(x_1 < x_0 < x_2)$ è applicata una forza concentrata $f_0(t)$ (fig. 2), allora l'equazione (3) si scrive come segue:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,[u_t(\xi,\ t_2) - u_t(\xi,\ t_1)]\,d\xi - \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_2,\ \tau) - u_x(x_1,\ \tau)]\,d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\,d\tau.$$

Poiché le velocità dei punti della corda sono limitate, allora per $x_1 \to x_0$ e $x_2 \to x_0$ gli integrali a primo membro di questa

uguaglianza tendono a zero, e l'uguaglianza (3) diventa

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 \left[u_x (x_0 + 0, \tau) - u_x (x_0 - 0, \tau)\right] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0 (\tau)\, d\tau. \qquad (7)$$

Applicando il teorema della media, semplificando entrambi i membri dell'uguaglianza per Δt e passando al limite per $t_2 \to t_1$, otteniamo

$$u_x (x, t) \Big|_{x_0 - 0}^{x_0 + 0} = - \frac{1}{T_0} f_0 (t).$$

Di qui si vede che nel punto di applicazione della forza concentrata le derivate prime hanno una discontinuità e l'equazione differenziale perde senso. In questo punto devono essere soddisfatte due condizioni di coniugazione

$$\left.\begin{aligned} u (x_0 + 0, t) &= u (x_0 - 0, t), \\ u_x (x_0 + 0, t) - u_x (x_0 - 0, t) &= - \frac{1}{T_0} f (t), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

la prima delle quali esprime la continuità della corda, la seconda determina il valore del flesso nel punto x_0, in dipendenza da $f_0 (t)$ e dalla tensione T_0.

2. Equazione delle vibrazioni longitudinali nelle sbarre e nelle corde. Le equazioni delle vibrazioni longitudinali per una corda, sbarra e molla si scrivono in modo uguale. Consideriamo una sbarra sita nell'intervallo $(0, l)$ dell'asse x. Le vibrazioni longitudinali possono essere descritte da una sola funzione $u (x, t)$ rappresentante all'istante t lo spostamento di un punto che nella posizione d'equilibrio aveva x come ascissa *). Per vibrazioni longitudinali questo spostamento si produce lungo la sbarra. Nel dedurre l'equazione supporremo che le tensioni generate dal processo di vibrazione siano conformi alla legge di Hooke.

Calcoliamo l'allungamento relativo dell'elemento $(x, x + \Delta x)$ all'istante t. Le coordinate degli estremi di questo elemento all'istante t valgono

$$x + u (x, t), \quad x + \Delta x + u (x + \Delta x, t),$$

*) La variabile geometrica x in questione si dice variabile di Lagrange. Ogni punto fisico della sbarra rispetto a variabili di Lagrange, nel corso di tutto il processo, è caratterizzato dalla stessa coordinata geometrica x. Un punto fisico che al momento iniziale (in stato di equilibrio) occupava la posizione x, all'istante successivo t si trova nel punto di coordinata $X = x + u (x, t)$. Se fissiamo un certo punto geometrico A di coordinata X, allora in diversi istanti in questo punto si troveranno punti fisici distinti (di coordinate lagrangiane x diverse). Spesso si ricorre anche alle variabili di Eulero X, t, dove X è la coordinata geometrica. Se $U (X, t)$ è uno spostamento del punto di coordinata euleriana X, allora la coordinata lagrangiana è $x = X - U (X, t)$.

Un esempio di applicazione delle coordinate di Eulero è dato nel n. 6.

e l'allungamento relativo è

$$\frac{[\Delta x + u(x+\Delta x,\ t) - u(x,\ t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta\,\Delta x,\ t) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$, troviamo che l'allungamento relativo nel punto x viene determinato dalla funzione $u_x(x,\ t)$. In virtù della legge di Hooke la tensione $T(x,\ t)$ vale

$$T(x,\ t) = k(x)\,u_x(x,\ t), \tag{9}$$

dove $k(x)$ è il modulo di Young nel punto x ($k(x) > 0$).

Applicando il teorema della variazione della quantità di moto, otteniamo l'equazione integrale delle vibrazioni

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi,\ t_2) - u_t(\xi,\ t_1)]\,\rho(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\,u_x(x_2,\ \tau) - k(x_1)\,u_x(x_1,\ \tau)]\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{10}$$

dove $F(x,\ t)$ è la densità della forza esterna calcolata per unità di lunghezza.

Supponiamo l'esistenza e la continuità delle derivate seconde di $u(x,\ t)$. Applicando il teorema della media e passando al limite *) per $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ e $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, giungiamo all'equazione differenziale delle vibrazioni longitudinali della sbarra **)

$$[k(x)\,u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x,\ t). \tag{11}$$

Se la sbarra è omogenea ($k(x)$ = costante, ρ = costante), questa equazione si scrive nel seguente modo:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \tag{12}$$

dove

$$f(x,\ t) = \frac{F(x,\ t)}{\rho} \tag{13}$$

è la densità della forza riferita all'unità di massa.

3. Energia di vibrazione di una corda. Troviamo l'espressione per l'energia di vibrazione trasversale di una corda $E = K + U$,

---

*) Nel seguito ometteremo i particolari legati al passaggio al limite, che sono stati specificati nel caso dell'equazione delle vibrazioni trasversali della corda.

**) Che le vibrazioni siano piccole è dovuto, nel caso in esame, soltanto alla condizione di applicabilità della legge di Hooke. Nel caso generale $T = k(x,\ u_x)\,u_x$, e si arriva così all'equazione quasi-lineare

$[k(x,\ u_x)\,u_x]_x = \rho u_{tt} F(x,\ t)$.

dove K è l'energia cinetica e U l'energia potenziale. L'elemento dx di corda, che si sposta alla velocità $v = u_t$, ha energia cinetica

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \rho(x)\, dx\, (u_t)^2 \quad (m = \rho\, dx).$$

L'energia cinetica dell'intera corda vale

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x)\, [u_t(x, t)]^2\, dx. \tag{14}$$

L'energia potenziale delle vibrazioni trasversali della corda, avente per $t = t_0$ la forma $u(x, t_0) = u_0(x)$, è uguale al lavoro che deve essere eseguito affinché la corda passi dallo stato di equilibrio alla posizione $u_0(x)$. La funzione $u(x, t)$ sia il profilo della corda all'istante t e, inoltre,

$$u(x, 0) = 0 \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

L'elemento dx sotto l'azione della resultante delle forze di tensione

$$T \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x = T u_{xx}\, dx$$

compie, durante il tempo dt, il cammino $u_t(x, t)\, dt$. Il lavoro eseguito dall'intera corda durante il tempo dt vale

$$\left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t\, dx \right\} dt = \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt}\, dx \right\} dt =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2\, dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt.$$

Integrando rispetto a t da 0 a t_0, otteniamo

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2\, dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2\, dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l\, dt.$$

È facile precisare il significato dell'ultimo termine a secondo membro di questa uguaglianza. Infatti, $T_0 u_x |_{x=0}$ è il valore della tensione all'estremo $x = 0$ della corda; $u_t(0, t)\, dt$ è lo spostamento di questo estremo e l'integrale

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t |_{x=0}\, dt \tag{15}$$

rappresenta il lavoro da eseguire per far spostare l'estremo $x = 0$. Significato analogo ha il termine corrispondente a $x = l$. Se gli estremi della corda sono fissati, allora il lavoro a questi estremi sarà nullo (in questo caso $u(0, t) = 0$, $u_t(0, t) = 0$). Di conseguenza, spostando la corda con due estremi fissati dalla posizione di equilibrio $u = 0$ nella posizione $u_0(x)$, il lavoro è indipendente dal modo di passaggio della corda a questa posizione e vale

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0 [u_0(x)]^2 dx, \tag{16}$$

cioè all'energia potenziale della corda all'istante $t = t_0$ con segno cambiato. Quindi, l'energia totale della corda è

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx. \tag{17}$$

Si può ottenere analogamente l'espressione per l'energia potenziale delle vibrazioni longitudinali di una sbarra. Fra l'altro, la si può ottenere anche partendo dalla formula per l'energia potenziale di una sbarra elastica

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0}\right)^2 l_0,$$

dove l_0 è la lunghezza iniziale e l quella finale della sbarra. Ne deriva immediatamente

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

4. Deduzione dell'equazione delle oscillazioni elettriche nei conduttori. Il passaggio di corrente elettrica in un filo con parametri distribuiti è caratterizzato dall'intensità di corrente i e dalla tensione v le quali sono funzioni della posizione del punto x e del tempo t. Applicando la legge di Ohm a un tratto di lunghezza dx, si può scrivere che la caduta di tensione nell'elemento dx del filo è uguale alla somma delle forze elettromotrici

$$-v_x dx = iR\, dx + i_t L\, dx, \tag{18}$$

dove R e L sono la resistenza e il coefficiente di autoinduzione calcolati rispetto all'unità di lunghezza.

La quantità di elettricità

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)]\, dt = -i_x dx\, dt, \tag{19}$$

che arriva all'elemento di filo dx durante il tempo dt, è uguale alla somma della quantità di elettricità necessaria per caricare l'elemento dx e della quantità che si perde per isolamento imper-

fetto:

$$C\,[v\,(x,\,t+dt)-v\,(x,\,t)]\,dx+G\,dx\cdot v\,dt=$$
$$=(Cv_t+Gv)\,dx\,dt, \tag{20}$$

dove C e G sono due coefficienti di capacità e di perdita, calcolati rispetto all'unità di lunghezza; consideriamo qui il valore delle perdite proporzionale alla tensione nel punto del filo in esame.

Dalle formule (18), (19) e (20) ricaviamo il sistema

$$\left.\begin{aligned} i_x+Cv_t+Gv&=0,\\ v_x+Li_t+Ri&=0,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

detto sistema di equazioni *telegrafiche* *).

Per ottenere un'equazione che definisca la funzione i, deriviamo la prima uguaglianza (21) rispetto a x, la seconda rispetto a t e moltiplichiamo per C. Dopo la sottrazione e tenendo conto che i coefficienti sono costanti, troviamo

$$i_{xx}+Gv_x-CLi_{tt}-CRi_t=0.$$

Rimpiazzando v_x con il suo valore, ricavato dalla seconda equazione (21), otteniamo l'equazione dell'intensità di corrente

$$i_{xx}=CLi_{tt}+(CR+GL)\,i_t+GRi. \tag{22}$$

È analoga l'equazione della tensione

$$v_{xx}=CLv_{tt}+(CR+GL)\,v_t+GRv. \tag{23}$$

L'equazione (22) o la (23) si dice equazione telegrafica. Se si possono trascurare le perdite attraverso il materiale isolante e se la resistenza è molto piccola ($G\cong R\cong 0$), si arriva alla nota equazione delle vibrazioni

$$v_{tt}=a^2v_{xx}\quad\left(a=\sqrt{\frac{1}{LC}}\right). \tag{24}$$

5. Vibrazioni trasversali di una membrana. Si chiama membrana una pellicola piana non resistente a flessione o trazione. Consideriamo una membrana avente un contorno piano C. Studieremo le vibrazioni trasversali della membrana in cui lo spostamento è perpendicolare al piano della membrana.

Sia ds l'elemento d'arco di un certo contorno sulla superficie della membrana passante per il punto $M\,(x,\,y)$. Questo elemento è soggetto a una tensione uguale a $T\,ds$. Il vettore T giace nel piano tangente alla superficie istantanea della membrana, in quanto quest'ultima non resiste a flessione e trazione, ed è per-

*) Queste equazioni sono approssimate nei limiti della teoria del campo elettromagnetico in quanto non tengono conto delle vibrazioni elettromagnetiche del mezzo in cui si trova il filo.

pendicolare all'elemento ds. Si può mostrare che la mancanza di resistenza a trazione fa sì che il valore della tensione sia indipendente dalla direzione dell'elemento ds, cosicché il vettore di tensione $T = T(x, y, z)$ è una funzione di x, y e di t. Queste proprietà del vettore T esprimono matematicamente la non resistenza a flessione e trazione.

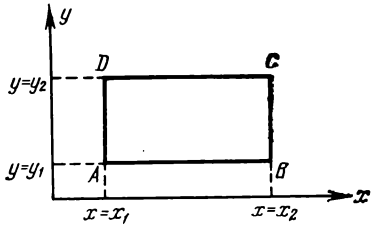


Fig. 3

Studieremo vibrazioni piccole della membrana, trascurando i quadrati delle derivate prime u_x e u_y, in cui la funzione $u(x, y, t)$ determina la forma della membrana all'istante t. Da questa ipotesi segue immediatamente che $T_h(x, y, t)$, la proiezione della tensione sul piano (x, y), è uguale al valore assoluto della tensione. Infatti, qualunque sia l'orientazione dell'arco ds, l'angolo γ' formato dal vettore T con il piano (x, y) non è superiore all'angolo γ fra la normale alla superficie della membrana nel punto (x, y) e l'asse z. Pertanto

$$\cos\gamma' \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cong 1,$$

cioè $\cos\gamma' \cong 1$, e

$$T_h(x, y, z, t) = T\cos\gamma' \cong T(x, y, z, t). \tag{25}$$

La componente verticale della tensione vale, evidentemente,

$$T_u = T\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Separiamo sulla superficie della membrana un elemento d'area la cui proiezione sul piano (x, y) sia un rettangolo $ABCD$ con i lati paralleli agli assi coordinati (fig. 3). Su questo elemento agisce una forza di tensione uguale a

$$T^* = \oint_{ABCD} T\,ds. \tag{26}$$

Per mancanza di trazione lungo gli assi x e y le proiezioni di T^* su questi assi sono nulle, ossia

$$T_x^* = \int_B^C T(x_2, y, t)\,dy - \int_A^D T(x_1, y, t)\,dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\}\,dy = 0.$$

Analogamente

$$T_y^* = \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\}\, dx = 0.$$

Usando il teorema della media e tenendo conto del fatto che l'area $ABCD$ è arbitraria, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

vale a dire la tensione T resta invariata al variare di x e y e può dipendere unicamente da t.

L'area di un certo elemento della membrana all'istante t vale, nella nostra approssimazione,

$$\int\int \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} = \int\int \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \cong \int\int dx\, dy. \tag{28}$$

Quindi, la dilatazione per vibrazioni non si produce e, in virtù della legge di Hooke, si ha l'indipendenza della tensione dal tempo. Abbiamo stabilito in tal modo che la tensione è indipendente dalle variabili x, y e t

$$T(x, y, t) = \text{costante} = T_0. \tag{29}$$

Passiamo alla deduzione dell'equazione delle vibrazioni della membrana. Ricorriamo a tal fine al teorema degli incrementi della quantità di moto. Sia S_1 la proiezione sul piano (x, y) di un tratto della membrana e C_1 la frontiera di S_1. Eguagliando la variazione della quantità di moto all'impulso delle componenti verticali delle forze di tensione e delle forze esterne di densità $F(x, y, t)$, otteniamo un'equazione delle vibrazioni della membrana in forma integrale

$$\int\int_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)]\, \rho(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int\int_{S_1} F\, dx\, dy\, dt, \tag{30}$$

dove $\rho(x, y)$ è la densità superficiale della membrana e $F(x, y, t)$ la densità della forza esterna (rispetto all'unità di area).

Per passare all'equazione differenziale, supponiamo che la funzione $u(x, y, t)$ abbia derivate seconde continue. Mediante il teorema di Ostrogradskij *) un integrale curvilineo si trasforma

*) Si vedano ad esempio: V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. II, Editori Riuniti, 1977. B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, 1965 (ed. russa).

in un integrale di superficie

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy,$$

per cui l'equazione integrale delle vibrazioni si riduce alla forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} \{\rho u_{tt} - T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t)\}\, dx\, dy\, dt = 0.$$

Applicando il teorema della media e tenendo conto del fatto che S_1 e l'intervallo di tempo (t_1, t_2) sono arbitrari, concludiamo che l'espressione fra parentesi graffa è identicamente nulla, e arriviamo così all'equazione differenziale per le vibrazioni della membrana

$$\rho u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t). \tag{31}$$

Per una membrana omogenea questa equazione si può scrivere sotto la forma

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho}\right), \tag{32}$$

dove $f(x, y, t)$ è la densità di forza calcolata rispetto all'unità di massa della membrana.

6. Equazioni idrodinamiche ed acustiche. Per caratterizzare il movimento dei fluidi si fa uso delle funzioni $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$ che sono le componenti del vettore di velocità v nel punto (x, y, z) all'istante t (variabili di Eulero). Grandezze che caratterizzano il movimento dei fluidi sono anche la densità $\rho(x, y, z, t)$, la pressione $p(x, y, z, t)$ e la densità delle forze esterne agenti $\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ (qualora tali esistano) calcolata per unità di massa.

Consideriamo un certo volume di liquido T e calcoliamo le forze agenti su di esso. Trascurando le forze d'attrito dovute alla viscosità, considerando cioè un liquido perfetto, otteniamo per la forza risultante un'espressione sotto forma di integrale di superficie

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\, dS, \tag{33}$$

dove S è la superficie del volume T, $\boldsymbol{n}$ il vettore unità della normale esterna. La formula di Ostrogradskij *) dà

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\, dS = -\iiint_T \operatorname{grad} p\, d\tau. \tag{34}$$

*) Infatti, $p\boldsymbol{n} = p\cos(n, x)\,\boldsymbol{i} + p\cos(n, y)\,\boldsymbol{j} + p\cos(n, z)\,\boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sono i vettori unità nel sistema delle coordinate (x, y, z), e

$$\iint_S p\cos(n, x)\, dx = \iiint_T \frac{\partial p}{\partial x}\, d\tau \text{ ecc.}$$

Per calcolare le accelerazioni di un certo punto del liquido, è necessario tener conto dello spostamento del punto stesso. Sia $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ l'equazione della traiettoria di questo punto. Calcoliamo la derivata della velocità rispetto al tempo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\dot{z} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v_1 + \frac{\partial v}{\partial y}v_2 + \frac{\partial v}{\partial z}v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\,v,$$

dove

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Questa derivata rispetto al tempo, che tiene conto del movimento di una particella del mezzo (sostanza), è detta *sostanziale* o materiale. L'equazione del movimento del liquido esprime una relazione normale fra l'accelerazione delle particelle e le forze agenti su di esse

$$\iiint_T \rho \frac{dv}{dt}\,d\tau = -\iiint_T \operatorname{grad} p\,d\tau + \iiint_T \rho F\,d\tau, \tag{35}$$

dove l'ultimo integrale rappresenta la forza uniforme di quelle esterne applicate al volume T. Essendo arbitrario il volume T, di qui ricaviamo l'equazione del movimento per il liquido perfetto sotto la forma di Eulero

$$v_t + (v\nabla)\,v = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + F. \tag{36}$$

Passiamo ora alla deduzione dell'equazione di continuità. Se all'interno di T non esistono altre sorgenti o perdite, la variazione nell'unità di tempo della quantità di liquido contenuto in T è uguale al flusso attraverso la frontiera S

$$\frac{d}{dt}\iiint_T \rho\,dt = -\iint_S \rho v n\,dS. \tag{37}$$

La trasformazione dell'integrale superficiale in integrale di volume dà

$$\iiint_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v\right) d\tau = 0.$$

Poiché questa uguaglianza è valida per volumi piccoli a piacere, di qui deriva l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

ossia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = 0. \tag{38}$$

Alle equazioni (36) e (38) si deve associare l'equazione termodinamica di stato che qui scriviamo nella forma

$$p = f(\rho).$$

Otteniamo quindi un sistema di cinque equazioni con cinque funzioni incognite v_x, v_y, v_z, p e ρ. Se l'equazione di stato contenesse la temperatura si dovrebbe aggiungere anche l'equazione di trasporto di calore (si veda l'Appendice IV). Quindi, il sistema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\, v = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ &p = f(\rho) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

rappresenta un sistema chiuso di equazioni idrodinamiche.

Applichiamo le equazioni idrodinamiche al processo di propagazione del suono in un gas. Facciamo le seguenti ipotesi: 1) le forze esterne non esistono; 2) il processo di propagazione del suono è adiabatico, perciò da equazione di stato serve la curva adiabatica di Poisson

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right),$$

dove ρ_0 e p_0 sono la densità iniziale e la pressione iniziale, c_p e c_v i calori specifici a pressione costante e volume costante; 3) essendo piccole le vibrazioni del gas, si possono trascurare le potenze superiori delle velocità, dei gradienti delle velocità e della variazione di densità.

Si dice *condensazione* del gas la grandezza $s(x, y, z, t)$ uguale alla variazione relativa di densità

$$s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \tag{40}$$

da cui

$$\rho = \rho_0 (1 + s). \tag{41}$$

Con queste ipotesi le equazioni idrodinamiche diventano

$$\left.\begin{aligned} &v_t = -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p, \\ &\rho_t + \rho_0 \operatorname{div} v = 0, \\ &p = p_0 (1 + s)^{\gamma} \cong p_0 (1 + \gamma s), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

poiché

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0}(1 - s + \ldots)\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p + \ldots,$$

$$\operatorname{div} \rho v = v \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = \rho_0 \operatorname{div} v + \ldots,$$

dove i puntini indicano i termini del secondo ordine e quelli di ordine superiore. Introducendo la notazione $a^2 = \gamma p_0/\rho_0$, riscriviamo il sistema (42) come segue:

$$\left.\begin{aligned} v_t &= -a^2 \operatorname{grad} s, \\ s_t &+ \operatorname{div} v = 0. \end{aligned}\right\} \tag{42'}$$

Applicando alla prima equazione (42') l'operatore di divergenza e cambiando l'ordine della derivazione avremo

$$\operatorname{div} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} v = -a^2 \operatorname{div} (\operatorname{grad} s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

dove

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

è l'*operatore di Laplace*. Utilizzando la seconda equazione (42'), otteniamo l'equazione delle vibrazioni

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt} \tag{43}$$

ossia

$$a^2 (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = s_{tt}.$$

Di qui e dalla (40) ricaviamo l'equazione per la densità

$$a^2 (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \tag{43'}$$

Le espressioni (43) e (43') sono due equazioni delle vibrazioni Introduciamo ora il *potenziale delle velocità* e mostriamo che esso verifica l'equazione (43) delle vibrazioni come la condensazione.

Dall'equazione

$$v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$$

deriva

$$v(x, y, z, t) = v(x, y, z, 0) - a^2 \operatorname{grad} \left(\int_0^t s \, dt \right), \tag{44}$$

dove $v(x, y, z, 0)$ è la distribuzione iniziale delle velocità. Se il campo delle velocità ha all'istante iniziale il potenziale

$$v \mid_{t=0} = -\operatorname{grad} f(x, y, z), \tag{45}$$

allora si verifica la relazione

$$v = -\operatorname{grad} \left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s \, dt \right] = -\operatorname{grad} U, \tag{46}$$

la quale significa che esiste un potenziale delle velocità $U(x, y, z, t)$. La conoscenza del potenziale delle velocità è sufficiente per

descrivere l'intero processo di movimento *)

$$\left.\begin{aligned} v &= -\operatorname{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione di continuità

$$s_t + \operatorname{div} v = 0,$$

vediamo che l'equazione delle vibrazioni per il potenziale è

$$a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

ossia

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \tag{48}$$

Anche per la pressione p e la velocità v si può ottenere un'equazione della forma (48), detta spesso *equazione acustica*.

Risolvendo problemi per i casi bi- o unidimensionale occorre sostituire al laplaciano nell'equazione (48) l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ e, rispettivamente, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. La costante

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

ha la dimensione di una velocità e, come verrà mostrato nel § 2, rappresenta la velocità di propagazione del suono.

Calcoliamo la velocità del suono nell'atmosfera sotto la pressione normale. In questo caso $\gamma = 7/5$ $\rho_0 = 0{,}001293$ g/cm^3, $p_0 = 1{,}033$ kg/cm^2; di conseguenza,

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336 \text{ m/s}.$$

Nel caso delle vibrazioni di un gas in un dominio limitato, sulla sua frontiera devono essere assegnate certe condizioni al contorno. Se la frontiera rappresenta una parte sottile impenetrabile, allora la componente normale della velocità è nulla, ciò che conduce alle condizioni

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Sigma = 0 \quad \text{ossia} \quad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_\Sigma = 0. \tag{49}$$

7. Condizioni iniziali e al contorno. Per la descrizione matematica di un processo fisico occorre soprattutto formulare il problema, cioè stabilire le condizioni sufficienti per la determinazione univoca del processo.

*) Si vede dalla formula (46) che il potenziale U è definito a meno di un termine che è una funzione arbitraria di t. Dall'equazione $v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$ e dalla (46) deriva $\operatorname{grad}\left(s - \frac{1}{a^2} U_t\right) = 0$, vale a dire $s = \frac{1}{a^2} U_t$ con una normalizzazione appropriata del potenziale U.

Le equazioni differenziali alle derivate ordinarie e, a fortiori, alle derivate parziali hanno, in generale, un'infinità di soluzioni. Pertanto, nel caso in cui il problema fisico conduce ad un'equazione alle derivate parziali, perché la caratteristica del processo sia univoca occorre che all'equazione siano associate certe condizioni complementari.

Nel caso di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine la soluzione può essere definita da condizioni iniziali, assegnando cioè valori della funzione e della sua derivata prima per un valore «iniziale» della variabile indipendente (problema di Cauchy). Si incontrano anche altre forme di condizioni complementari allorché, ad esempio, vengono assegnati valori della funzione in due punti (problema della catenaria). Anche per un'equazione alle derivate parziali sono possibili varie forme di condizioni complementari.

Consideriamo dapprima il problema più semplice delle vibrazioni trasversali di una corda con due estremi fissati. In questo problema $u\ (x,\ t)$ fornisce la deviazione della corda dall'asse x. Se gli estremi della corda $0 \leqslant x \leqslant l$ sono fissati, allora devono essere soddisfatte le «*condizioni al contorno*»

$$u\ (0,\ t) = 0, \quad u\ (l,\ t) = 0. \tag{50}$$

Poiché il processo di vibrazione della corda dipende dalla sua forma e dalla distribuzione delle velocità, si devono assegnare le «condizioni iniziali»

$$\left.\begin{aligned} u\ (x, t_0) &= \varphi\ (x), \\ u_t\ (x, t_0) &= \psi\ (x). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Quindi, le condizioni complementari sono composte delle condizioni al contorno e iniziali in cui $\varphi\ (x)$ e $\psi\ (x)$ sono due funzioni date del punto. Nel seguito mostreremo che queste condizioni definiscono completamente la soluzione dell'equazione delle vibrazioni della corda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{52}$$

Se gli estremi della corda si muovono secondo una data legge, le condizioni al contorno (50) assumono un'altra forma:

$$\left.\begin{aligned} u\ (0, t) &= \mu_1\ (t), \\ u\ (l, t) &= \mu_2\ (t), \end{aligned}\right\} \tag{50'}$$

dove $\mu_1\ (t)$ e $\mu_2\ (t)$ sono due funzioni date del tempo t. Analogamente si pone il problema delle vibrazioni longitudinali di una corda o di una molla.

Sono possibili anche altri tipi di condizioni al contorno. Consideriamo ad esempio il problema delle vibrazioni longitudinali di una molla, un estremo della quale è fissato (punto di sospensio-

ne) e l'altro libero. La legge di moto dell'estremo libero non è assegnata e spesso rappresenta la funzione da definire.

Nel punto di sospensione $x = 0$ la deviazione è

$u\ (0,\ t) = 0;$

nell'estremo libero $x = l$ la tensione della molla

$$T\ (l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} \tag{53}$$

è nulla (non esistono forze esterne) in modo che la formulazione matematica della condizione dell'estremo libero ha la forma

$u_x\ (l,\ t) = 0.$

Se l'estremo $x = 0$ si muove secondo una determinata legge $\mu\ (t)$, e se per $x = l$ è assegnata la forza $\overline{\nu}\ (t)$, allora

$$u\ (0, t) = \mu\ (t), \quad u_x\ (l, t) = \nu\ (t) \quad \left(\nu\ (t) = \frac{1}{k}\,\overline{\nu}\ (t)\right).$$

Tipica è anche la condizione di vincolo elastico, per $x = l$ ad esempio,

$ku_x\ (l,\ t) = -\alpha u\ (l,\ t)$

ossia

$$u_x\ (l, t) = -hu\ (l, t) \quad \left(h = \frac{\alpha}{k}\right), \tag{54}$$

per cui l'estremo $x = l$ può spostarsi, ma la forza elastica del vincolo produce una tensione che cerca di far tornare l'estremo spostato alla posizione iniziale. Secondo la legge di Hooke questa forza è proporzionale allo spostamento $u\ (l,\ t)$; il coefficiente di proporzionalità α è detto coefficiente di rigidità del vincolo.

Se un punto (sistema) rispetto al quale si ha vincolo rigido si sposta e se la sua deviazione dalla posizione iniziale è data dalla funzione $\theta\ (t)$, la condizione al contorno diventa

$$u_x\ (l, t) = -h\ [u\ (l, t) - \theta\ (t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \tag{55}$$

La condizione di vincolo elastico all'estremo sinistro $x = 0$ ha la forma

$u_x\ (0,\ t) = h\ [u\ (0,\ t) - \theta\ (t)], \qquad h > 0$

(formalmente si può supporre che la (55) si verifichi anche per $x = 0$ ma $h < 0$). Si deve notare che nel caso di vincolo rigido (α grande), in cui anche piccoli spostamenti dell'estremo implicano grandi tensioni, la condizione al contorno (55) si trasforma nella condizione $u\ (l,\ t) = \mu\ (t)$ ($\alpha = \infty$) per $\mu\ (t) = \theta\ (t)$. Nel caso di vincolo debole (α piccolo), in cui grandi spostamenti dell'estremo implicano deboli tensioni, la condizione al contorno si

trasforma nella condizione dell'estremo libero

$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0)$.

Nel seguito parleremo di tre fondamentali tipi di condizioni al contorno:

condizione al contorno di prima specie $u(0, t) = \mu(t)$, ossia regime dato;

condizione al contorno di seconda specie $u_x(0, t) = \nu(t)$, ossia forza data;

condizione al contorno di terza specie $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$, ossia vincolo elastico.

Analogamente vengono assegnate le condizioni al contorno anche per il secondo estremo $x = l$. Se le funzioni assegnate a secondo membro ($\mu(t)$, $\nu(t)$ e $\theta(t)$) sono nulle, le condizioni al contorno si dicono *omogenee*.

Combinando questi tipi di condizioni al contorno, otteniamo sei tipi elementari di problemi ai limiti.

La condizione al contorno più complessa ha luogo ad esempio, per vincolo elastico non ubbidiente alla legge di Hooke, quando la tensione all'estremo è una funzione non lineare dello spostamento $u(l, t)$ in modo che

$$u_x(l, t) = \frac{1}{k} F[u(l, t)]. \tag{56}$$

Questa condizione al contorno, a differenza di quelle sopra considerate, è non lineare. Sono possibili, inoltre, altre relazioni fra spostamenti e tensioni agli estremi opposti del sistema. Per esempio, nei problemi della vibrazione di un anello allorché $x = 0$ e $x = l$ rappresentano un medesimo punto fisico, le condizioni al contorno assumono la forma

$$u(l, t) = u(0, t); \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \tag{57}$$

cioè si riducono alle condizioni di continuità di u e u_x. Le derivate rispetto a t possono figurare anch'esse nelle condizioni al contorno. Se l'estremo di una molla è soggetto a una resistenza del mezzo proporzionale alla velocità del suo movimento (all'estremo della molla è attaccata una lamina il cui piano è perpendicolare all'asse della molla), la condizione al contorno diventa

$$ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t). \tag{58}$$

Se all'estremo $x = l$ della molla è attaccato un carico di massa m, allora per $x = l$ deve essere soddisfatta la condizione

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \tag{59}$$

Per le vibrazioni trasversali della corda tutte le condizioni al contorno si scrivono nella stessa forma sostituendo k con T_0.

Nel seguito ci limiteremo a considerare tre tipi elementari di condizioni al contorno basando l'esposizione fondamentale sul primo tipo di condizione al contorno e, nel frattempo, notando alcune particolarità legate alla seconda e terza condizione.

Formuliamo il primo problema ai limiti per l'equazione (5):

trovare la funzione $u\ (x,\ t)$ *definita nel dominio* $0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0$, *che verifica l'equazione*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f\ (x,\ t) \quad \text{per} \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

e che soddisfa alle condizioni al contorno

$$u\ (0,\ t) = \mu_1\ (t),$$

$$(t > 0)\ ^*), \tag{60'}$$

$$u\ (l,\ t) = \mu_2\ (t)$$

e a quelli iniziali

$$u\ (x,\ 0) = \varphi\ (x),$$

$$(0 < x < l). \tag{60''}$$

$$u_t\ (x,\ 0) = \psi\ (x)$$

Analogamente il problema viene formulato per l'equazione (11).

Se per ambedue gli estremi vengono considerate le condizioni al contorno di seconda o di terza specie, i problemi corrispondenti si dicono problemi ai limiti secondo o terzo. Se le condizioni al contorno per $x = 0$ e $x = l$ sono di tipo distinto, tali problemi sono detti misti, senza una loro classificazione più particolareggiata.

Passiamo ora allo studio dei casi limite del problema posto. L'influenza delle condizioni al contorno in un punto M_0, sufficientemente lontano dalla frontiera sulla quale sono assegnate tali condizioni, si produce dopo un lasso di tempo sufficientemente grande.

Se ci interessa un fenomeno durante un piccolo intervallo di tempo, quando l'influenza delle frontiere è ancora inessenziale, al posto del problema completo si può considerare un *problema* limite *con condizioni iniziali* per un dominio illimitato:

trovare la soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f\ (x,\ t) \quad \text{per} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

con le condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u\ (x,\ 0) &= \varphi\ (x), \\ u_t\ (x,\ 0) &= \psi\ (x) \end{aligned}\right\} \quad \text{per} \quad -\infty < x < \infty. \tag{61}$$

Spesso questo problema si dice *problema di Cauchy.*

---

*) Non ci soffermiamo sul caso in cui le condizioni al contorno sono assegnate sull'intervallo $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Se, invece, studiamo un fenomeno in prossimità di una frontiera e se l'influenza del regime al contorno è inessenziale sulla seconda frontiera durante tutto l'intervallo di tempo che ci interessa, allora abbiamo a che fare con l'impostazione del problema sulla semiretta $0 \leqslant x < \infty$ allorché, oltre all'equazione, sono date le condizioni complementari

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,t) = \mu(t), & t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leqslant x < \infty. \end{array}\right\} \tag{62}$$

La natura del fenomeno per gli istanti sufficientemente lontani dall'istante iniziale $t = 0$ è completamente definita dai valori al contorno in quanto l'influenza delle condizioni iniziali, grazie all'attrito proprio a ogni sistema reale, diminuisce col passare del tempo *). Problemi di questo tipo sono particolarmente frequenti nei casi in cui il sistema viene eccitato periodicamente dal regime al contorno, che agisce per un lungo tempo. Questi problemi «senza condizioni iniziali» (per un regime stazionario) vengono formulati nel seguente modo:

trovare la soluzione dell'equazione in esame per $0 \leqslant x \leqslant l$ *e* $t > -\infty$ *con le condizioni al contorno*

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{array}\right\} \tag{63}$$

Analogamente viene formulato il problema senza condizioni iniziali per una semiretta.

Nel seguito, accanto ai problemi ai limiti fondamentali considereremo anche problemi limite:

1. Il problema nel dominio infinito in cui una o entrambe le frontiere si trovano all'infinito.

2. Il problema senza condizioni iniziali (per un regime stazionario) allorché si studia una soluzione definita durante un intervallo di tempo infinito.

8. Riduzione del problema generale. Risolvendo un problema complesso, è naturale cercare di ricondurre la soluzione alla soluzione di problemi più semplici. A questo scopo rappresentiamo la soluzione di un problema generale ai limiti come somma di soluzioni di una serie di problemi particolari ai limiti.

---

*) L'equazione delle vibrazioni, tenuto conto che l'attrito è proporzionale alla velocità, ha la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0).$$

Per dettagli sull'impostazione dei problemi senza condizioni iniziali per $\alpha = 0$ si veda il n. 7 del § 3.

$u_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ siano funzioni soddisfacenti alle condizioni

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x, t) \tag{64}$$

per $0 < x < l$, $t > 0$ e alle condizioni aggiuntive

$$\left.\begin{aligned} &u_i(0, t) = \mu_1^i(t), \\ &u_i(l, t) = \mu_2^i(t); \\ &u_i(x, 0) = \varphi^i(x), \\ &\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

È evidente che si ha una sovrapposizione di soluzioni, vale a dire la funzione

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x, t) \tag{66}$$

verifica un'equazione analoga a secondo membro

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x, t) \tag{67}$$

e le condizioni aggiuntive i cui secondi membri sono le funzioni

$$\left.\begin{aligned} &\mu_k^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \quad (k = 1, 2), \\ &\varphi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x), \\ &\psi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Questo principio di sovrapposizione si riferisce, evidentemente, non soltanto al problema considerato, ma a qualsiasi equazione lineare con condizioni lineari aggiuntive. Nel seguito ricorreremo spesso a questa proprietà.

La soluzione del problema generale ai limiti

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ &(0 < x < l, \; t > 0); \\ &u(0, t) = \mu_1(t), \\ &u(l, t) = \mu_2(t); \\ &u(x, 0) = \varphi(x), \\ &u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

può essere rappresentata sotto forma della somma

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t), \tag{70}$$

dove u_1, u_2, u_3, u_4 sono le soluzioni dei seguenti quattro problemi particolari ai limiti:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (0 < x < l, \ t > 0).$$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\left.\begin{array}{ll} u_1(0, t) = 0, & u_2(0, t) = \mu_1(t), \\ u_1(l, t) = 0; & u_2(l, t) = 0; \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), & u_2(x, 0) = 0, \\ u_{1_t}(x, 0) = \psi(x), & u_{2_t}(x, 0) = 0; \\ u_3(0, t) = 0, & u_4(0, t) = 0, \\ u_3(l, t) = \mu_2(t); & u_4(l, t) = 0; \\ u_3(x, 0) = 0, & u_4(x, 0) = 0, \\ u_{3_t}(x, 0) = 0 & u_{4_t}(x, 0) = 0. \end{array}\right\} \tag{71}$$

Ci limiteremo qui a questa riduzione formale per caratterizzare i problemi particolari ai limiti che rappresentano tappe fondamentali nella risoluzione del problema generale. Una riduzione analoga può essere effettuata anche per casi limite del problema generale ai limiti.

9. Impostazione dei problemi ai limiti nel caso di più variabili. Abbiamo considerato in dettaglio l'impostazione dei problemi ai limiti nel caso di una variabile indipendente geometrica x (e del tempo t). Se il numero di variabili geometriche è $n > 1$ ($n = 3$ ad esempio), il primo problema ai limiti viene formulato in modo del tutto analogo:

trovare la funzione $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ *definita per* $t \geqslant 0$ *all'interno di un dato dominio* T *di frontiera* Σ, *che per* $t > 0$ *verifica all'interno di* T *l'equazione*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t) \quad (M(x, y, z) \in T, \ t > 0), \tag{72}$$

la condizione al contorno su Σ

$$u \mid_{\Sigma} = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in \Sigma, \quad t \geqslant 0) \tag{73}$$

($\mu(x, y, z, t)$ *è una funzione data su* Σ) *e le condizioni iniziali*

$$\left.\begin{array}{l} u(M, 0) = \varphi(M), \\ u_t(M, 0) = \psi(M) \end{array}\right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \tag{74}$$

Lo sviluppo del problema generale ai limiti come somma di problemi più semplici è analogo al caso precedente. Notiamo che

è possibile anche l'impostazione dei problemi ai limiti per un dominio illimitato, un semispazio ecc.

10. Teorema di unicità. Risolvendo problemi ai limiti:

1) occorre convincersi che le condizioni complementari siano sufficienti per trovare una soluzione univoca; ciò si ottiene mediante la dimostrazione del *teorema di unicità*;

2) occorre convincersi che le condizioni complementari non modifichino la formulazione del problema, cioè che fra esse non esistano condizioni incompatibili; ciò si ottiene mediante la dimostrazione del *teorema di esistenza*; la dimostrazione dell'esistenza della soluzione è strettamente legata, di solito, al metodo di ricerca della soluzione.

Qui dimostreremo il *teorema di unicità* seguente.

Se esiste è unica la funzione $u(x, t)$ *definita nel dominio* $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ *e soddisfacente all'equazione*

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) \quad (\rho(x) > 0, \quad k(x) > 0),$$

$$0 < x < l, \quad t > 0, \tag{75}$$

con le condizioni iniziali e al contorno

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

se sono soddisfatte le condizioni:

1) *la funzione* $u(x, t)$, *le derivate facenti parte dell'equazione* (75) *e la derivata* u_{xt} *sono continue sull'intervallo* $0 \leqslant x \leqslant l$ *per* $t \geqslant 0$;

2) *i coefficienti* $\rho(x)$ *e* $k(x)$ *sono continui sull'intervallo* $0 \leqslant x \leqslant l$.

Supponiamo che esistano due soluzioni del problema considerato:

$$u_1(x, t), \quad u_2(x, t),$$

e consideriamo la differenza $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

La funzione $v(x, t)$ verifica, evidentemente, l'equazione omogenea

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{77}$$

soddisfa alle condizioni complementari

$$\left.\begin{aligned} v(x, 0) &= 0, \quad v(0, t) = 0, \\ v_t(x, 0) &= 0, \quad v(l, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

e all'ipotesi 1) del teorema.

Dimostriamo che la funzione $v(x, t)$ è identicamente nulla.

Consideriamo la funzione

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{k (v_x)^2 + \rho (v_t)^2\}\, dx \tag{79}$$

e mostriamo che essa è indipendente da t. Il significato fisico della funzione $E(t)$ è immediato: questa è l'energia totale della corda all'istante t. Deriviamo $E(t)$ rispetto a t, eseguendo la derivazione sotto il segno di integrale *)

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (k v_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\, dx.$$

Integrando per parti il primo termine a secondo membro avremo

$$\int_0^l k v_x v_{xt}\, dx = [k v_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t (k v_x)_x\, dx. \tag{80}$$

La sostituzione si annulla in virtù delle condizioni al contorno (da $v(0, t) = 0$ discende $v_t(0, t) = 0$ e analogamente per $x = l$). Ne segue che

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (k v_x)_x]\, dx = \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (k v_x)_x]\, dx = 0,$$

vale a dire $E(t) =$ costante. Tenendo conto delle condizioni iniziali, otteniamo

$$E(t) = \text{costante} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [k (v_x)^2 + \rho (v_t)^2]_{t=0}\, dx = 0, \tag{81}$$

poiché

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Applicando la formula (81) e tenendo conto che k e ρ sono positivi, concludiamo che

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$

da cui deriva l'identità

$$v(x, t) = \text{costante} = C_0. \tag{82}$$

Partendo dalla condizione iniziale troviamo

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

*) Per derivare sotto il segno di integrale, è sufficiente che l'espressione integranda ottenuta sia continua sull'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$ per $t \geqslant 0$. Questa condizione è soddisfatta nel nostro caso in quanto la funzione $v(x, t)$ verifica l'ipotesi 1) del teorema, e $\rho(x)$ e $k(x)$ verificano l'ipotesi 2).

con ciò abbiamo dimostrato che

$$v(x,\ t) \equiv 0. \tag{83}$$

Di conseguenza, se esistono due funzioni $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ soddisfacenti a tutte le ipotesi del teorema, allora $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Per il secondo problema ai limiti la funzione $v = u_1 - u_2$ verifica le condizioni al contorno

$$v_x(0,\ t) = 0, \quad v_x(l,\ t) = 0, \tag{84}$$

e anche per essa la sostituzione nella formula (80) si annulla. Il resto della dimostrazione del teorema rimane immutato.

Per il terzo problema ai limiti la dimostrazione richiede alcune modifiche. Considerando come prima le due soluzioni u_1 e u_2, otteniamo per la loro differenza $v(x, t) = u_1 - u_2$ l'equazione (77) e le condizioni al contorno

$$\left.\begin{aligned} &v_x(0,\ t) - h_1 v(0,\ t) = 0 \quad (h_1 \geqslant 0), \\ &v_x(l,\ t) + h_2 v(l,\ t) = 0 \quad (h_2 \geqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Rappresentiamo la sostituzione nella formula (80) come segue

$$[k v_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[h_2 v^2(l,\ t) + h_1 v^2(0,\ t)].$$

Integrando $\frac{dE}{dt}$ nei limiti da 0 a t, otteniamo

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (k v_x)_x]\, dx\, dt -$$

$$- \frac{k}{2}\{h_2[v^2(l,\ t) - v^2(l,\ 0)] + h_1[v^2(0,\ t) - v^2(0,\ 0)]\},$$

da cui, in virtù dell'equazione e delle condizioni iniziali, deriva

$$E(t) = -\frac{k}{2}[h_2 v^2(l,\ t) + h_1 v^2(0,\ t)] \leqslant 0. \tag{86}$$

Siccome la funzione integranda è non negativa, $E(t) \geqslant 0$, allora

$$E(t) \equiv 0 \tag{87}$$

e, di conseguenza,

$$v(x,\ t) \equiv 0. \tag{88}$$

Abbiamo dato qui il metodo di dimostrazione del teorema di unicità, basato sull'uso dell'espressione per l'energia totale, che trova una larga applicazione per la dimostrazione dei teoremi di unicità in diverse branche della fisica matematica, ad esempio, nella teoria dei campi elettromagnetici, nella teoria dell'elasticità e in idrodinamica.

La dimostrazione dell'unicità di altri problemi ai limiti (il problema di Cauchy e problemi senza condizioni iniziali) verrà data nel seguito in un luogo appropriato.

Problemi

1. Dimostrare che l'equazione delle piccole vibrazioni di torsione di una sbarra ha la forma

$$\Theta_{tt} = a^2 \Theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}},$$

dove Θ è l'angolo di rotazione della sezione della sbarra di ascissa x, G il modulo di traslazione, J il momento polare d'inerzia della sezione trasversale e k il momento d'inerzia dell'unità di lunghezza della sbarra. Dare l'interpretazione fisica delle condizioni al contorno di prima, seconda e terza specie per questa equazione.

2. Un filo omogeneo assolutamente flessibile è fissato ad un estremo e per azione del proprio peso occupa la posizione di equilibrio verticale. Dedurre l'equazione delle piccole vibrazioni del filo.

Risposta: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right], \quad a^2 = g.$

dove $u\,(x,\ t)$ è la traslazione del punto, l la lunghezza del filo e g l'accelerazione della forza di gravità.

3. Un filo omogeneo pesante di lunghezza l, il cui estremo superiore $x = 0$) è attaccato a un asse verticale, ruota attorno a questo asse a velocità angolare costante ω. Dedurre l'equazione delle piccole vibrazioni del filo attorno alla propria posizione di equilibrio verticale.

Risposta: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u$, dove $a^2 = g$.

4. Dedurre l'equazione delle vibrazioni trasversali di una corda in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla prima potenza della velocità.

Risposta: $v_{tt} = a^2 v_{xx} - h^2 v_t, \quad a^2 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}.$

5. Stabilire le condizioni al contorno per l'equazione delle vibrazioni longitudinali di una sbarra elastica (molla) nel caso in cui l'estremo superiore della sbarra sia fissato rigidamente e all'estremo inferiore sia attaccato un peso P, se:

a) come posizione di equilibrio viene inteso lo stato teso della sbarra per azione del carico fisso P attaccato all'estremo inferiore (tensione statica);

b) come posizione di equilibrio viene inteso lo stato non teso della sbarra (ad esempio, all'istante iniziale un supporto viene tolto dal disotto del carico e questi comincia a tendere la sbarra).

6. Scrivere l'equazione e le condizioni che definiscono le vibrazioni di torsione di una sbarra agli estremi della quale sono attaccate due pulegge.

Risposta: Per $x = 0$, $x = l$ devono essere soddisfatte condizioni al contorno della forma

$$\Theta_{tt}\,(0,\ t) = \alpha_1^2 \Theta_x\,(0,\ t), \quad \Theta_{tt}\,(l,\ t) = -\alpha_2^2 \Theta_x\,(l,\ t).$$

7. A un certo punto $x = x_0$ di una corda ($0 \leqslant x \leqslant l$) è attaccato un carico di massa M. Dedurre le condizioni di coniugazione nel punto $x = x_0$.

8. All'estremo $x = l$ di una sbarra elastica, fissata elasticamente nel punto $x = 0$, è sospeso un carico di massa M. Dedurre l'equazione e scrivere

le condizioni che definiscono le vibrazioni longitudinali della sbarra supponendo che essa sia soggetta, inoltre, a una forza esterna. Considerare i due casi seguenti:

a) la forza è distribuita lungo la sbarra a densità $F(x, t)$;

b) la forza è concentrata nel punto $x = x_0$ e vale $F_0(t)$.

9. Considerare il processo delle piccole vibrazioni di un gas perfetto contenuto in un tubo cilindrico. Dedurre dapprima le equazioni idrodinamiche fondamentali e dopo, supponendo adiabatico il processo, scrivere le equazioni per: 1) la densità ρ, 2) la pressione p, 3) il potenziale U della velocità delle particelle del gas, 4) la velocità v, 5) lo spostamento u delle particelle. Dare esempi di realizzazione delle condizioni al contorno di prima, seconda e terza specie per queste equazioni.

10. Dedurre le relazioni di similitudine fra i processi di vibrazioni meccaniche, acustiche ed elettriche (si veda l'Appendice VI del capitolo II).

11. Dare esempi di condizioni al contorno di prima, seconda e terza specie per le equazioni telegrafiche.

12. Considerare il problema delle vibrazioni longitudinali di una sbarra non omogenea ($k = k_1$ per $x < x_0$, $k = k_2$ per $x > x_0$). Stabilire le condizioni di coniugazione nel punto di contatto delle parti non omogenee della sbarra (per $x = x_0$).

13. Dare l'interpretazione fisica della condizione al contorno

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

14. Dare esempio di un modello meccanico per il quale sia verificata l'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

§ 2. Metodo di propagazione delle onde

1. Formula di D'Alembert. Iniziamo lo studio dei metodi di costruzione delle soluzioni dei problemi ai limiti per le equazioni di tipo iperbolico da un problema con condizioni iniziali per una corda illimitata:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Trasformiamo questa equazione in forma canonica contenente una derivata mista (si veda il capitolo I). L'equazione delle caratteristiche

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

si scinde in due equazioni

$$dx - a\,dt = 0, \quad dx + a\,dt = 0,$$

i cui integrali sono le rette

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Introducendo, come al solito, nuove variabili

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

trasformiamo l'equazione delle vibrazioni della corda come segue:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

Troviamo l'integrale generale dell'ultima equazione. È evidente che per ogni soluzione dell'equazione (3) si ha

$$u_\eta (\xi, \eta) = f^* (\eta),$$

dove $f^* (\eta)$ è una funzione della sola variabile η. Integrando questa uguaglianza rispetto a η per ξ fissata, otteniamo

$$u (\xi, \eta) = \int f^* (\eta)\, d\eta + f_1 (\xi) = f_1 (\xi) + f_2 (\eta), \tag{4}$$

dove f_1 e f_2 sono due funzioni delle sole variabili ξ ed η. Viceversa, quali che siano le funzioni f_1 e f_2, derivabili due volte, la funzione $u (\xi, \eta)$ definita dalla formula (4) rappresenta una soluzione dell'equazione (3). Poiché ogni soluzione dell'equazione (3) può essere rappresentata nella forma (4) per una scelta appropriata di f_1 e f_2, la formula (4) è l'integrale generale di questa equazione. Quindi, la funzione

$$u (x, t) = f_1 (x + at) + f_2 (x - at) \tag{5}$$

è l'integrale generale dell'equazione (1).

Supponiamo che la soluzione del problema considerato esista, allora essa è data dalla formula (5). Definiamo le funzioni f_1 e f_2 in modo tale che siano soddisfatte le condizioni iniziali

$$u (x, 0) = f_1 (x) + f_2 (x) = \varphi (x), \tag{6}$$

$$u_t (x, 0) = af_1' (x) - af_2' (x) = \psi (x). \tag{7}$$

Integrando la seconda uguaglianza, otteniamo

$$f_1 (x) - f_2 (x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \psi (\alpha)\, d\alpha + C,$$

dove x_0 e C sono costanti. Dalle uguaglianze

$$f_1 (x) + f_2 (x) = \varphi (x),$$

$$f_1 (x) - f_2 (x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \psi (\alpha)\, d\alpha + C$$

ricaviamo

$$\left.\begin{aligned} f_1 (x) &= \frac{1}{2} \varphi (x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi (\alpha)\, d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2 (x) &= \frac{1}{2} \varphi (x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi (\alpha)\, d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Abbiamo definito così le funzioni f_1 e f_2 mediante le funzioni date φ e ψ; inoltre, le uguaglianze (8) si devono verificare qualunque sia il valore dell'argomento *). Portando nella (5) i valori ottenuti di f_1 e f_2, abbiamo

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\, d\alpha\right\}$$

ossia

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (9)$$

Abbiamo ottenuto l'espressione (9), detta formula di D'Alembert, supponendo l'esistenza della soluzione del problema posto. Questa formula dimostra l'unicità della soluzione. In effetti, se esistesse una seconda soluzione del problema (1)-(2) essa sarebbe rappresentata dalla formula (9) e coinciderebbe con la prima soluzione.

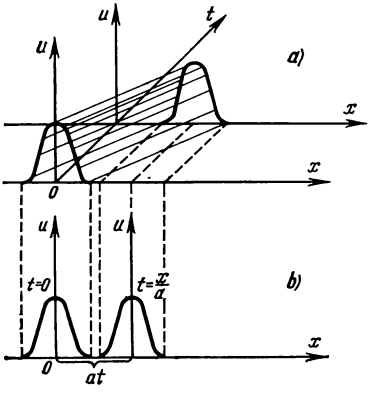


Fig. 4

È facile provare che la formula (9) verifica (nell'ipotesi che la funzione φ sia derivabile due volte e la funzione ψ una volta) l'equazione e le condizioni iniziali. In tal modo il metodo descritto dimostra sia l'unicità che l'esistenza della soluzione del problema posto.

2. Interpretazione fisica. La funzione $u(x, t)$ definita dalla formula (9) descrive il processo di propagazione della deviazione iniziale e della velocità iniziale. Se fissiamo $t = t_0$, la funzione $u(x, t_0)$ dà il profilo della corda all'istante t_0; fissando $x = x_0$, otteniamo la funzione $u(x_0, t)$ descrivente il movimento del punto x_0 (fig. 4). Supponiamo che un osservatore sito nel punto $x = 0$ all'istante $t = 0$ si muova con velocità a nella direzione positiva. Introduciamo un sistema di coordinate legato all'osservatore, ponendo $x' = x - at$ e $t' = t$. In questo sistema di coordinate mobile la funzione $u(x, t) = f(x - at)$ sarà definita dalla formula $u = f(x')$ e l'osservatore vedrà sempre lo stesso profilo

*) Le funzioni f_1 e f_2 non sono definite univocamente nella formula (5). Togliendo a f_1 e aggiungendo a f_2 una costante C_1, la funzione u non cambia. Nella formula (8) la costante C non è definita mediante φ e ψ; ciononostante si può ometterla senza cambiare il valore di u. Sommando f_1 e f_2, gli addendi $C/2$ e $-C/2$ si elidono.

che all'istante iniziale. Di conseguenza, la funzione $u(x, t) = f(x - at)$ rappresenta il profilo invariabile $f(x)$ che si sposta a destra (nella direzione positiva dell'asse x) con velocità a (un'onda propagantesi o corrente). La funzione $f(x + at)$ rappresenta, evidentemente, un'onda propagantesi a sinistra (nella direzione negativa dell'asse x) con velocità a. Quindi, la soluzione generale (9) del problema di Cauchy per una corda infinita è la sovrapposizione di due onde $f_1(x + at) + f_2(x - at)$, di cui l'una si propaga a destra con velocità a e l'altra a sinistra con la stessa velocità. In questo caso

$$f_1(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \Psi(x+at),\ f_2(x-at) =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \Psi(x-at),$$

dove

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

Per precisare la natura della soluzione (9), è comodo utilizzare il piano degli stati (x, t) o « piano delle fasi ». Le rette $x - at =$

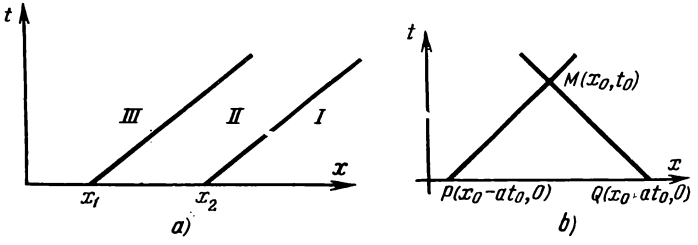


Fig. 5

$=$ costante e $x + at =$ costante sono due caratteristiche dell'equazione (1). La funzione $u = f(x - at)$ lungo la caratterisitica $x - at =$ costante conserva un valore costante, e la funzione $u = f(x + at)$ è costante lungo la caratteristica $x + at =$ costante.

Supponiamo che $f(x)$ sia non nulla soltanto nell'intervallo (x_1, x_2) e nulla all'esterno di questo intervallo. Tracciamo per i punti $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ le caratteristiche $x - at = x_1$ e $x - at = x_2$ che dividono il semipiano $(x, t > 0)$ in tre domini *I*, *II* e *III* (fig. 5, *a*). La funzione $u = f(x - at)$ è non nulla soltanto nel dominio *II* dove $x_1 < x - at < x_2$ e le caratteristiche $x - at = x_1$ e $x - at = x_2$ rappresentano i fronti anteriore e posteriore dell'onda propagantesi a destra.

Consideriamo ora un certo punto fisso (x_0, t_0) e tracciamo da esso le caratteristiche $x - at = x_0 - at_0$ e $x + at = x_0 + at_0$ che intersecano l'asse x nei punti $x_1 = x_0 - at_0$, $t = 0$ e $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$. Il valore della funzione $u = f_1(x - t) + f_2(x + at)$ nel punto (x_0, t_0) è uguale a $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, cioè è definito dai valori delle funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nei punti $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ che sono vertici del triangolo MPQ (fig. 5, *b*) formato da due caratteristiche e dall'asse x. Questa figura è detta triangolo caratteristico del punto (x_0, t_0). Dalla formula (9) è evidente che la deviazione $u(x_0, t_0)$ di un punto della corda all'istante t_0 dipende unicamente dai valori della deviazione iniziale nei vertici $P(x_0 - at_0, 0)$ e $Q(x_0 + at_0, 0)$ del triangolo caratteristico MPQ e dai valori della velocità iniziale sul lato PQ. Ciò diventa particolarmente chiaro se riscriviamo la formula (9) come segue:

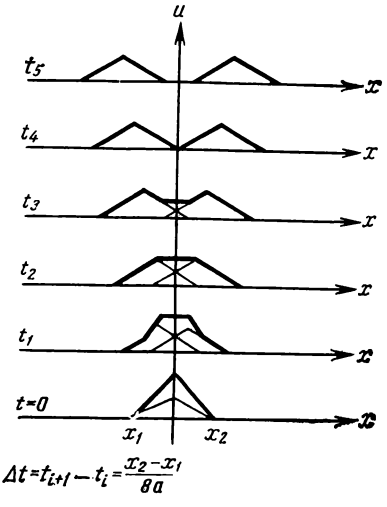


Fig. 6

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{PQ} \psi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (10)$$

I dati iniziali assegnati all'esterno di PQ non incidono sui valori di $u(x, t)$ nel punto $M(x_0, t_0)$. Se le condizioni iniziali sono assegnate non su tutta la retta infinita, bensì sul segmento P_1Q_1, esse definiscono univocamente la soluzione all'interno del triangolo caratteristico avente come base il segmento P_1Q_1.

3. Esempi. Si può rappresentare la soluzione (9) sotto forma di somma $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, dove

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \qquad (11)$$

$$u_2(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (12)$$

Se la velocità iniziale è nulla ($\psi(x) = 0$), allora la deviazione $u = u_1(x, t)$ rappresenta la somma delle onde correnti sinistra e destra; fra l'altro, la forma iniziale di ogni onda è data dalla funzione $0{,}5\varphi(x)$ uguale alla metà della deviazione iniziale. Se, invece, $\varphi(x) = 0$, allora $u = u_2(x, t)$ rappresenta la perturbazione della corda, creata dalla velocità iniziale.

Esempio 1. Consideriamo la propagazione della deviazione iniziale data sotto forma di un triangolo isoscele. Si può ottenere questo profilo iniziale tendendo la corda nel punto di mezzo dell'intervallo $[x_1, x_2]$. La fig. 6 rappresenta le posizioni successive della corda fra gli intervalli di tempo $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.

Si può ottenere una rappresentazione evidente della natura del processo di propagazione con l'ausilio del piano delle fasi

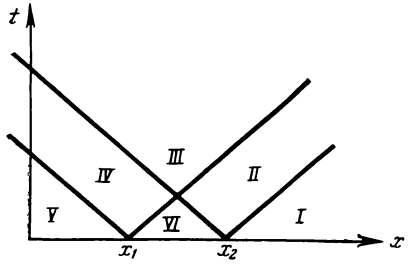


Fig. 7

(x, t). Tracciamo per i punti $P\ (x_1, 0)$ e $Q\ (x_2, 0)$ delle caratteristiche che dividano il semipiano $(-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0)$ in sei domini (fig. 7). La deviazione $u_1\ (x, t)$ in ogni punto (x, t) è data dalla formula (11). Pertanto nei domini *I*, *III* e *V* la deviazione è nulla

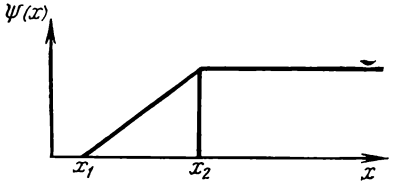


Fig. 8

in quanto il triangolo caratteristico di qualsiasi punto di questi domini non ha punti comuni con il segmento $[x_1, x_2]$ sul quale sono assegnate le condizioni iniziali. Nel dominio *II* la soluzione è l'«onda destra» $u = 0{,}5\varphi\ (x - at)$ e nel dominio *IV* l'«onda sinistra» $u = 0{,}5\varphi\ (x + at)$; la soluzione nel dominio *VI* è data dalla somma delle onde «sinistra» e «destra».

Esempio 2. La deviazione iniziale sia $\varphi(x) \equiv 0$ e la velocità iniziale sia diversa da zero soltanto sul segmento $[x_1, x_2]$, dove assume il valore costante ψ_0: $\psi\ (x) = \psi_0$ per $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $\psi\ (x) = 0$ per $x > x_2$ e $x < x_1$. In questo caso la funzione $u_2\ (x, t)$ è la soluzione. Calcoliamo la funzione $\Psi\ (x)$ considerando a tal fine $x_0 = 0$

(fig. 8):

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)\,d\alpha=\begin{cases}0 & \text{per } x<x_1,\\ (x-x_1)\,\psi_0/2a & \text{per } x_1\leqslant x\leqslant x_2,\\ (x_2-x_1)\,\psi_0/2a & \text{per } x>x_2.\end{cases}\qquad(13)$$

La soluzione $u_2(x, t)$ è la differenza fra le onde destra e sinistra di profilo $\Psi(x)$. Le posizioni successive di queste onde dopo l'intervallo di tempo $\Delta t=(x_2-x_1)/8a$ sono rappresentate nella fig. 9. Il profilo della corda per $t\geqslant 4\Delta t$ ha forma di un trapezio che si allarga uniformemente con il tempo. Se $\psi(x)$ differisce per una costante su $[x_1, x_2]$, varia soltanto il profilo $\Psi(x)$.

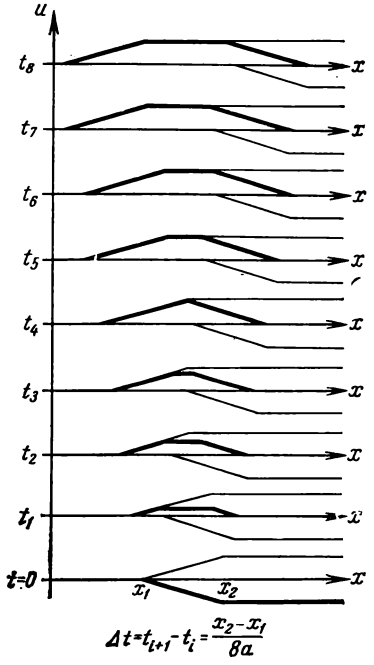


Fig. 9

Per precisare la natura della soluzione, ricorriamo al piano delle fasi (x, t) (fig. 7). Scriviamo espressioni per $u(x, t)$ in diversi domini del piano delle fasi.

Nel dominio I $(x-at>x_2)$ abbiamo $\Psi(x+at)=\Psi(x-at)=$ costante, $u(x, t)=0$.

Nel dominio V $(x+at<x_1)$ $\Psi(x-at)=\Psi(x+at)=0$, $u(x, t)=0$.

Nel dominio III $(x-at<x_1,\ x+at>x_2)$

$$\Psi(x+at)=\text{costante}=\frac{x_2-x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi(x-at)=0,\ u(x, t)=\frac{x_2-x_1}{2a}\psi_0.$$

Nel dominio II $(x_1<x-at<x_2,\ x+at>x_2)$

$$\Psi(x+at)=\frac{x_2-x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi(x-at)=\frac{x-at-x_1}{2a}\psi_0,\quad u(x, t)=\frac{x_2-(x-at)}{2a}\psi_0.$$

Nel dominio IV $(x_1<x+at<x_2,\ x-at<x_1)$:

$$\Psi(x+at)=\frac{x+at-x_1}{2a}\psi_0,\ \Psi(x-at)=0,$$

$$u(x, t)=\frac{x+at-x_1}{2a}\psi_0.$$

Nel dominio VI $(x - at > x_1, x + at < x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \; u(x, t) = t\psi_0.$$

Esempio 3. Studiamo il problema delle vibrazioni della corda per azione di un impulso concentrato. Trasmettendo all'istante iniziale ai punti della corda $(x, x + \Delta x)$ la velocità costante ψ_0 (colpendo la corda con un martellino, ad esempio), applichiamo a questo tratto un impulso I uguale alla variazione della quantità di moto per $t = 0$, in modo che $I = \rho \Delta x \psi_0$, dove ρ è la densità lineare della corda. Dobbiamo risolvere quindi il problema delle

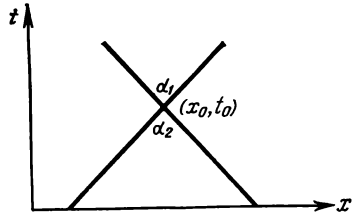


Fig. 10

vibrazioni della corda con deviazione iniziale nulla e velocità iniziale $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ sull'intervallo $(x, x + \Delta x)$, $\psi = 0$ all'esterno di questo intervallo; qui $I_0 = I/\Delta x$ è la densità dell'impulso. L'analisi della soluzione di questo problema è stata fatta sopra risolvendo l'esempio 2. La deviazione generata dall'impulso distribuito sull'intervallo $(x, x + \Delta x)$ rappresenta per $t > \Delta x/2a$ un trapezio di base inferiore $2at + \Delta x$ e superiore $2at - \Delta x$. Effettuando il passaggio al limite si ha $I_0 =$ costante per $\Delta x \to 0$, e si vede che le deviazioni saranno uguali a zero all'esterno di $(x - at, x + at)$ e a $I/2a\rho$ all'interno di questo intervallo. Si può dire convenzionalmente che queste deviazioni sono generate dall'impulso puntuale I.

Consideriamo il piano delle fasi (x, t) e tracciamo per il punto (x_0, t_0) le due caratteristiche

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(fig. 10). Esse determinano due angoli α_1 ed α_2, detti rispettivamente angolo caratteristico superiore e inferiore per il punto (x_0, t_0).

L'azione dell'impulso puntuale nel punto (x_0, t_0) implica una deviazione pari a $\frac{1}{2a} \frac{I_0}{\rho}$ all'interno dell'angolo caratteristico superiore e a zero all'esterno di esso.

4. Equazione non omogenea. Consideriamo il problema di Cauchy per un'equazione non omogenea delle vibrazioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \\ &u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$w_f(x, t; \tau)$ sia la soluzione del problema di Cauchy ausiliare

$$\frac{1}{a^2}(w_f)_{tt} = (w_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau, \tag{15}$$

$$w_f(x,\tau;\tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\tau;\tau) = f(x,\tau),$$

$$t = \tau, \quad -\infty < x < \infty. \tag{16}$$

La formula di D'Alembert dà

$$w_f(x,t;\tau) = w_f(x, t-\tau;\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{17}$$

Riscriviamo la formula di D'Alembert (9) come segue:

$$u(x,t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0) + w_\psi(x,t;0), \tag{18}$$

dove

$$w_\psi(x,t;0) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, \qquad w_\varphi(x,t;0) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi$$

sono due soluzioni del problema (15)-(16) per $\tau = 0$ e $f = \psi(x)$, $f = \varphi(x)$ rispettivamente, poiché una derivazione diretta mostra che

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0) = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

Dimostriamo la validità del seguente lemma.

La soluzione dell'equazione non omogenea (14) con dati iniziali nulli $u_t(x, 0) = 0$ e $u(x, 0) = 0$ ha la forma

$$u(x,t) = a^2\int\limits_0^t w_f(x,t;\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

Derivando la funzione (19) e tenendo conto delle condizioni iniziali per $w_f(x, t; \tau)$, troviamo

$$u_t(x, t) = a^2 w_f(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau)\, d\tau =$$

$$= a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau)\, d\tau, \tag{20}$$

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau)\, d\tau =$$

$$= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau)\, d\tau + a^2 f(x, t),$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x, t; \tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau)\, d\tau.$$

Di qui si vede che la funzione (19) verifica l'equazione (14). Dalle formule (19) e (20) deriva immediatamente quanto segue:

La soluzione del problema (14), in virtù delle (18) e (19), si può rappresentare nella forma

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0) + a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau)\, d\tau. \tag{21}$$

Utilizzando l'espressione (17) per w_f, abbiamo

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{22}$$

La sostituzione diretta della (22) nella (14) mostra che la funzione (22) rappresenta effettivamente la soluzione del problema (14) se esistono le derivate $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ e $\partial f/\partial x$.

Dalla formula (17) segue che la funzione w_f verifica l'equazione per $t = \tau$ se f è derivabile rispetto a x, vale a dire la rappresentazione (21) è possibile sotto le stesse condizioni per le quali esiste la soluzione del problema di Cauchy.

La formula (21) mostra che la soluzione del problema generale (14) può essere scritta immediatamente se esiste la soluzione del problema ausiliare (15)-(16). Una formula analoga sussiste anche per la soluzione del problema di Cauchy in uno spazio illimitato (si veda il capitolo V).

5. Stabilità delle soluzioni. La soluzione dell'equazione (1) è definita univocamente dalle condizioni iniziali (2). Dimostriamo che questa soluzione varia con continuità al variare continuo delle condizioni iniziali.

Qualunque sia l'intervallo di tempo $[0, t_0]$ *e qualunque sia il grado di precisione* ε, *esiste* $\delta(\varepsilon, t_0)$ *tale che due soluzioni qualsiasi* $u_1(x, t)$ *e* $u_2(x, t)$ *dell'equazione* (1) *differiscono nell'intervallo di tempo* t_0 *meno di* ε:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

soltanto se le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{cases}$$

differiscono meno di δ:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

La dimostrazione di questo teorema è estremamente semplice. Le funzioni $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sono legate ai loro valori iniziali dalla formula (9) in modo tale che

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} +$$

$$+ \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

da cui ricaviamo

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta \cdot 2at \leqslant \delta(1 + t_0),$$

ciò che dimostra la nostra affermazione se poniamo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}.$$

Ogni processo fisicamente determinato ed evolvente con il tempo deve essere caratterizzato da funzioni dipendenti in modo continuo dai dati iniziali. Se non sussistesse questa dipendenza continua, due processi essenzialmente distinti potrebbero corrispondere praticamente a sistemi identici di condizioni iniziali (la cui differenza risiede nei limiti della precisione della misura). Processi di questo tipo non si possono considerare determinati (fisicamente) da tali condizioni. Dal teorema precedente segue che le vibrazioni della corda sono determinate dalle condizioni iniziali non soltanto matematicamente, ma anche fisicamente.

Se la soluzione di un problema matematico dipende in modo continuo da condizioni complementari (iniziali, dati al contorno

e secondo membro dell'equazione, ossia dai dati di partenza del problema), si dice che il problema è stabile.

In relazione allo studio dei fenomeni fisicamente determinati si introduce il concetto di correttezza. Si dice che un problema matematico è posto correttamente se 1) la soluzione del problema esiste, 2) il problema ha un'unica soluzione, 3) la soluzione del problema dipende in modo continuo dai dati iniziali (stabilmente).

È da notare che nelle applicazioni spesso si incontrano problemi posti non correttamente, a questi appartengono numerosi problemi matematici ben noti.

Diamo un esempio di problema posto non correttamente, la cui soluzione è instabile.

La funzione $u\,(x,\ y)$ quale soluzione dell'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ è definita univocamente dalle sue condizioni iniziali $u\,(x,\ 0) = \varphi\,(x)$, $u_y\,(x,\ 0) = \psi\,(x)$ *). Consideriamo le funzioni $u^{(1)}\,(x,\ y) \equiv 0$ e $u^{(2)}\,(x,\ y) = \frac{1}{\lambda}\,\text{sen}\,\lambda x \cdot \text{ch}\,\lambda y$ che verificano l'equazione di Laplace. La funzione $u^{(2)}\,(x,\ y)$ dipende da λ come da un parametro. I valori iniziali

$$u^{(1)}\,(x,\ 0) = 0, \qquad u^{(2)}\,(x,\ 0) = \varphi\,(x) = \frac{1}{\lambda}\,\text{sen}\,\lambda x,$$

$$u_y^{(1)}\,(x,\ 0) = 0, \qquad u_y^{(2)}\,(x,\ 0) = \psi\,(x) = 0$$

differiscono indefinitamente poco per λ sufficientemente grande. Tuttavia, in questo caso la soluzione $u^{(2)}\,(x,\ y)$ può essere grande a piacere qualunque sia il valore fissato di y. Quindi, il problema con le condizioni iniziali per l'equazione di Laplace è formulato non correttamente.

È naturale chiedersi: possono, in generale, i problemi posti non correttamente presentare un interesse fisico? E, inoltre, che valore scientifico può presentare la soluzione approssimata di problemi posti non correttamente se a piccoli errori nelle loro condizioni possono corrispondere grossi errori nella soluzione?

Dubbi del genere sono dovuti al fatto che in quanto detto sopra è sottinteso che come soluzione approssimata del problema viene considerata la soluzione esatta corrispondente a condizioni approssimate.

Consideriamo il problema del calcolo della derivata $z\,(x) = \frac{df}{dx}$ in base a valori approssimati di $f\,(x)$. Il grado di precisione nell'assegnare $\widetilde{f}\,(x)$ e nel definire $\widetilde{z}\,(x)$ sia determinato come

$$\max\,|\,\widetilde{f}\,(x) - f\,(x)\,| \text{ e } \max\,|\,\widetilde{z}\,(x) - z\,(x)\,|.$$

*) Queste condizioni definiscono univocamente dal punto di vista matematico la soluzione dell'equazione di Laplace. Infatti, l'assegnazione di $u_y\,(x,\ 0)$ è equivalente a $v_x\,(x,\ 0)$, dove $v\,(x,\ y)$ è la funzione armonicamente coniugata a $u\,(x,\ y)$. Con ciò viene definita univocamente, a meno di una costante, una funzione analitica la cui parte reale è $u\,(x,\ y)$ (si veda il capitolo IV, § 1, n. 5).

È evidente che dal punto di vista della terminologia data sopra questo problema è instabile (posto non correttamente). Infatti, se $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta \cos \omega x$, allora $\max |\tilde{f}(x) - f(x)| = \varepsilon$ per δ piccolo. Tuttavia se avessimo considerato come valore approssimato $\tilde{z}(x)$ la derivata esatta per la funzione $\tilde{f}(x)$, allora

$$\tilde{z}'(x) = \tilde{f}'(x) - \delta\omega \operatorname{sen} \omega x \text{ e } \max |\tilde{z}(x) - z(x)| = \delta\omega;$$

per δ fissato ed ω grande $\delta\omega$ può essere un numero grande a piacere. Tuttavia è universalmente noto che come derivata approssimata si prende il rapporto incrementale $\dfrac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$ che rappresenta la derivata cercata con errore piccolo a piacere purché h e δ/h siano sufficientemente piccoli. È chiaro in questo caso che per ottenere una buona approssimazione di df/dx in base a un valore approssimato per $\tilde{f}(x)$, è necessario che l'errore δ sia sufficientemente piccolo.

Dunque, malgrado l'instabilità del problema nell'esempio considerato, si può indicare un metodo che permette di ottenere approssimazioni buone a piacere per la soluzione cercata partendo da condizioni del problema formulate con un'approssimazione sufficientemente buona.

Questa situazione è tipica di numerosi problemi posti non correttamente *).

Problemi posti non correttamente spesso si incontrano in fisica studiando oggetti inaccessibili all'indagine diretta (misurazione). In questi casi si devono trarre delle conclusioni relative alle caratteristiche « z » di tali oggetti in base a loro manifestazioni « u » indirette (fisicamente determinate) accessibili a misurazioni sperimentali e legate a « z » da una dipendenza funzionale della forma $A_z = u$. Come risultato abbiamo a che fare con il problema dell'elaborazione delle osservazioni, che è il problema inverso e consiste nel definire le caratteristiche « z » degli oggetti in base ai dati sperimentali « u ». Molti di questi problemi sono posti non correttamente. In particolare, il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace sopra considerato si riferisce direttamente al problema gravimetrico inverso (sulla determinazione della forma di un corpo in base all'anomalia della forza di gravità creata da questo corpo). L'esempio di calcolo della derivata in base a valori approssimati della funzione, che abbiamo sopra considerato, è tipico di numerosi esperimenti in cui le misurazioni sono basate sul principio di accumulazione dei dati.

Notiamo ora la seguente circostanza. È evidente che la funzione $u(x, t)$ definita dalla formula (9) può essere soluzione dell'equazione (1) solo nel caso in cui la funzione $\psi(x)$ sia derivabile e la funzione $\varphi(x)$ lo sia due volte. Da quanto detto è chiaro che le funzioni rappresentate nelle figg. 11 e 12 non possono essere soluzioni dell'equazione (1) in quanto non dappertutto sono derivabili due volte. Per di più, si può affermare che non esiste una soluzione dell'equazione delle vibrazioni, soddisfacente alle condizioni (2), se le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ non hanno le derivate necessarie. Infatti, riprendendo i ragionamenti che ci hanno con-

*) M. M. Lavrentjev, *Su problemi non corretti in fisica matematica*, Novosibirsk, 1962 (ed. russa); A. N. Tichonov, *Soluzione di problemi posti non correttamente e metodo di regolarizzazione*, in DAN (Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS) **151**, n. 3, 501-504 (1963); *Sulla regolarizzazione di problemi posti non correttamente*, DAN **153**, n. 1, 45-52 (1963); *Su equazioni non lineari di prima specie*, DAN **161**, n. 5, 1023-1027 (1965).

dotto alla formula (9), possiamo affermare che se esiste una soluzione dell'equazione delle vibrazioni, deve essere rappresentata dalla formula (9). Se, invece, le funzioni φ e ψ non sono derivabili un numero sufficiente di volte, allora la formula (9) definisce una funzione che non verifica l'equazione (1), vale a dire la soluzione del problema non esiste.

Tuttavia, se le condizioni iniziali sono modificate un po', sostituendole con le funzioni derivabili $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, allora a queste funzioni iniziali corrisponderà già una soluzione dell'equazione (1). Osserviamo, inoltre, che, dimostrando il teorema pre-

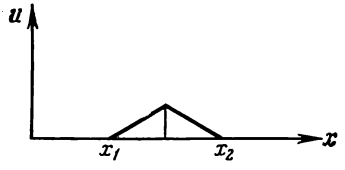


Fig. 11

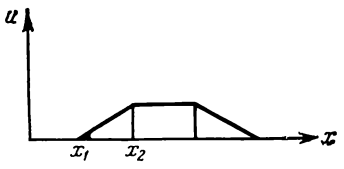


Fig. 12

cedente, abbiamo già stabilito che le funzioni definite dalla formula (9) dipendono in modo continuo dalle funzioni iniziali φ e ψ (siano queste funzioni derivabili o meno). Quindi, se a certe funzioni φ, ψ non corrisponde una soluzione dell'equazione delle vibrazioni, soddisfacente alle condizioni (2), allora la funzione definita dalla formula (9) è il limite cui tendono le soluzioni dell'equazione delle vibrazioni con condizioni iniziali alquanto « smussate ».

Le funzioni ottenute con questo passaggio al limite sono dette soluzioni generalizzate. Questo concetto di soluzione generalizzata, introdotto da S. L. Sobolev *), gioca un ruolo importante in fisica.

6. Retta semilimitata e metodo dei prolungamenti. Consideriamo il problema della propagazione di onde sulla retta semilimitata $x \geqslant 0$. Questo problema è particolarmente importante per lo studio dei processi di riflessione delle onde dall'estremo e viene posto nei termini seguenti:

trovare la soluzione dell'equazione delle vibrazioni

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \text{per} \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

che soddisfa alla condizione al contorno

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (\text{oppure } u_x(0, t) = \nu(t)) \quad (t \geqslant 0)$$

*) In dettaglio si veda S. L. Sobolev, *Equazioni della fisica matematica*, Gostechizdat, 1954 (ed. russa), e anche I. G. Petrovskij, *Lezioni sulle equazioni alle derivate parziali*, Fizmatgis, 1961 (ed. russa).

e alle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Consideriamo dapprima il caso della condizione al contorno omogenea

$$u(0, t) = 0 \quad \text{(oppure } u_x(0, t) = 0),$$

cioè il problema della propagazione della perturbazione iniziale sulla corda di estremo fissato $x = 0$ (o di estremo libero).

Consideriamo i seguenti due lemmi sulle proprietà delle soluzioni delle equazioni delle vibrazioni definite su una retta illimitata.

1. *Se i dati iniziali nel problema della propagazione delle vibrazioni sulla retta illimitata (il problema* (1)-(2)) *sono funzioni dispari rispetto a un punto* x_0, *la soluzione corrispondente in questo punto* x_0 *è nulla.*

2. *Se i dati iniziali nel problema della propagazione delle vibrazioni sulla retta illimitata (il problema* (1)-(2)) *sono funzioni pari rispetto a un punto* x_0, *la derivata rispetto a x della soluzione corrispondente in questo punto è nulla.*

Dimostriamo il lemma 1. Consideriamo x_0 come origine delle coordinate, $x_0 = 0$. In questo caso le condizioni di disparità dei dati iniziali si scrivono sotto la forma

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

La funzione $u(x, t)$, definita dalla formula (9), per $x = 0$ e $t > 0$ vale

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

poiché il primo termine è nullo in virtù della disparità di $\varphi(x)$, e il secondo termine è nullo in quanto l'integrale di una funzione dispari fra limiti simmetrici rispetto all'origine delle coordinate è sempre nullo.

Analogamente si dimostra il lemma 2. Le condizioni di parità dei dati iniziali hanno la forma

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

Osserviamo che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Dalla formula (9) segue che

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

poiché il primo termine è nullo in virtù della disparità di $\varphi'(x)$ e il secondo in virtù della parità di $\psi(x)$ *).

Infatti, la dimostrazione data sopra si fonda sulla formula di D'Alembert e non è legata alla doppia derivabilità della funzione $u(x, t)$. Con ciò abbiamo dimostrato che il lemma 1 è valido per funzioni qualsiasi rappresentabili dalla formula di D'Alembert, e il lemma 2 per funzioni della stessa forma con funzione derivabile $\psi(x)$, cioè per le soluzioni generalizzate del problema (1)-(2).

Questi due lemmi permettono di risolvere i seguenti problemi:

trovare la soluzione dell'equazione (1), *che soddisfa alle condizioni iniziali*

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < \infty, \tag{2'}$$

e alla condizione al contorno

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

(primo problema ai limiti).

Consideriamo le funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ rappresentanti il prolungamento dispari di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ che figurano nelle condizioni (2'):

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{per } x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{per } x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

La funzione

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha$$

è definita per ogni x e $t > 0$. In virtù del lemma 1 abbiamo

$$u(0, t) = 0.$$

Inoltre, questa funzione soddisfa per $t = 0$ e $x > 0$ alle condizioni iniziali seguenti:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad x > 0.$$

*) Questi due lemmi sono conseguenza della seguente proposizione: se le condizioni iniziali sono pari (o dispari) allora per $t > 0$ la funzione $u(x, t)$ definita dalla formula di D'Alembert gode della stessa proprietà (lasciamo al lettore la dimostrazione di questo fatto). Geometricamente è evidente che una funzione continua dispari e la derivata di una funzione derivabile pari sono nulle per $x = 0$.

Quindi, considerando la funzione ottenuta $u(x, t)$ soltanto per $x \geqslant 0$ e $t \geqslant 0$, otterremo una funzione soddisfacente a tutte le condizioni del problema posto.

Tornando alle funzioni precedenti si può scrivere

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \\ + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{per} \quad t < \dfrac{x}{a}, \quad x > 0 \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \\ + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{per} \quad t > \dfrac{x}{a}, \quad x > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Nel dominio $t < x/a$ l'influenza delle condizioni al contorno non si sente e l'espressione per $u(x, t)$ coincide con la soluzione (9) per la retta infinita.

Analogamente, se per $x = 0$ si ha l'*estremo libero*

$$u_x(0, t) = 0,$$

allora, considerando il prolungamento pari delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per} \quad x > 0, \\ \varphi(-x) & \text{per} \quad x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{per} \quad x > 0, \\ \psi(-x) & \text{per} \quad x < 0, \end{cases}$$

otteniamo la soluzione dell'equazione delle vibrazioni

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha$$

ossia

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{per} \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \\ + \dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_{0}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha + \int_{0}^{at-x} \psi(\alpha)\, d\alpha\right\} \quad \text{per} \quad t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

che soddisfano nel dominio $x \geqslant 0$ alle condizioni iniziali (2) e alla condizione al contorno $u_x(0, t) = 0$.

Nel seguito, nel risolvere vari problemi, spesso avremo bisogno del metodo del prolungamento a un dominio infinito di condizioni iniziali date in una zona di questo dominio.

Pertanto formuliamo ancora una volta i risultati ottenuti sotto forma delle due seguenti regole.

Per risolvere un problema su una retta semilimitata con la condizione al contorno $u\ (0,\ t) = 0$, *occorre prolungare le condizioni iniziali a tutta la retta in modo dispari.*

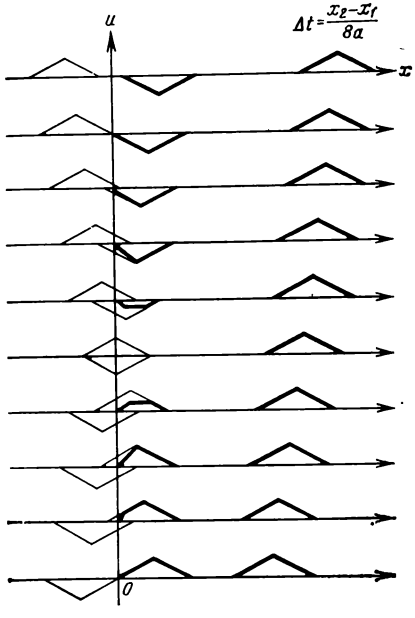


Fig. 13

Per risolvere un problema su una retta semilimitata con la condizione al contorno $u_x\ (0, t) = 0$, *occorre prolungare le condizioni iniziali a tutta la retta in modo pari.*

Consideriamo due esempi. Le condizioni iniziali su una retta semilimitata, fissata in $x = 0$, siano non nulle soltanto nell'intervallo $(a,\ b)$, $0 < a < b$ nel quale la deviazione iniziale data dalla funzione $\varphi\ (x)$ è rappresentata da un triangolo isoscele, e $\psi\ (x) = 0$. La soluzione di questo problema sarà ottenuta se le condizioni iniziali verranno prolungate in modo dispari alla retta infinita. Il processo di propagazione delle onde è rappresentato nella fig. 13. Dapprima la propagazione prosegue come sulla retta infinita. La deviazione data si divide in due onde propagantisi in direzioni opposte a velocità costante, e questo processo continua finché la semionda propagantesi a sinistra non arriva al punto $x = 0$ (fig. 13). A quest'istante, a sinistra ($x \leqslant 0$) dove si verificavano processi analoghi, al punto $x = 0$ arriva un'altra semionda di «fase inversa». Negli istanti successivi si produce la riflessione della semionda dall'estremo fissato, ciò viene rappresentato in dettaglio nella fig. 13. Il profilo dell'onda riflessa si accorcia, le deviazioni scompaiono per comparire in seguito con segno contrario e, infine, la semionda riflessa seguirà alla stessa velocità l'onda andata a destra. In tal modo, per riflessione dell'onda dall'estremo fissato la sua deviazione cambia di segno.

Consideriamo un altro esempio. Sulla semiretta $x \geqslant 0$, fissata in $x = 0$, la deviazione iniziale sia dappertutto nulla e la

velocità iniziale $\psi(x)$ diversa da zero soltanto nell'intervallo (x_1, x_2) $(0 < x_1 < x_2)$; inoltre, sia $\psi(x) =$ costante. Prolunghiamo in modo dispari i dati iniziali. Da ogni intervallo (x_1, x_2) e $(-x_1, -x_2)$ si propagano deviazioni simili a quelle rappresentate nella fig. 14. Come si vede da questa figura, nello stadio iniziale nel dominio $x > 0$ il processo avviene come sulla retta infinita. In seguito si produce una riflessione dall'estremo fissato e, infine, l'onda dal profilo di trapezio isoscele si muove a destra a velocità costante.

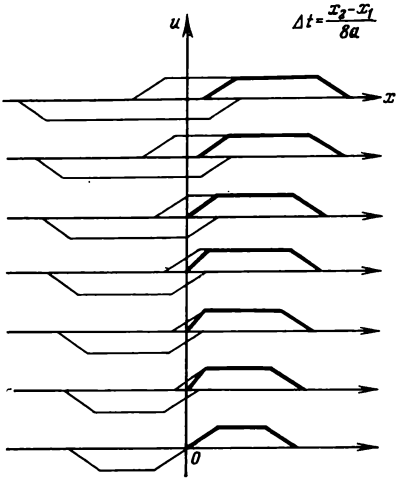


Fig. 14

Lo studio della riflessione dall'estremo libero è analogo, ma i dati iniziali devono essere prolungati in modo pari, cosicché la riflessione dell'onda dall'estremo libero si produrrà con la stessa fase non cambiata.

Abbiamo considerato i problemi con le condizioni al contorno omogenee

$$u(0, t) = \mu(t) = 0$$

ossia

$$u_x(0, t) = \nu(t) = 0.$$

Nel caso generale di condizioni al contorno non omogenee la soluzione si presenta sotto forma di somma cui ogni termine soddisfa soltanto a una delle condizioni assegnate (ora al contorno, ora iniziale).

Passiamo ora alla soluzione dell'equazione con condizioni iniziali nulle e condizione al contorno assegnata

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0,$$

$$\bar{u}(0, t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

È evidente che il regime dato al contorno produrrà un'onda propagantesi lungo la corda a destra con velocità a, ciò che ci suggerisce una forma analitica della soluzione:

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

Definiamo la funzione f in base alla condizione al contorno

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

da cui

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right)$$

cosicché

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Tuttavia questa funzione è definita soltanto nel dominio $x - at \leqslant 0$, poiché $\mu(t)$ è definita per $t \geqslant 0$. Nella fig. 15 questo

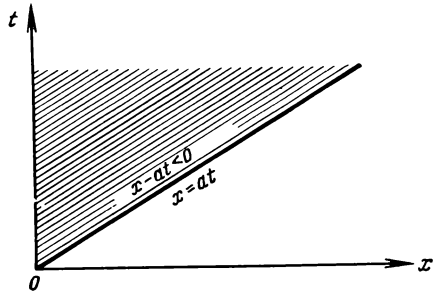


Fig. 15

dominio è rappresentato dalla parte tratteggiata del piano delle fasi.

Per trovare $\bar{u}(x, t)$ per tutti i valori degli argomenti, prolunghiamo la funzione $\mu(t)$ ai valori negativi di t ponendo $\mu(t) = 0$ per $t < 0$. Allora la funzione

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

verrà definita per tutti i valori degli argomenti e soddisferà alle condizioni iniziali nulle.

La somma di questa funzione e della funzione (23) definita sopra dà la soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione delle vibrazioni. Per una corda semilimitata abbiamo

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \\ \quad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{per} \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \\ \quad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{per} \quad t > \dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{24}$$

Analogamente può essere costruita la soluzione del secondo problema ai limiti. Quanto al terzo problema ai limiti, si veda il n. 9 alla pag. 78.

Qui ci limiteremo alla soluzione del problema ai limiti per l'equazione omogenea delle vibrazioni.

Per la soluzione dell'equazione non omogenea si veda il n. 9.

7. Problemi per un segmento limitato. Consideriamo problemi ai limiti per un segmento limitato $(0, l)$. Cercheremo la soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

che soddisfa alle condizioni al contorno

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0$$

e alle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Consideriamo preliminarmente il caso delle condizioni al contorno omogenee

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

In questo caso cercheremo la soluzione del problema applicando il metodo del prolungamento e supponendo che sia possibile la seguente rappresentazione

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha,$$

dove Φ e Ψ sono due funzioni da definire. Le condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

determinano i valori di Φ e Ψ nell'intervallo $(0, l)$.

Per verificare le condizioni iniziali nulle, chiediamo che le funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ siano dispari rispetto ai punti $x = 0$ e $x = l$:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$

$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

Confrontando queste uguaglianze otteniamo

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

e analogamente per $\Psi(x)$, cioè Φ e Ψ sono funzioni periodiche di periodo $2l$.

È facile vedere che le condizioni di disparità rispetto all'origine delle coordinate e le condizioni di periodicità definiscono il

prolungamento di $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ a tutta la retta $-\infty < x < \infty$. Sostituendole nella formula (9), otteniamo la soluzione del problema.

Nella fig. 16 sono abbinati il piano delle fasi (x, t) e il piano (x, u) in cui è data la deviazione iniziale e il suo prolungamento. Nel piano delle fasi sono tratteggiate delle bande all'interno delle quali la deviazione è diversa da zero (si veda la fig. 7). I segni positivo e negativo dati in questi poli indicano il segno (fase) della deviazione (in forma di triangolo isoscele). In base a questo disegno è facile immaginare il profilo della deviazione

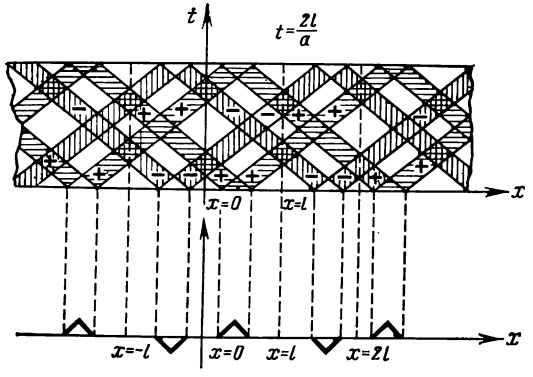


Fig. 16

in qualsiasi istante t. Così, all'istante $t = 2l/a$ otteniamo deviazioni coincidenti con quella iniziale. In tal modo, la funzione $u(x, t)$ sarà funzione periodica di t di periodo $T = 2l/a$ (si veda la pag. 95).

Consideriamo ora il problema della propagazione del regime al contorno. Cercheremo la soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

con le condizioni iniziali nulle

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

e le condizioni al contorno

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad t > 0.$$

Dai risultati del n. 6 deriva che per $t < l/a$ la soluzione è

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{dove} \quad \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Tuttavia questa funzione non soddisfa alla condizione al contorno $u(l, t) = 0$ per $t > l/a$.

Consideriamo l'onda « riflessa » propagantesi a sinistra e avente per $x = l$ una deviazione uguale a $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$. La sua espressione analitica è data dalla formula

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

È facile provare che la differenza di due onde

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

è la soluzione dell'equazione per $t < 2l/a$.

Continuando questo processo, otterremo la soluzione in forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right), \qquad (25)$$

contenente (per ogni t fissato) soltanto un numero finito di termini non nulli poiché con ogni nuova riflessione l'argomento diminuisce di $2l/a$ e la funzione $\bar{\mu}(t)$ è nulla per $t < 0$. La verifica delle condizioni al contorno è immediata. Poniamo infatti $x = 0$ e stacchiamo dalla prima somma il primo termine per $n = 0$, uguale a $\mu(t)$. Gli altri termini della prima e seconda somma, corrispondenti agli stessi n, si elidono; ciò mostra che $u(0, t) = \mu(t)$.

Sostituendo n con $n - 1$ e cambiando quindi i limiti della sommatoria, trasformiamo la somma come segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a}\right).$$

Ponendo ora $x = l$, vediamo immediatamente che i termini della prima e seconda somma si elidono *).

La formula (25) ha un significato fisico semplice. La funzione

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

rappresenta un'onda eccitata dal regime al contorno per $x = 0$, a prescindere dall'influenza esercitata dall'estremo $x = l$, come se la corda fosse infinita ($0 < x < \infty$). I termini seguenti rappre-

*) Le condizioni iniziali si verificano anch'esse direttamente poiché gli argomenti di tutte le funzioni sono negativi per $t = 0$ e l'espressione (25) è nulla per $t = 0$.

sentano le riflessioni successive dall'estremo fissato $x = l$ (la seconda somma) e dall'estremo $x = 0$ (la prima somma).

Analogamente, la funzione

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{(2n+1)\,l}{a} + \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{(2n+1)\,l}{a} - \frac{x}{a}\right)$$

fornisce la soluzione dell'equazione omogenea con le condizioni iniziali nulle $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ e le condizioni al contorno $u(0, t) = 0$ e $u(l, t) = \mu(t)$. Non ci soffermiamo sulla dimostrazione dell'unicità del problema considerato e della dipendenza continua della soluzione dalle condizioni iniziale e al contorno.

8. Dispersione delle onde. L'equazione delle vibrazioni della corda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ammette soluzione in forma di onda corrente $u = f(x \pm at)$ di natura qualsiasi. L'equazione generale di tipo iperbolico a coefficienti costanti

$$\bar{u}_{tt} - a^2 \bar{u}_{xx} + b_1 \bar{u}_t + b_2 \bar{u}_x + \bar{c}\bar{u} = 0 \tag{26}$$

mediante la sostituzione $\bar{u} = ue^{\lambda x + \mu t}$ introdotta nel capitolo I, dove $\mu = -0{,}5b_1$, $\lambda = -0{,}5b_2/a^2$, si riduce all'equazione

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0, \tag{27}$$

dove $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. Mostriamo che l'equazione (27) non ammette soluzioni in forma di onda corrente arbitraria per $c \neq 0$. Infatti, sostituendo nella (27) $u = f(x - at)$, troviamo $a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0$, da cui, essendo f arbitraria, segue $c = 0$.

Un impulso o segnale di forma arbitraria può essere rappresentato mediante lo sviluppo in integrale di Fourier come sovrapposizione di onde armoniche della forma

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

dove ω è la frequenza, $k = 2\pi/\lambda$ il numero d'onda e λ la lunghezza d'onda.

La velocità con la quale la fase dell'onda $\alpha = \omega t - kx$ si propaga nello spazio è detta velocità di fase e vale, evidentemente, $v = \omega/k$. Se la velocità di fase di un'onda armonica dipende dalla frequenza, allora si ha a che fare con una dispersione di onde. In questo caso le componenti armoniche del segnale si spostano l'una rispetto all'altra per cui il profilo del segnale si deforma.

È evidente che se l'equazione non ammette soluzioni in forma di onde arbitrarie, la velocità di fase dell'onda armonica dipende dalla frequenza, cioè si ha dispersione.

Mostriamo che per l'equazione (27) si ha dispersione per $c \neq 0$. Sostituendo nella (27) $u = e^{i(\omega t - kx)}$, otteniamo l'equa-

zione

$$\omega^2 - a^2k^2 + c = 0$$

che stabilisce un legame fra ω e k. Di qui risulta che la velocità di fase

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}}\, a$$

dipende dalla frequenza. Sotto la condizione $c = 0$, cioè per l'equazione delle vibrazioni della corda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $v = a$ è indipendente dalla frequenza e non esiste dispersione. La condizione $c = 0$ è detta anche condizione di assenza della deformazione.

A titolo di esempio consideriamo l'equazione telegrafica (si veda il § 1, n. 4)

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + LG)\, i_t + GRi.$$

Ponendo $i = ue^{-\mu t}$, dove $\mu = 0{,}5\,(CR + GL)/CL$, otteniamo per u l'equazione

$$u_{xx} = CLu_{tt} + \bar{c}u,$$

dove $\bar{c} = -(CR - LG)^2/4CL$. Di qui si vede che per $CR \neq LG$ il segnale si propaga nel cavo con deformazione, cosicché si ha dispersione delle onde. La condizione

$$CR = LG \quad \text{o} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

si dice condizione di mancanza di deformazione nella linea. In questo caso l'equazione telegrafica ammette soluzione sotto forma di onda smorzante

$$i\,(x, t) = e^{-\gamma t} f\,(x - at), \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

dove f è una funzione qualsiasi.

La mancanza di deformazione delle onde propagantisi nel cavo ha un'importanza particolare per il collegamento telefonico e telegrafico a grandi distanze.

9. Equazione integrale delle vibrazioni. Nel dedurre l'equazione differenziale delle vibrazioni (5) nel § 1, siamo partiti dalla legge di conservazione della quantità di moto la quale ci ha condotto all'equazione delle vibrazioni nella forma integrale (3). Per passare dall'equazione integrale a quella differenziale, abbiamo supposto che la funzione $u\,(x, t)$ avesse le derivate seconde. Ogni supposizione che restringe la classe delle funzioni considerate con una certa proprietà significa la rinuncia allo studio delle funzioni che non godono della proprietà considerata. Quindi, passando dall'equazione integrale delle vibrazioni a quella differenziale, escludiamo dall'esame le vibrazioni non soddisfacenti alla condizione di doppia derivabilità.

Mostriamo che si può sviluppare tutta la teoria nella classe delle funzioni continue, derivabili a tratti, partendo dall'equazione integrale delle

vibrazioni

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_1}\right]\rho\, d\xi=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2}-\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1}\right]d\tau+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}F\, d\xi\, d\tau. \tag{28}$$

A questa equazione si può conferire la seguente forma. Consideriamo nel piano (x, t) il dominio G delimitato dalla curva C derivabile a tratti, e mostriamo che per questo dominio ha luogo la relazione integrale seguente:

$$\int_C\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+k\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right)+\int_G\int F\,dx\,dt=0. \tag{29}$$

Per un mezzo omogeneo questa formula diventa

$$\int_C\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right)+\int_G\int f\,dx\,dt=0\qquad\left(f=\frac{F}{\rho}\right). \tag{29'}$$

Se la curva C rappresenta il contorno di un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati, la formula (29) coincide con la (28). Se la curva C è composta di tratti paralleli agli assi, si può rappresentare il dominio G come somma di rettangoli. Sommando gli integrali curvilinei corrispondenti ai singoli addendi, otteniamo che gli addendi relativi alle frontiere interne si elidono poiché si integra in direzioni opposte, e gli addendi rimanenti danno la formula (29).

Supponiamo, inoltre, che la curva C contenga gli archi $\overline{C}$ non paralleli agli assi e non rappresentanti linee di discontinuità della funzione integranda. Consideriamo una rete di lati paralleli agli assi coordinati ed esaminiamo le sue celle intersecantisi con il dominio G. Indichiamo con G^* l'insieme di queste celle e con C^* la frontiera del dominio G^*. La formula (29) è applicabile a G^*. Passando al limite per dimensioni decrescenti della rete, è facile convincersi della validità della formula (29) per la curva limite C.

Infatti, il primo termine della somma (29), applicata al dominio G^* è composto di addendi della forma

$$\int_{\overline{C}_n}\Phi(x, t)\,dx\quad\text{o}\quad\int_{\overline{C}_n}\Phi(x, t)\,dt,$$

dove $\Phi(x, t)$ è una funzione continua e $\overline{C}_n$ è l'arco del contorno C^* approssimante l'arco $\overline{C}$ (fig. 17).

Sia $t=t_n(x)$ l'equazione della curva $\overline{C}_n$ e $t=t(x)$ l'equazione della curva $\overline{C}$. È evidente che $t_n(x)$ è convergente uniformemente a $t(x)$ e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\Phi[x, t_n(x)]\,dx=\int_a^b\Phi[x, t(x)]\,dx,$$

ciò che dimostra la legittimità del passaggio al limite *).

Se la curva C contiene archi che sono curve di discontinuità della funzione integranda, la formula (29) conserva valore. considerando come valori

*) Poiché $dx=0$ sui tratti verticali della spezzata $\overline{C}_n$, in questa formula $t=t_n(x)$ è l'equazione dei tratti orizzontali della curva C_n.

della funzione integranda i suoi valori limite appartenenti all'interno del dominio G. Così abbiamo dimostrato la validità della formula integrale (29).

Consideriamo il seguente problema:

trovare una funzione $u(x, t)$ definita e liscia a tratti nel dominio $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, soddisfacente all'equazione

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt \right) + \iint_G f(x, t)\, dx\, dt = 0 \qquad (29')$$

e alle condizioni iniziali

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione liscia a tratti e $\psi(x)$ e $f(x, t)$ sono funzioni continue a tratti. Qui C è un contorno liscio a tratti sito nel dominio $t \geqslant 0$. Mostriamo che questo problema ha una sola soluzione definita dalla formula di D'Alembert.

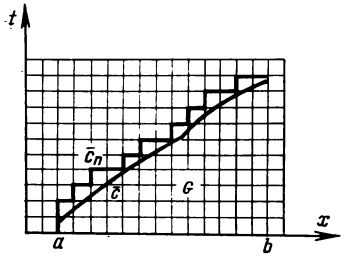


Fig. 17

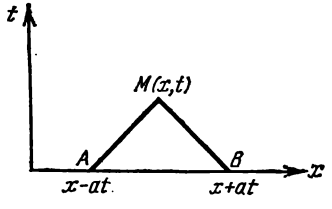


Fig. 18

Ammettiamo che la funzione $u(x, t)$ rappresenti una soluzione del problema in esame. Consideriamo il triangolo ABM (fig. 18) con un lato sull'asse $t = 0$, vertice nel punto $M(x, t)$ e lati che sono segmenti delle caratteristiche $x - at =$ costante e $x + at =$ costante, ed applichiamo ad esso la formula (29'). Lungo il segmento AM vale l'uguaglianza $\frac{dx}{dt} = a$, di modo che

$$\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = a \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx \right) = a\, du.$$

Lungo il segmento MB vale l'uguaglianza $\frac{dx}{dt} = -a$, di modo che

$$\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = -a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -a\, du.$$

Vuol dire che l'espressione integranda lungo le caratteristiche è il differenziale totale. Integrando lungo i segmenti BM e MA, otteniamo

$$\int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt \right) = -a\, [u(M) - u(B)],$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt \right) = a\, [u(A) - u(M)],$$

di modo che la formula integrale (29′) diventa

$$u(M)=\frac{u(B)+u(A)}{2}+\frac{1}{2a}\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}\,dx+\frac{1}{2a}\iint_{ABM} f\,dx\,dt$$

ossia

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi. \qquad (30)$$

Quindi, se la soluzione del problema posto esiste, essa viene definita univocamente dai suoi valori iniziali. Nel caso dell'equazione omogenea ($f = 0$), questa formula coincide con quella di D'Alembert. Ne deriva il teorema di unicità per il problema considerato.

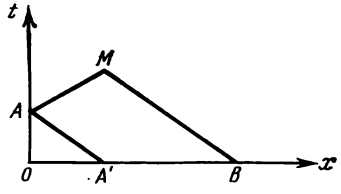


Fig. 19

È facile provare con una sostituzione diretta che una funzione della forma

$$u(x,\ t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi,\tau)\,d\xi,$$

dove f_1 e f_2 sono due funzioni lisce a tratti e f_3 è una funzione continua a tratti, verifica l'equazione (28) e, quindi, l'equazione (29′). Ciò dimostra il teorema di esistenza. Le soluzioni dei problemi considerati nel n. 3 a titolo di esempio sono funzioni lisce a tratti e sono comprese nella teoria esposta.

Torniamo ora al primo problema ai limiti su una semiretta. Cercheremo la soluzione dell'equazione (29) in un certo punto $M(x,\ t)$ per il quale $t < x/a$ (fig. 19), poiché nel dominio $t < x/a$ (sotto la caratteristica $x = at$) il regime al contorno non produce alcuna influenza e la soluzione è data dalla formula (30). Applichiamo la formula (29′) al quadrangolo $MAA'B$ in cui MA, MB e AA' sono segmenti delle caratteristiche. Integrando lungo le caratteristiche MA, AA' e BM, otteniamo

$$2au(M)=2au(A)+ax(B)-au(A')+\int_{A'}^{B}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+\iint_{MAA'B} f\,dx\,dt.$$

Sostituendo le coordinate dei punti M, A, B e A', avremo

$$u(x,\ t)=u\left(0,\ t-\frac{x}{a}\right)+\frac{u(x+at,\ 0)-u(at-x,\ 0)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}dx+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi,$$

ossia

$$u(x,\ t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi \quad \left(t > \frac{x}{a}\right). \tag{31}$$

Dalla (31) discende immediatamente l'unicità della soluzione del problema considerato.

Per $f = 0$ questa formula, come è facile notare, coincide con la formula (24) del § 2, n. 6. Analogamente si studia anche il secondo problema ai limiti e il problema per un segmento limitato.

Studiando il primo problema ai limiti, abbiamo visto che l'assegnazione di due condizioni iniziali

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,\ 0) = \psi(x)$$

e di una condizione al contorno

$$u(0,\ t) = \mu(t)$$

è sufficiente affinché la soluzione sia completamente definita. Ne segue che deve esistere una relazione fra le funzioni φ, ψ, μ e ν, dove $\nu(t) = u_x(0, t)$. Derivando la formula (31) rispetto a x e ponendovi $x = 0$, otteniamo

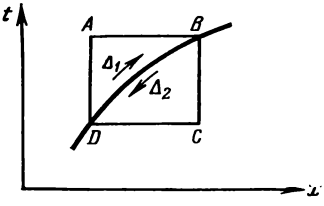


Fig. 20

$$\nu(t) = \frac{1}{a}\{\psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(al)]\}, \tag{32}$$

dove per semplicità è posto $f = 0$. La formula (32) permette di ridurre, ad esempio, il terzo problema ai limiti al primo.

10. Distribuzione delle discontinuità lungo le caratteristiche. Passiamo allo studio delle discontinuità nelle derivate delle soluzioni dell'equazione (29). Mostriamo che le curve di discontinuità nelle derivate delle funzioni $u(x, t)$, soddisfacenti all'equazione (29), possono essere soltanto le curve appartenenti alla famiglia di caratteristiche

$$x - at = \text{costante}, \qquad x + at = \text{costante}.$$

In effetti, una curva derivabile e definita dall'equazione

$$x = x(t)$$

sia la curva di discontinuità per le derivate della funzione continua liscia a tratti $u(x, t)$. Per fissare le idee, supponiamo che $x(t)$ sia una funzione crescente. Applichiamo la formula (29′) al rettangolo $ABCD$ (fig. 20):

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) = 0.$$

e anche ai triangoli curvilinei $\Delta_1 = BAD$ e $\Delta_2 = BDC$:

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 dt = 0,$$

$$\int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 dt = 0,$$

dove la parentesi $(\ )_{1,2}$ indica che i valori limite vanno calcolati all'interno dei triangoli Δ_1 e Δ_2. Sottraendo dalla somma delle due ultime uguaglianze la precedente, otteniamo

$$\int_{DB}^{*} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 \right\} dt = 0$$

ossia, essendo l'arco DB piccolo a piacere,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] x' + a^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \tag{33}$$

dove, come al solito, la parentesi quadra indica il valore della discontinuità della funzione

$$[f] = f_2 - f_1.$$

Calcoliamo la derivata rispetto a t del valore della funzione $u\ (x,\ t)$ lungo la curva di discontinuità delle derivate

$$\frac{d}{dt}\, u\ (x\ (t),\ t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i x' + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i \quad (i = 1,\ 2),$$

dove i valori limite di Δ_1 e Δ_2 si possono considerare quali valori delle derivate. La differenza fra i secondi membri per $i = 1$ e $i = 2$ dà

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + x' \left[\frac{\partial u}{dx} \right] = 0.$$

Confrontando quest'ultima uguaglianza con la (33) e supponendo che perlomeno una delle discontinuità $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$, $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$ sia non nulla, vediamo che

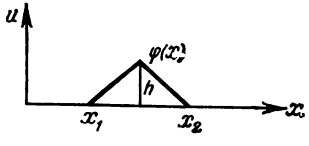


Fig. 21

queste uguaglianze sono possibili contemporaneamente se il determinante di questo sistema è nullo

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0$$

ossia

$$x = \pm at + \text{costante}.$$

In tal modo le curve di discontinuità per le derivate della soluzione dell'equazione delle vibrazioni sono caratteristiche.

Problemi

1. Tracciare il profilo della corda per diversi istanti nei casi seguenti:

I. *Corda illimitata* $(-\infty < x < \infty)$.

a) la velocità iniziale è nulla $(\psi\ (x) = 0)$ e il profilo iniziale della corda è dato sotto la forma della fig. 21;

b) la deviazione iniziale è nulla, mentre la velocità iniziale ha un valore costante $u_t\ (x,\ 0) = \psi_0$ sul segmento di corda $(x_1,\ x_2)$ e nulla all'esterno di questo segmento;

c) le condizioni iniziali hanno la forma

$$\varphi(x)=0, \quad \psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{per} \quad x<c, \\ \dfrac{h}{2c^2}\,x\,(2c-x) & \text{per} \quad c<x<2c, \\ 0 & \text{per} \quad x>2c, \end{cases}$$

II. *Curva semilimitata* ($0 \leqslant x < \infty$).

d) la velocità iniziale è nulla ($\psi(x) = 0$) e la deviazione iniziale è data in forma di triangolo rappresentato nella fig. 21. L'estremo della corda è fissato;

e) il problema precedente con l'estremo libero $x = 0$;

f) le condizioni iniziali hanno la forma

$$\varphi(x)=0, \quad \psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0<x<c, \\ \psi_0=\text{costante} & \text{per} \quad c<x<2c, \\ 0 & \text{per} \quad x>2c \end{cases}$$

e l'estremo della corda $x = 0$ è fissato;

g) il problema precedente per una corda di estremo libero $x = 0$. Il profilo della corda per tutti i problemi a)-g) deve essere tracciato per gli istanti

$$t_0=0, \quad t_k=\frac{c}{8a}\,k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 8).$$

Indicare per i problemi a)-g) nel piano delle fasi (x, t) le zone corrispondenti ai diversi stadi del processo.

2. Trovare la soluzione del problema 1a) per tutti i valori delle variabili x e t (le formule esprimenti la funzione $u(x, t)$ sono diverse per le diverse zone del piano delle fasi).

3. Determinare la deviazione in un certo punto x_0, t_0 ricorrendo al piano delle fasi (x, t) e al piano (x, u) in cui (fig. 21) sono assegnate le deviazioni iniziali ($\psi = 0$) sia per il caso della corda illimitata che per il caso della corda semilimitata di estremo fissato (o libero).

4. All'estremo di un tubo cilindrico lungo riempito di gas si trova uno stantuffo che si muove in base alla legge arbitraria $x = f(t)$ con velocità $v = f'(t) < a$. Lo spostamento iniziale e la velocita delle particelle del gas sono nulli. Determinare lo spostamento del gas in una sezione di ascissa x. Considerare il caso dello spostamento dello stantuffo a velocità costante $c < a$. Che cosa si può dire della soluzione del problema se a partire da un certo istante la velocità dello stantuffo è $v < a$? (si veda Appendice 5 del capitolo II).

5. Lungo una corda illimitata si propaghi l'onda $u(x, t) = f(x - at)$. Considerare come iniziale lo stato della corda all'istante $t = 0$ e risolvere l'equazione delle vibrazioni con le condizioni iniziali corrispondenti. Confrontare con il problema 1a).

6. Una sbarra illimitata elastica è stata ottenuta per congiunzione nel punto $x = 0$ di due sbarre di caratteristiche

k_1, ρ_1, $a_1=\sqrt{k_1/\rho_1}$ per $x<0$,

k_2, ρ_2, $a_2=\sqrt{k_2/\rho_2}$ per $x>0$.

a) Dal dominio $x < 0$ esca l'onda

$$u(x, t)=f\left(t-\frac{x}{a}\right),$$

dove f è una funzione data. Trovare i coefficienti di riflessione e di rifrazione al passare dell'onda per il punto di congiunzione ($x = 0$). Stabilire le condizioni sotto le quali l'onda riflessa non esiste.

b) Risolvere lo stesso problema se è data la deviazione iniziale locale

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < x_1, \\ \varphi(x) & \text{per} \quad x_1 < x < x_2 < 0, \\ 0 & \text{per} \quad x > x_2 \end{cases}$$

e se la velocità iniziale è nulla.

7. In un certo punto $x = x_0$ di una corda sia sospeso un carico di massa M e dal dominio $x < 0$ esca l'onda

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Trovare le onde rifratta e riflessa.

8. Un tubo semilimitato ($x > 0$) riempito di un gas perfetto ha, in un estremo ($x = 0$), uno stantuffo di massa M che si sposta liberamente. All'istante $t = 0$ lo stantuffo riceve mediante un colpo la velocità iniziale v_0.

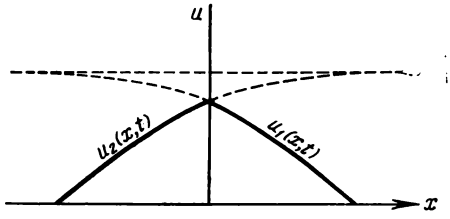


Fig. 22

Determinare il processo di propagazione dell'onda nel gas se è noto che le deviazioni iniziali e la velocità iniziale delle particelle di gas sono nulle.

Suggerimento. Considerare la soluzione dell'equazione delle vibrazioni nel dominio $x > 0$. Utilizzare la condizione al contorno

$$Mu_{tt}(0, t) = S\gamma p_0 u_x(0, t)$$

(p_0 è la pressione iniziale del gas, S l'area della sezione trasversale del tubo, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) e le condizioni iniziali sulla frontiera $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

9. Una corda infinita avente nel punto $x = 0$ una massa concentrata M si trova in equilibrio. All'istante iniziale $t = 0$ con un colpo di martellino alla massa M viene trasmessa la velocità iniziale v_0. Dimostrare che all'istante $t > 0$ la corda perturbata ha la forma indicata nella fig. 22, dove $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sono definite dalle formule

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{\frac{2T}{Ma^2}(x - at)}\right] & \text{per } x - at < 0 \text{ (onda diretta)}, \\ 0 & \text{per } x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x + at)}\right] & \text{per } x - at < 0 \text{ (onda inversa)}, \\ 0 & \text{per } x - at > 0. \end{cases}$$

Suggerimento. Utilizzare la condizione

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) \quad M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t}(0, t) = T \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

10. Risolvere il problema della propagazione delle oscillazioni elettriche in un filo infinito sotto la condizione

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

e con condizioni iniziali arbitrarie.

11. Trovare la soluzione dell'equazione integrale delle variazioni per la corda semilimitata con le condizioni al contorno di terza specie (si veda il n. 9).

12. All'estremo $x = 0$ di una sbarra semilimitata è installata una membrana la cui resistenza alle vibrazioni longitudinali della sbarra è proporzionale alla velocità $u_t(0, t)$. Descrivere le vibrazioni se sono date le deviazioni iniziali e se $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

§ 3. Metodo di separazione delle variabili

1. Equazione delle vibrazioni libere di una corda. Il metodo *di separazione delle variabili* o il *metodo di Fourier* è fra i più diffusi metodi di soluzione delle equazioni alle derivate parziali. Diamo la descrizione di questo metodo per il problema delle vibrazioni di una corda coi due estremi fissati. Studieremo la soluzione del problema in tutti i dettagli e nell'esposizione seguente faremo riferimenti a questo paragrafo omettendo la ripetizione della dimostrazione.

Dunque, cercheremo una soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

soddisfacente alle condizioni al contorno omogenee

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{2}$$

e alle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L'equazione (1) è lineare e omogenea, perciò la somma di soluzioni particolari è anch'essa una soluzione di questa equazione. Avendo a disposizione un numero sufficientemente grande di soluzioni particolari, si può trovare la soluzione cercata sommando quelle particolari con certi coefficienti.

Formuliamo il *problema ausiliare fondamentale*:

trovare una soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

non identicamente nulla, soddisfacente alle condizioni al contorno omogenee

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e rappresentabile sotto forma di prodotto

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{5}$$

dove $X(x)$ è funzione della sola variabile x e $T(t)$ funzione della sola variabile t.

Sostituendo la forma presunta della soluzione (5) nell'equazione (1), otteniamo

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

ossia, dopo aver diviso per XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

Affinché la funzione (5) sia soluzione dell'equazione (1), l'uguaglianza (6) deve essere verificata identicamente, cioè per tutti i valori delle variabili indipendenti $0 < x < l$, $t > 0$. Il secondo membro dell'uguaglianza (6) è funzione della sola variabile t e il primo membro funzione della sola variabile x. Fissando ad esempio un certo valore di x e cambiando t (o viceversa), otteniamo che il secondo e il primo membro dell'uguaglianza (6) al variare dei loro argomenti conservano il valore costante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

dove λ è una costante presa con segno negativo per rendere più comodi i calcoli successivi, senza supporre nulla circa il suo segno.

Dalla relazione (7) ricaviamo un'equazione differenziale ordinaria per definire le funzioni $X(x)$ e $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \tag{8}$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \tag{9}$$

Le condizioni al contorno (4) danno

$$u(0, t) = X(0)\, T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)\, T(t) = 0.$$

Di qui risulta che la funzione $X(x)$ deve verificare le condizioni complementari

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

altrimenti avremmo

$$T(t) \equiv 0 \text{ e } u(x, t) \equiv 0,$$

mentre il problema è quello di trovare una soluzione non banale. Per la funzione $T(t)$ non esistono condizioni complementari nel problema ausiliare fondamentale.

Quindi, dopo aver trovato la funzione $X(x)$ arriviamo al *problema elementare degli autovalori*:

trovare quei valori del parametro λ *per i quali esistono soluzioni non banali del problema*

$$\left.\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e trovare anche le soluzioni. Tali valori del parametro λ sono detti *autovalori* e le soluzioni non banali corrispondenti a questi autovalori si dicono *autofunzioni del problem ι* (11). Il problema formulato in questo modo è spesso detto *problema di Sturm-Liouville*.

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro λ sia negativo, nullo o positivo.

1. Per $\lambda < 0$ il problema non ha soluzioni non banali. Infatti, la soluzione generale dell'equazione (8) ha la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

Le condizioni al contorno danno

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

ossia

$$C_1 = -C_2 \text{ e } C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Ma nel caso considerato α è reale e positivo, cosicché $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Pertanto

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

e, di conseguenza,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. Anche per $\lambda = 0$ non esistono soluzioni non banali. Infatti, in questo caso la soluzione generale dell'equazione (8) ha la forma

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Le condizioni al contorno danno

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

vale a dire $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, e, di conseguenza,

$X(x) \equiv 0$.

3. Per $\lambda > 0$ la soluzione generale dell'equazione può essere scritta nella forma

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x.$$

Le condizioni al contorno danno

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Se $X(x)$ non è identicamente nulla, allora $D_2 \neq 0$ e perciò

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{12}$$

ossia

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

dove n è un intero qualsiasi. Quindi, soluzioni non banali del problema (11) sono possibili unicamente per i valori

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

A questi autovalori corrispondono le autofunzioni

$$X_n(x) = D_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

dove D_n è una costante arbitraria

Dunque, soltanto per valori di λ uguali a

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tag{13}$$

esistono le soluzioni non banali del problema (11)

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

che si possono definire a meno di fattore arbitrario il quale abbiamo posto uguale all'unità. Agli stessi valori λ_n corrispondono le soluzioni dell'equazione (9)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at, \tag{15}$$

dove A_n e B_n sono costanti arbitrarie.

Tornando al problema (1)-(3) concludiamo che le funzioni

$$u_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t) =$$

$$= \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at\right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{16}$$

sono soluzioni parziali dell'equazione (1), soddisfacenti alle condizioni al contorno (4) e rappresentabili nella forma di prodotto (5) di due funzioni di cui l'una dipende dalla sola x e l'altra dalla sola t. Queste soluzioni possono soddisfare alle condizioni iniziali (3) del nostro problema di partenza soltanto per casi particolari delle funzioni iniziali $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

Passiamo alla soluzione del problema (1)-(3) nel caso generale. Essendo lineare e omogenea l'equazione (1), la somma di soluzioni particolari

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{17}$$

verifica anch'essa questa equazione e le condizioni al contorno (2). Più avanti ci soffermeremo più in dettaglio su questa questione (si veda il n. 3 del presente paragrafo). Le condizioni iniziali permettono di definire A_n e B_n. Chiediamo che la funzione (17) soddisfi alle condizioni (3):

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

È noto dalla teoria delle serie di Fourier che la derivata di una funzione $f(x)$ continua a tratti e derivabile a tratti, data nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$, si sviluppa in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{19}$$

dove *)

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{20}$$

*) Di solito vengono considerate funzioni periodiche di periodo $2l$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi, \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi,$$

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ soddisfano alle condizioni di sviluppabilità in serie di Fourier, allora

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \qquad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \qquad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{22}$$

Confrontando queste serie con le formule (18), vediamo che per verificare le condizioni iniziali, si deve porre

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \tag{23}$$

ciò che definisce completamente la funzione (17) la quale fornisce la soluzione del problema in esame.

Abbiamo definito la soluzione nella forma di una serie infinita (17). Se la serie (17) è divergente o se la funzione definita da questa serie non è derivabile, è ovvio che questa serie non può rappresentare la soluzione dell'equazione differenziale in questione.

Qui ci siamo limitati alla costruzione formale della soluzione. La precisazione delle condizioni per cui la serie (17) è convergente e fornisce una soluzione verrà data nel n. 3.

2. Interpretazione della soluzione. Diamo ora un'interpretazione della soluzione ottenuta. Si può rappresentare la funzione $u_n(x, t)$ nella forma

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{24}$$

dove

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \qquad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}. \tag{25}$$

Se la funzione $F(x)$ è dispari, allora $a_n = 0$ di modo che

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x; \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Se la funzione $F(x)$ è data soltanto nell'intervallo $(0, l)$, la si può prolungare in modo dispari, e svilupparla nell'intervallo da $-l$ a $+l$; ciò ci conduce alle formule (19) e (20). (Si veda B. M. Budak e S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, 1965, ed. russa.)

Ogni punto della corda x_0 compie le vibrazioni armoniche

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x_0$$

di ampiezza

$$\alpha_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x_0.$$

Le vibrazioni della corda di questo tipo sono dette *onde stazionarie*. I punti $x = m \frac{l}{n}$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ in cui $\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = 0$ restano fissi durante tutto il processo e sono detti *nodi* dell'onda stazionaria $u_n(x, t)$. I punti $x = \frac{2m+1}{2n} l$ $(m = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$ in cui $\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ vibrano con ampiezza α_n sono detti *ventri* dell'onda stazionaria.

Il profilo dell'onda stazionaria in qualsiasi istante rappresenta la sinusoide

$$u_n(x, t) = C_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

dove

$$C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

All'istante t in cui $\cos \omega_n (t + \delta_n) = \pm 1$, le deviazioni arrivano al massimo e la velocità è nulla. Negli istanti t in cui $\cos \omega_n (t + \delta_n) = 0$, la deviazione è nulla e la velocità raggiunge un massimo. Le frequenze delle vibrazioni di tutti i punti della corda sono identiche e valgono

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \tag{26}$$

Le frequenze ω_n sono dette *autofrequenze* delle vibrazioni della corda. Per le vibrazioni trasversali della corda $a^2 = T/\rho$ e, di conseguenza,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{27}$$

L'energia dell'n-esima onda stazionaria (dell'n-esima *armonica*) per il caso delle vibrazioni trasversali della corda vale

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n (t + \delta_n) \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n}{l} x + \right.$$

$$+ T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t+\delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \Big] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega_n^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n (t+\delta_n) + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t+\delta_n) \right], \qquad (28)$$

poiché

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n}{l} x \, dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \, dx = \frac{l}{2}.$$

Servendoci delle espressioni di α_n, ω_n e dell'uguaglianza $T = a^2\rho$, otteniamo

$$E_n = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \qquad (29)$$

dove $M = l\rho$ è la massa della corda.

Di solito noi percepiamo le vibrazioni della corda in base al suono emesso dalla corda. Senza soffermarci sul processo di propagazione delle vibrazioni nell'aria e sulla percezione delle vibrazioni dagli organi del nostro udito, possiamo affermare che il suono emesso dalla corda rappresenta una sovrapposizione di «*suoni semplici*», corrispondenti alle onde stazionarie in cui viene sviluppata la vibrazione. Questo sviluppo in suoni semplici è un'operazione di natura non unicamente matematica. L'individuazione di suoni semplici può essere effettuata sperimentalmente mediante un risonatore.

L'altezza di un suono dipende dalla frequenza delle vibrazioni corrispondenti a questo suono. L'intensità di un suono è determinata dalla sua energia e, quindi, dalla sua ampiezza. Il suono più basso prodotto dalla corda è dovuto alla più bassa autofrequenza $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ e si dice *suono fondamentale* della corda. Gli altri suoni corrispondenti alle frequenze multiple di ω_1 sono detti *suoni accessori*. Il timbro del suono dipende dalla presenza di suoni accessori accanto a quello fondamentale e dalla distribuzione dell'energia in armoniche.

Il suono più basso della corda e il suo timbro dipendono dal modo di eccitazione delle vibrazioni. Infatti, il modo di eccitazione delle vibrazioni determina le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = \varphi(x); \qquad u_t(x, 0) = \psi(x) \qquad (3)$$

mediante le quali vengono espressi i coefficienti A_n e B_n. Se $A_1 = B_1 = 0$, allora il più basso suono sarà quello corrispondente alla frequenza ω_n, dove n è il numero più piccolo per il quale A_n o B_n sono diversi da zero.

Di solito una corda emette sempre lo stesso suono. Infatti, facciamo vibrare una corda tendendola da una parte e dopo

lasciando andare senza velocità iniziale. In questo caso

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

e

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} \xi \, d\xi > 0,$$

di modo che

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

I coefficienti successivi sono, in generale, notevolmente inferiori ad A_1 in quanto la funzione $\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi$ è di segno alterno per $n \geqslant 2$. In particolare, se $\varphi(x)$ è simmetrica rispetto al punto medio del segmento, allora $A_2 = 0$. Quindi, se facciamo vibrare la corda tendendola da una parte ($\varphi(x) > 0$), quello più basso sarà il suono fondamentale, la cui energia in generale è superiore a quella delle altre armoniche.

Esistono altri modi di eccitazione della corda. Se ad esempio la funzione iniziale è dispari rispetto al punto medio della corda, allora

$$A_1 = 0$$

e il suono più basso corrisponde alla frequenza

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Se la corda sonora è toccata esattamente nel suo punto medio, il suono cambia bruscamente e la corda emette suoni in ottava del suo suono fondamentale. Questo procedimento, che porta il nome di suono flautato, si usa frequentemente suonando il violino, la chitarra ed altri strumenti musicali a corda. Dal punto di vista della teoria delle vibrazioni questo fenomeno è del tutto comprensibile. Toccando il punto medio della corda sonora, smorziamo le onde stazionarie aventi ventri in questo punto e conserviamo soltanto le armoniche aventi nodi in questo punto. In tal modo restano soltanto le armoniche pari e la più bassa frequenza è

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Se tocchiamo la corda a distanza di 1/3 della sua lunghezza dall'estremo, l'altezza del suono fondamentale si triplica poiché, in questo caso, si conservano soltanto le armoniche aventi nodi nel punto $x = l/3$.

Le formule

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{e} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}, \tag{30}$$

che definiscono la frequenza e, rispettivamente, il periodo della vibrazione fondamentale, descrivono le leggi di vibrazioni delle corde seguenti scoperte originariamente per via sperimentale (le leggi di Mersin).

1. Per corde di densità identica e di tensione identica il periodo di vibrazione è proporzionale alla lunghezza delle corde.

2. Fissata la lunghezza della corda il periodo varia in modo inversamente proporzionale alla radice quadrata della sua tensione.

3. Fissate lunghezza e tensione il periodo varia proporzionalmente alla radice quadrata della densità lineare della corda.

Queste regole si possono facilmente illustrare mediante il monocordo.

Abbiamo studiato qui le onde stazionarie che si producono in una corda con gli estremi fissati. Il problema dell'esistenza di una soluzione della forma

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

è equivalente a quello dell'esistenza di onde stazionarie in quanto i profili di questa soluzione sono proporzionali nei diversi istanti.

3. Rappresentazione di vibrazioni arbitrarie sotto forma di sovrapposizione di onde stazionarie. Nel n. 1 abbiamo studiato il problema delle vibrazioni libere delle corde con estremi fissati, e dimostrato l'esistenza di soluzioni particolari sotto forma di onde stazionarie. Inoltre è stato dato uno schema formale di rappresentazione di una vibrazione arbitraria sotto forma di somma di onde stazionarie. Studiamo ora la possibilità di rappresentazione di una soluzione arbitraria sotto forma di sovrapposizione di onde stazionarie. Prima di tutto consideriamo la ben nota generalizzazione del principio di sovrapposizione delle somme finite nel caso di serie infinite

$L(u)$ sia un operatore differenziale lineare uguale alla somma di certe derivate (ordinarie o parziali) di funzioni, a coefficienti che sono funzioni di variabili indipendenti.

Dimostriamo il lemma (*principio di sovrapposizione generalizzato*):

Se le funzioni u_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ *sono soluzioni particolari di un'equazione differenziale omogenea e lineare* $L(u) = 0$ (*ordinaria o alle derivate parziali*), *la serie* $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ *è anch'essa una soluzione di questa equazione se il calcolo delle derivate rispetto a* u, *che figurano nell'equazione* $L(u) = 0$, *si può eseguire derivando la serie termine a termine.*

Infatti se le derivate di u, che figurano nell'equazione $L(u) = 0$, vanno calcolate derivando la serie termine a termine, allora in virtù della linearità dell'equazione abbiamo

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

poiché le serie convergenti si possono sommare termine a termine. Abbiamo dimostrato così che la funzione u verifica l'equazione. Come condizione sufficiente affinché si possa derivare la serie termine a termine si utilizza sempre la condizione di convergenza uniforme della serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \tag{31}$$

che si ottiene dopo la derivazione *).

Torniamo ora al nostro problema ai limiti. Dobbiamo anzitutto convincerci della continuità della funzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \right.$$

$$\left. + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at\right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{32}$$

da cui risulterà che $u(x, t)$ converge in modo continuo rispetto ai suoi valori iniziali e al contorno. A tal fine è sufficiente dimostrare la convergenza uniforme della serie per $u(x, t)$ poiché il termine generale di questa serie è una funzione continua, e una serie uniformemente convergente di funzioni continue definisce una funzione continua. Partendo dalla disuguaglianza

$$| u_n(x, t) | \leqslant | A_n | + | B_n |,$$

concludiamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (| A_n | + | B_n |) \tag{33}$$

è maggiorante della serie (32). Se la serie maggiorante (33) è convergente, la serie (32) converge uniformemente, vale a dire la funzione $u(x, t)$ è continua

Per convincersi che $u_t(x, t)$ converge in modo continuo rispetto ai suoi valori iniziali, occorre dimostrarne la continuità. A tal

*) Se veda V.I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. II, Editori Riuniti, 1977; B.M. Budak e S.V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, 1965 (ed. russa).

fine è sufficiente dimostrare la convergenza uniforme della serie

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at + \right.$$

$$\left. + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{34}$$

o della serie maggiorante

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|). \tag{35}$$

Infine, per convincersi che la funzione $u(x, t)$ verifica l'equazione, cioè che è applicabile il principio di sovrapposizione generalizzato, è sufficiente dimostrare la possibilità di doppia derivazione termine a termine della serie per $u(x, t)$, per cui, a sua volta, è sufficiente dimostrare la convergenza uniforme delle serie

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \right.$$

$$\left. + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \right.$$

$$\left. + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

cui corrisponde, a meno dei fattori di proporzionalità, la serie maggiorante generale

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \tag{36}$$

Siccome

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

dove

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \, dx, \qquad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \, dx,$$

il nostro problema si riduce alla dimostrazione della convergenza delle serie

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0, 1, 2), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1, 0, 1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

A tal fine ricorriamo alle note proprietà *) delle serie di Fourier.

Se la funzione periodica $F(x)$ di periodo $2l$ ha k derivate continue e se la sua $(k+1)$-esima derivata è continua a tratti, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \tag{38}$$

dove a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier, è convergente. Se si tratta dello sviluppo in serie di sen $\frac{\pi n}{l} x$ della funzione $f(x)$ data nell'intervallo $(0, l)$, occorre che le condizioni precedenti siano soddisfatte dalla funzione $F(x)$ che si ottiene per prolungamento dispari dalla funzione $f(x)$. In particolare, affinché $F(x)$ sia continua è necessario che sia $f(0) = 0$ poiché in caso contrario si ottiene una discontinuità nel punto $x = 0$ per prolungamento dispari; analogamente, nel punto $x = l$ deve essere $f(l) = 0$ affinché la funzione prolungata sia continua e periodica di periodo $2l$. La continuità della derivata prima per $x = 0$, $x = l$ si ottiene automaticamente per prolungamento dispari. In generale, per la continuità delle derivate pari della funzione prolungata occorre che

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0 \quad (k = 0, 2, 4, \ldots, 2n). \tag{39}$$

La continuità delle derivate dispari ha luogo senza condizioni complementari.

Dunque, per la convergenza delle serie

$$\text{è}\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0, 1, 2)$$

é sufficiente che la deviazione iniziale $\varphi(x)$ soddisfi alle seguenti condizioni.

1°. Le derivate della funzione $\varphi(x)$, comprese quelle del secondo ordine, sono continue, la derivata terza è continua a tratti e, inoltre,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \tag{40}$$

*) Vedansi, ad esempio, V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. II, Editori Riuniti, 1977; B. M. Budak e S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, 1965 (ed. russa).

Affinché le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1)$$

convergano, occorre imporre alla velocità iniziale $\psi(x)$ le seguenti condizioni:

2°. La funzione $\psi(x)$ deve essere derivabile in modo continuo, avere la derivata seconda continua a tratti e, inoltre,

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{41}$$

Abbiamo dimostrato così che ogni vibrazione $u(x, t)$ con le funzioni iniziali $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ soddisfacenti alle condizioni 1° e 2° è rappresentabile come sovrapposizione di onde stazionarie. Le condizioni 1° e 2° sono sufficienti e legate ai modi di dimostrazione qui adoperati.

Un problema analogo è stato risolto nel n. 5 del § 2 con il metodo delle onde propagantisi

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha, \tag{42}$$

dove Φ e Ψ sono due prolungamenti dispari rispetto a 0 e l delle funzioni iniziali $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ date nell'intervallo $(0, l)$. Come è stato mostrato, le funzioni Φ e Ψ sono periodiche di periodo $2l$ e perciò si possono rappresentare con le serie

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

dove φ_n e ψ_n sono i coefficienti di Fourier delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. Portando queste serie nella formula (42) ed applicando il teorema sul seno e il coseno della somma e della differenza, otteniamo l'espressione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{43}$$

che coincide con la rappresentazione fornita dal metodo di separazione delle variabili.

Quindi, la formula (43) sussiste sotto le stesse ipotesi della formula (42) (si veda il n. 1 del § 3) la quale è stata ricavata sotto la condizione che la funzione $\Phi(x)$ sia doppiamente derivabile in modo continuo e la funzione $\Psi(x)$ sia una volta derivabile.

Passando alle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ dobbiamo chiedere che, oltre le condizioni di derivabilità, siano soddisfatte le condizioni

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0,$$
$$\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \tag{44}$$

Quindi, le condizioni 1° e 2°, le quali sono sufficienti per considerare il metodo di separazione delle variabili, dipendono dal metodo di dimostrazione e contengono condizioni complementari rispetto alle condizioni che garantiscono l'esistenza della soluzione.

Per giustificare la possibilità di rappresentazione della soluzione come risultato della sovrapposizione di onde stazionarie, abbiamo utilizzato il primo metodo di dimostrazione della convergenza delle serie in quanto esso non è legato alla forma speciale (42) applicabile unicamente all'equazione elementare delle vibrazioni ed estendibile facilmente ad altri problemi sebbene questo metodo imponga condizioni un po' più rigorose alle funzioni iniziali.

4. Equazioni non omogenee. Consideriamo l'equazione non omogenea delle vibrazioni

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \tag{45}$$

con le condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{46}$$

e le condizioni al contorno omogenee

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t > 0. \tag{47}$$

Cercheremo la soluzione del problema sotto forma di sviluppo in serie di Fourier in x

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{48}$$

considerando t come un parametro. Per trovare $u(x, t)$, occorre definire la funzione $u_n(t)$. Rappresentiamo la funzione $f(x, t)$ e le condizioni iniziali sotto forma di serie di Fourier

$$\left.\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \\ f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \\ \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \\ \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Sostituendo la forma presunta della soluzione (48) nell'equazione iniziale (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

vediamo che quest'ultima sarà verificata se tutti i coefficienti dello sviluppo sono nulli, cioè se vale

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{50}$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti che definisce $u_n(t)$. Le condizioni iniziali danno

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

da cui segue che

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Queste condizioni complementari definiscono completamente la soluzione dell'equazione (50). Si può rappresentare la funzione $u_n(t)$ sotto la forma

$$u_n(t) = u_n^{(\mathrm{I})}(t) + u_n^{(\mathrm{II})}(t),$$

dove

$$u_n^{(\mathrm{I})}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a (t - \tau) \cdot f_n(\tau)\, d\tau \tag{52}$$

è la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali nulle *) e

$$u_n^{(\mathrm{II})}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \tag{53}$$

*) Si può vederlo direttamente. La formula (52) può essere ottenuta con il metodo di variazione delle costanti. Si veda il testo in corpo minore alla fine del presente numero.

è la soluzione dell'equazione omogenea con condizioni iniziali date. Quindi, la soluzione cercata si scrive nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) \times$$

$$\times d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \qquad (54)$$

La seconda somma rappresenta la soluzione del problema delle vibrazioni libere della corda con condizioni iniziali date ed è stata già analizzata in dettaglio. Passiamo all'esame della prima somma che rappresenta le vibrazioni forzate della corda sotto l'azione di una forza esterna, con condizioni iniziali nulle. Utilizzando l'espressione (49) per $f_n(t)$, troviamo che

$$u^{(I)}(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (55)$$

dove

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (56)$$

Vediamo quale è il significato fisico della soluzione ottenuta. La funzione $f(\xi, \tau)$ sia non nulla in un intorno sufficientemente piccolo del punto $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

La funzione $\rho f(\xi, \tau)$ rappresenta la densità della forza agente; la forza applicata al segmento $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ vale

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi,$$

e

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} F(\tau)\, d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

è l'impulso di questa forza nel tempo $\Delta\tau$. Applicando il teorema della media all'espressione

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

avremo

$$u(x, t) = G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau}) \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{57}$$

dove

$$\xi_0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \qquad \tau_0 \leqslant \bar{\tau} \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

Passando al limite per $\Delta\xi \to 0$ e $\Delta\tau \to 0$ nella formula (57), otteniamo la funzione

$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t-\tau_0)\frac{I}{\rho}, \tag{58}$$

che si può interpretare come l'influenza dell'impulso di intensità I concentrato in un istante.

Se è nota la funzione $\frac{I}{\rho} G(x, \xi, t-\tau)$ rappresentante l'azione dell'impulso istantaneo unitario, allora è immediatamente chiaro che la distribuzione della forza $f(x, t)$ deve essere data dalla formula

$$u(x, t) = \int_0^l \int_0^t G(x, \xi, t-\tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \tag{59}$$

coincidente con la formula (55) sopra ricavata.

La funzione dell'impulso istantaneo per la retta infinita è stata considerata nel paragrafo precedente. Si ricordi che essa è una funzione continua a tratti, uguale a $\frac{1}{2a}\frac{I}{\rho}$ all'interno dell'angolo caratteristico superiore per il punto (ξ, τ) e nulla all'esterno di questo angolo. La funzione dell'influenza dell'impulso istantaneo per una corda fissata $(0, l)$ può essere ottenuta dalla funzione dell'influenza per la corda infinita con un prolungamento dispari rispetto ai punti $x = 0$ e $x = l$.

Consideriamo l'istante t sufficientemente vicino a τ in cui non si sente ancora l'influenza della riflessione dagli estremi $x = 0$ e $x = l$. Per questo istante la funzione dell'influenza viene

espressa dal grafico rappresentato nella fig. 23. Sviluppiamo questa funzione (ponendo $I = \rho$) in serie di Fourier in $\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x$; i coefficienti di Fourier valgono

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l G(\alpha, \xi, t-\tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\alpha\, d\alpha = \frac{1}{al}\int_{\xi-a(t-\tau)}^{\xi+a(t-\tau)} \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{a\pi n}\left\{\cos\frac{\pi n}{l}[\xi - a(t-\tau)] - \cos\frac{\pi n}{l}[\xi + a(t-\tau)]\right\} =$$

$$= \frac{2}{a\pi n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}a(t-\tau).$$

Di qui ricaviamo la formula

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi, \tag{60}$$

coincidente con la formula (56) ottenuta con il metodo di separazione delle variabili.

Nel caso di valori di t per cui gli estremi fissati cominciano ad esercitare un'influenza, la costruzione della funzione dell'in-

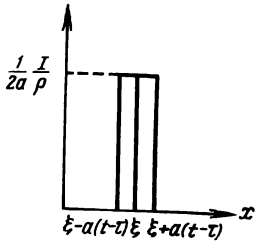


Fig. 23

fluenza mediante le caratteristiche è pesante; ma la rappresentazione sotto forma di serie di Fourier resta valida anche in questo caso.

Ci limiteremo qui allo schema formale di soluzione, senza precisare le condizioni di applicabilità della formula ottenuta.

Consideriamo l'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti

$$L(u) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}u^{(1)} + p_n u = f(t) \tag{1*}$$

$$\left(u^{(i)} = \frac{d^i u}{dt^i}\right)$$

con le condizioni iniziali

$$u^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2*}$$

La sua soluzione è data dalla formula

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{3*}$$

dove $U(t)$ è la soluzione dell'equazione omogenea

$L(U) = 0$

con le condizioni iniziali

$$U^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \qquad U^{(n-1)}(0) = 1. \tag{4*}$$

Calcolando infatti le derivate di $u(t)$ mediante la derivazione dei secondi membri rispetto a t, troviamo

$$\left.\begin{aligned}
u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U(0) f(t) && [U(0) = 0],\\
u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(1)}(0) f(t) && [U^{(1)}(0) = 0],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t) && [U^{(n-2)}(0) = 0],\\
u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) && [U^{(n-1)}(0) = 1].
\end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

Sostituendo queste derivate nell'equazione (1*), otteniamo

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau)\, d\tau + f(t) = f(t),$$

vale a dire l'equazione viene verificata. È evidente che le condizioni iniziali (2*) sono anch'esse verificate.

È facile dare un'interpretazione fisica evidente della funzione $U(t)$ e della formula (3*). La funzione $u(t)$ rappresenta, di solito, lo spostamento di un certo sistema e $f(t)$ la forza agente su questo sistema. Per $t < 0$ il sistema in questione si trovi in equilibrio e il suo spostamento sia dato dalla funzione $f_\varepsilon(t)$ ($\geqslant 0$) non nulla soltanto nell'intervallo di tempo $0 < t < \varepsilon$. Indichiamo l'impulso di questo sistema con

$$I = \int_0^t f_\varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

Sia $u_\varepsilon(t)$ la funzione corrispondente a $f_\varepsilon(t)$, considerando ε come un parametro e $I = 1$. È facile vedere che per $\varepsilon \to 0$ esiste $\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t)$ indipendentemente dalla scelta di $f_\varepsilon(t)$ e questo limite è uguale alla funzione $U(t)$

definita sopra

$$U(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t),$$

se si pone $U(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Quindi, è naturale chiamare $U(t)$ funzione dell'influenza di un impulso istantaneo.

Considerando infatti la formula (3*) e applicando il teorema della media, otteniamo

$$u_\varepsilon(t) = U(t - \tau_\varepsilon^*) \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\tau)\, d\tau = U(t - \tau_\varepsilon^*) \qquad (0 \leqslant \tau_\varepsilon^* < \varepsilon < t).$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, vediamo che esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} U(t - \tau_\varepsilon^*) = U(t),$$

come dovevasi dimostrare.

Passiamo ora alla rappresentazione della soluzione dell'equazione non omogenea mediante $U(t)$, ossia la funzione dell'influenza di un impulso istantaneo. Dividendo l'intervallo $(0, t)$ con i punti τ_i in parti uguali

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

rappresentiamo la funzione $f(t)$ nella forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

dove

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \tau_i \text{ e } t \geqslant \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{per } \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Allora abbiamo

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),$$

dove $u_i(t)$ sono le soluzioni dell'equazione $L(u_i) = f_i$ con condizioni iniziali nulle.

Se m è sufficientemente grande, si può considerare $u_i(t)$ come funzione dell'influenza dell'impulso istantaneo di intensità

$$I = f_i(\tau_i)\, \Delta\tau = f(\tau_i)\, \Delta\tau$$

di modo che

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} U(t - \tau_i)\, f(\tau_i)\, \Delta\tau \xrightarrow[\Delta\tau \to 0]{} \int_0^t U(t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

vale a dire arriviamo alla formula

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

dalla quale risulta che l'influenza di una forza agente in modo continuo può essere rappresentata come sovrapposizione di influenze di impulsi istantanei.

Nel caso considerato prima, $u_n^{(1)}$ verifica l'equazione (50) e le condizioni $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. Per la funzione dell'influenza $U(t)$ abbiamo

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = 1,$$

di modo che

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at.$$

Di qui e dalla (3*) ricaviamo la formula (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau.$$

La rappresentazione integrale (3*) della soluzione dell'equazione differenziale ordinaria (1*) ha, come abbiamo visto, lo stesso significato fisico che la formula (59), la quale fornisce la rappresentazione integrale della soluzione dell'equazione non omogenea delle vibrazioni.

5. Primo problema generale ai limiti. Consideriamo il *primo problema generale ai limiti* per l'equazione delle vibrazioni:

trovare la soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{45}$$

con le condizioni aggiuntive

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0. \tag{47}$$

Introduciamo una nuova funzione incognita $v(x, t)$, ponendo

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

di modo che $v(x, t)$ rappresenta la deviazione della funzione $u(x, t)$ da una certa funzione nota $U(x, t)$.

Questa funzione $v(x, t)$ verrà definita come la soluzione dell'equazione

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \overline{f}(x, t), \quad \text{dove } \overline{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}],$$

con le condizioni aggiuntive

$$v(x, 0) = \overline{\varphi}(x), \quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v_t(x, 0) = \overline{\psi}(x); \quad \overline{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0);$$

$$v(0, t) = \overline{\mu}_1(t), \quad \overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \overline{\mu}_2(t); \quad \overline{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

Scegliamo la funzione ausiliare $U(x, t)$ in modo che si abbia

$\bar{\mu}_1(t) = 0$ e $\bar{\mu}_2(t) = 0$;

a tal fine è sufficiente porre

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Riduciamo così il problema generale ai limiti per la funzione $u(x, t)$ a un problema ai limiti per la funzione $v(x, t)$, con condizioni al contorno nulle. Il metodo di soluzione di questo problema è stato dato sopra (si veda il n. 4).

6. Problemi ai limiti con disomogeneità stazionarie. Una classe di problemi assai importante è quella dei problemi ai limiti con disomogeneità stazionarie, in cui le condizioni al contorno e il secondo membro dell'equazione sono indipendenti dal tempo

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \quad u_1 = \text{costante}, \\ u(l, t) &= u_2, \quad u_2 = \text{costante}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

In questo caso è naturale cercare la soluzione sotto forma di somma

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

dove $\bar{u}(x)$ è lo stato stazionario (flessione statica) della corda, determinato dalle condizioni

$$\begin{aligned} a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) &= 0, \\ \bar{u}(0) &= u_1, \\ \bar{u}(l) &= u_2 \end{aligned}$$

e $v(x, t)$ la deviazione dallo stato stazionario. È facile vedere che la funzione $\bar{u}(x)$ vale

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi_1 \times$$

$$\times \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2}\, d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2}\, d\xi_2.$$

In particolare, se $f_0 = \text{costante}$, allora

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

La funzione $v\ (x,\ t)$ verifica, evidentemente, l'equazione omogenea

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

con le condizioni al contorno omogenee

$$v\ (0,\ t) = 0,$$

$$v\ (l,\ t) = 0$$

e le condizioni iniziali

$$v\ (x,\ 0) = \overline{\varphi}\ (x), \quad \overline{\varphi}\ (x) = \varphi\ (x) - \overline{u}\ (x),$$

$$v_t\ (x,\ 0) = \psi\ (x).$$

In tal modo v è la soluzione del problema elementare ai limiti che abbiamo considerato nel n. 1 del presente paragrafo.

Nel dedurre l'equazione delle vibrazioni e in altri casi abbiamo trascurato l'azione della forza di gravità. Da quanto detto sopra risulta che, invece di tenere esplicitamente conto della forza di gravità (e in generale delle forze indipendenti dal tempo), è sufficiente considerare la deviazione dallo stato stazionario.

Risolviamo un problema più semplice di questo tipo, con condizioni iniziali nulle:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0\ (x), \tag{45''}$$

$$u\ (x,\ 0) = 0, \quad u_t\ (x,\ 0) = 0, \tag{46'}$$

$$u\ (0,\ t) = u_1, \quad u\ (l,\ t) = u_2. \tag{47''}$$

In questo caso per la funzione $v\ (x,\ t)$ dobbiamo risolvere il seguente problema:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

$$v\ (x,\ 0) = \varphi\ (x) = -\overline{u}\ (x), \quad v_t\ (x,\ 0) = 0,$$

$$v\ (0,\ t) = 0, \quad v\ (l,\ t) = 0.$$

È facile vedere che per la soluzione di questo problema non c'è bisogno di ricorrere all'espressione analitica esatta di $\overline{u}\ (x)$.

L'espressione di $v\ (x,\ t)$, in accordo con la formula (17), ha la forma

$$v\ (x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos a \sqrt{\lambda_n}\ t + B_n \operatorname{sen} a \sqrt{\lambda_n}\ t\right) X_n\ (x),$$

dove

$$X_n\ (x) = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\ x \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\right)$$

è l'autofunzione del problema ai limiti seguente:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$X\ (0) = 0, \quad X\ (l) = 0. \tag{10}$$

Dalle condizioni iniziali segue che

$$B_n = 0$$

e

$$A_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \bar{u}(x)\, X_n(x)\, dx.$$

Esiste il seguente metodo comodo per il calcolo di questo integrale. Servendoci dell'equazione (8), troviamo

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

Portiamo questa espressione nella formula di A_n ed eseguiamo la doppia integrazione per parti

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l \bar{u}(x)\, X_n''(x)\, dx = \frac{2}{l\lambda_n}\left\{\bar{u}X_n'(x)\,|_0^l - \bar{u}'X_n\,|_0^l + \int_0^l \bar{u}''X_n(x)\, dx\right\},$$

da cui, tenendo conto dell'equazione e delle condizioni al contorno per $\bar{u}(x)$, ricaviamo

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\left[u_2X_n'(l) - u_1X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\, dx\right]$$

ossia

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[u_2(-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\, dx\right].$$

In particolare, per un'equazione omogenea ($f_0(x) = 0$) abbiamo

$$A_n = \frac{2}{\pi n}[u_2(-1)^n - u_1].$$

È comodo calcolare con questo metodo i coefficienti di Fourier per condizioni al contorno di seconda e terza specie, nonché nel caso del problema ai limiti per una corda non omogenea

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] + \lambda\rho(x)\, X = 0,$$

se sono noti gli autovalori e le autofunzioni.

7. Problemi senza condizioni iniziali. Come abbiamo mostrato sopra, il problema delle vibrazioni di una corda in un dato regime al contorno può essere ridotto alla soluzione di un'equazione non omogenea con condizioni al contorno nulle.

Tuttavia questo procedimento spesso rende complicata la soluzione del problema, la quale può essere ottenuta direttamente.

Studiando l'influenza del regime al contorno, è importante trovare una soluzione particolare (di un'equazione omogenea) che soddisfi alle condizioni al contorno assegnate poiché il calcolo della correzione rispetto ai dati iniziali si riduce alla soluzione della stessa equazione con condizioni al contorno nulle.

Una classe assai importante di problemi sulla propagazione del regime al contorno è rappresentata dai « problemi senza condizioni iniziali ».

Se l'azione del regime al contorno è sufficientemente duratura, grazie all'attrito proprio a ogni sistema fisico reale l'influenza dei dati iniziali diminuisce con il tempo. Quindi arriviamo in modo naturale al *problema senza condizioni iniziali* (I):

trovare la soluzione dell'equazione

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0), \quad 0 < x < l,\ t > -\infty \quad (61)\\ &\textit{con le condizioni al contorno assegnate:}\\ &u(0, t) = \mu_1(t),\\ &u(l, t) = \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \quad (I_\alpha)$$

Chiameremo (I_α) questo problema.

Il termine αu_t a secondo membro dell'equazione corrisponde all'attrito, proporzionale alla velocità.

Consideriamo dapprima il problema della propagazione di un regime al contorno periodico:

$$u(l, t) = A \cos \omega t \ (\text{o } u(l, t) = B \operatorname{sen} \omega t), \quad (62)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (63)$$

Per il seguito è più comodo scrivere la condizione al contorno in forma complessa

$$u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \quad (64)$$

Se

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t)$$

verifica l'equazione (61) con le condizioni al contorno (63) e le condizioni iniziali (64), allora $u^{(1)}(x, t)$ e $u^{(2)}(x, t)$ — le sue parti reale ed immaginaria — verificano separatamente la stessa equazione (in virtù della sua linearità), la condizione (63) e le condizioni al contorno per $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t.$$

Troviamo dunque la soluzione del problema

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t,\\ &u(0, t) = 0,\\ &u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Ponendo

$$u(x, t) = X(x)\, e^{i\omega t}$$

e sostituendo questa espressione nell'equazione, otteniamo per la funzione $X(x)$ il seguente problema:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha \frac{\omega}{a^2}\right), \tag{66}$$

$$X(0) = 0, \tag{67}$$

$$X(l) = A. \tag{68}$$

Dall'equazione (66) e dalla condizione al contorno (67) otteniamo $X(x) = C \operatorname{sen} kx$.

La condizione per $x = l$ dà

$$C = \frac{A}{\operatorname{sen} kl} \tag{69}$$

di modo che

$$X(x) = A \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{70}$$

dove $X_1(x)$ e $X_2(x)$ sono le parti reale ed immaginaria di $X(x)$.

La soluzione cercata si può rappresentare nella forma

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)]e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

dove

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \operatorname{sen} \omega t,$$

$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \operatorname{sen} \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

Passando al limite per $\alpha \to 0$, troviamo

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \to 0} k = \frac{\omega}{a} \tag{71}$$

e, rispettivamente,

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \to 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \tag{72}$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \to 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l} \operatorname{sen} \omega t. \tag{73}$$

Consideriamo il seguente problema

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty; \\ &u(0, t) = \mu_1(t), \quad t > -\infty; \\ &u(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{I_0}$$

che chiameremo problema (I_0). È evidente che $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ e $\bar{u}^{(2)}(x, t)$ sono due soluzioni del problema (I_0) con le condizioni al con-

torno

$$\bar{u}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$\bar{u}^{(2)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t.$$

La soluzione del problema per $\alpha = 0$ non esiste sempre. Se la frequenza delle vibrazioni forzate ω coincide con l'autofrequenza ω_n delle vibrazioni della corda agli estremi fissati

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

allora il denominatore nelle formule esprimenti $\bar{u}^{(1)}$ e $\bar{u}^{(2)}$ si annulla e la soluzione del problema senza condizioni iniziali non esiste.

Questo fatto ha un significato fisico semplice, e cioè: per $\omega = \omega_n$ si produce la risonanza, vale a dire non esiste regime stazionario. L'ampiezza a partire da un certo istante $t = t_0$ cresce indefinitamente.

Se l'attrito esiste ($\alpha \neq 0$), il regime stazionario è possibile qualunque sia ω, poiché $\operatorname{sen} kl \neq 0$ per k complesso.

Se $\mu_1(t) = 0$ e $\mu_2(t)$ è una funzione periodica rappresentabile nella forma

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \operatorname{sen} \omega n t). \tag{74}$$

dove ω è la frequenza più piccola, A_n e B_n sono i coefficienti di Fourier, allora la soluzione del problema nel caso $\alpha = 0$ assume la forma

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \operatorname{sen} \omega n t) \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} x}{\operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} l},$$

alla sola condizione che nessuna delle frequenze ωn coincida con le autofrequenze della corda fissata.

Se, invece, $\mu_2(t)$ è una funzione non periodica, allora, sviluppandola in integrale di Fourier, si può ottenere analogamente la soluzione in forma integrale.

È da notare che la soluzione del problema senza condizioni iniziali per $\alpha = 0$ non è definita univocamente soltanto se ad essa non sono imposte certe condizioni complementari. Aggiungendo infatti a una certa soluzione di questo problema qualsiasi combinazione di onde stazionarie

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

dove A_n e B_n sono costanti arbitrarie, vediamo, che questa somma verificherà la stessa equazione e le stesse condizioni al contorno.

Per ottenere un'unica soluzione del problema (I_α) per $\alpha = 0$, introduciamo la condizione complementare di «attrito decrescente»:

Chiameremo soluzione del problema (I_0) *soddisfacente alla condizione di «attrito decrescente» quella che è la soluzione del problema* (I_α) *per* $\alpha \to 0$.

Analogamente si risolve il problema se l'estremo $x = l$ è fissato e se per $x = 0$ è assegnato un regime al contorno.

La soluzione del problema generale senza condizioni iniziali

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

viene definita come somma di due addendi per ognuno dei quali non è omogenea soltanto una delle condizioni al contorno.

Dimostriamo l'unicità di una soluzione limitata del problema senza condizioni iniziali per l'equazione (61). In questo caso supporremo che la soluzione sia continua assieme alle sue derivate, comprese quelle del secondo ordine, nel dominio $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < t_0$, se le condizioni al contorno

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

sono date nel dominio $-\infty < t < t_0$.

$u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ siano due soluzioni limitate del problema considerato (I) e sia

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

dove $M < 0$ è un numero.

La differenza di queste funzioni

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

è limitata ($|v| < 2M$), verifica l'equazione (61) e le condizioni al contorno omogenee

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

I coefficienti di Fourier per la funzione v

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \, dx$$

verificano, evidentemente, l'equazione

$$\ddot{v}_n + \alpha \dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right), \tag{*}$$

poiché le derivate seconde della funzione $v(x, t)$ sono continue nel dominio $0 \leqslant x \leqslant l$.

La soluzione generale dell'equazione (*) ha la forma

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t}, \tag{**}$$

dove $q_n^{(1)}$ e $q_n^{(2)}$ sono le radici dell'equazione caratteristica, che valgono

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

Siccome $\alpha > 0$, allora Re $q_n^{(1,2)} < 0$. Quindi, la soluzione (**) dell'equazione (*) sarà limitata per $t \to -\infty$ soltanto per $A_n = 0$ e $B_n = 0$, vale a dire $v_n(t) \equiv 0$ per ogni n.

In tal modo

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{e} \quad u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

8. Forza concentrata. Consideriamo il problema delle vibrazioni di una corda sotto l'azione di una forza concentrata, applicata al punto $x = x_0$. Se la forza è distribuita su un certo tratto $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, allora la soluzione si ottiene in base alla formula (55). Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si può ottenere la soluzione del problema in questione.

D'altra parte, nel dedurre l'equazione delle vibrazioni abbiamo visto (si veda la formula (8) del n. 1, § 1) che nel punto x_0 cui è applicata la forza concentrata la derivata prima ha una discontinuità mentre la funzione stessa resta continua. La soluzione $u(x, t)$ del problema delle vibrazioni della corda sotto l'azione di una forza concentrata nel punto x_0 può essere rappresentata da due funzioni distinte

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u(x, t) &= u_2(x, t) \quad \text{per} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Queste funzioni devono verificare l'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{per} \quad x \neq x_0, \tag{76}$$

le condizioni al contorno e quelle iniziali

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ &u_2(l, t) = 0; \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

nonché le condizioni di coniugazione nel punto $x = x_0$ (si veda la formula (8) del § 1) che contengono la condizione di continuità della funzione $u(x, t)$:

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t) \tag{78}$$

e le condizioni che legano il valore del salto della derivata con la forza $f(t)$ concentrata nel punto x_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_0 - 0}^{x_0 + 0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{k}. \tag{79}$$

Non c'è bisogno di badare che siano soddisfatte le condizioni iniziali. Se troviamo una soluzione particolare dell'equazione (76), che verifica le condizioni al contorno della formula (77) e anche (78) e (79), e se associamo ad essa la soluzione dell'equazione omogenea delle vibrazioni, potremo sempre soddisfare le condizioni iniziali date.

Consideriamo il caso particolare in cui

$$f(t) = A \cos \omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

e troviamo una soluzione soddisfacente unicamente alle condizioni al contorno partendo dall'ipotesi che la forza agisca continuamente a cominciare da $t = -\infty$ (regime stazionario), cioè risolviamo il problema senza condizioni iniziali. Ne cercheremo la soluzione nella forma

$$u_1(x, t) = X_1(x) \cos \omega t \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0,$$
$$u_2(x, t) = X_2(x) \cos \omega t \quad \text{per} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l.$$

Dall'equazione (76) segue che

$$\left.\begin{aligned} X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 = 0 \quad \text{per} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Le funzioni X_1 e X_2 devono soddisfare, inoltre, alle condizioni al contorno

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0, \tag{81}$$

che derivano dalla (77), e alle condizioni di coniugazione

$$X_1(x_0) = X_2(x_0), \quad X_1'(x_0) - X_2'(x_0) = \frac{A}{k}, \tag{82}$$

che derivano dalle (78) e (79).

Dall'equazione (80) e dalle condizioni (81) ricaviamo

$$X_1(x) = C \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x, \quad X_2(x) = D \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} (l - x);$$

le condizioni di coniugazione (82) danno

$$C \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x_0 - D \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} (l - x_0) = 0,$$

$$C \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l - x_0) = \frac{A}{k}.$$

Definendo di qui i coefficienti C e D, otteniamo

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{Aa}{k\omega} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} (l - x_0)}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l} \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x \cos \omega t \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2 = \dfrac{Aa}{k\omega} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x_0}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l} \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} (l - x) \cos \omega t \quad \text{per} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Analogamente si scrive la soluzione per $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$.

Abbiamo ottenuto così la soluzione per $f(t) = A \cos \omega t$ o $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$. Se $f(t)$ è una funzione periodica uguale a

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \operatorname{sen} \omega n t)$$

(dove ω è la frequenza più piccola), allora è evidente che

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x}{2} \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} (l - x_0)}{\omega n \operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} l} \operatorname{sen} \frac{\omega n x}{a} \times \right. \\ \qquad \left. \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \operatorname{sen} \omega n t), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0; \right. \\ u_2 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x_0}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} l} \operatorname{sen} \frac{\omega n (l - x)}{a} \times \right. \\ \qquad \left. \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \operatorname{sen} \omega n t), \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \right. \end{cases} \tag{83} *)$$

Se la funzione $f(t)$ non è periodica, allora, rappresentandola in forma di integrale di Fourier, si può ottenere in modo analogo la soluzione in forma integrale.

Se il denominatore di queste funzioni (83) è nullo

$$\operatorname{sen} \frac{\omega n l}{a} = 0,$$

$$\omega n = \frac{\pi m}{l} a = \omega_m,$$

cioè se lo spettro di frequenze della forza eccitante contiene una delle frequenze delle autovibrazioni (risonanza), non esiste una soluzione stabile.

Se il punto di applicazione della forza x_0 è uno dei nodi dell'onda stazionaria corrispondente alla vibrazione libera di frequenza ω_m, allora

$$\operatorname{sen} \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0,$$

$$\operatorname{sen} \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

*) I primi termini di queste somme corrispondono alla flessione stazionaria determinabile, come è facile vedere, in base al valore della forza $f(t) = \alpha_0/2$ = costante mediante le funzioni

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) & \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2(x, t) = u_2(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{per} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

In questo caso i numeratori dei rispettivi termini di u si annullano e il fenomeno di risonanza non si produce. Se, invece, il punto di applicazione della forza agente di frequenza ω_m rappresenta un ventre dell'onda stazionaria corrispondente di frequenza ω_m, allora

$$\operatorname{sen} \frac{\omega_m}{a} x_0 = 1$$

e il fenomeno di risonanza si produrrà in modo più sensibile.

Ne segue che per indurre la risonanza in una corda soggetta all'azione di una forza concentrata, occorre che la sua frequenza ω sia uguale a una delle autofrequenze della corda e che il punto di applicazione della forza coincida con uno dei ventri dell'onda stazionaria.

9. Schema generale del metodo di separazione delle variabili. Il metodo di separazione delle variabili è applicabile non soltanto all'equazione omogenea delle vibrazioni della corda, bensì a quella non omogenea. Consideriamo il seguente problema:

trovare la soluzione dell'equazione

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)\,u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{84}$$

soddisfacente alle condizioni

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{85}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{86}$$

Qui k, q e ρ sono funzioni continue nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$ e positive ($k > 0$, $\rho > 0$, $q \geqslant 0$) *). Risolviamo questo problema mediante il metodo di separazione delle variabili. Per trovare le soluzioni particolari ricorriamo, come prima, al problema ausiliario dell'esistenza delle onde stazionarie:

trovare una soluzione non banale dell'equazione (84), *che soddisfi le condizioni al contorno*

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

e sia rappresentabile sotto forma di prodotto

$$u(x, t) = X(x)\,T(t).$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione e tenendo conto delle condizioni al contorno, otteniamo dopo la separazione delle variabili

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] - qX + \lambda\rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

*) Il caso in cui $k(x)$ si annulla in alcuni punti viene studiato a parte (si veda Appendice II).

Per definizione della funzione $X(x)$ otteniamo il *seguente problema ai limiti per gli autovalori* *):

trovare i valori del parametro λ *per i quali esistono soluzioni non banali del problema*

$$L(X) + \lambda\rho X = 0, \tag{87}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{88}$$

e trovare anche queste soluzioni. Questi valori del parametro λ sono detti *autovalori* e le soluzioni non banali che loro corrispondono si chiamano *autofunzioni del problema* (87)-(88).

Formuliamo le proprietà fondamentali delle autofunzioni e degli autovalori del problema ai limiti (87)-(88), di cui avremo bisogno per il seguito.

1. Esiste un insieme numerabile di autovalori $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ $\ldots < \lambda_n \ldots$ cui corrispondono soluzioni non banali del problema, ossia autofunzioni $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\ldots$, $X_n(x)$, $\ldots$

2. Per $q \geqslant 0$ tutti gli autovalori λ_n sono positivi.

3. Le autofunzioni $X_m(x)$ e $X_n(x)$ per $m \neq n$ sono ortogonali fra loro con peso $\rho(x)$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$\int_0^l X_m(x)\, X_n(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n). \tag{89}$$

4. (*Teorema di sviluppabilità di V. A. Steklov.*) Una funzione arbitraria $F(x)$, due volte derivabile in modo continuo e soddisfacente alle condizioni al contorno $F(0) = F(l) = 0$, si sviluppa in serie continua e assolutamente convergente di autofunzioni $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\| X_n \|^2} \int_0^l F(x)\, X_n(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{90}$$

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\, \rho(x)\, dx.$$

La dimostrazione delle proposizioni 1 e 4 è basata, di solito, sulla teoria delle equazioni integrali, pertanto non la riportiamo. Ci soffermeremo qui sulla dimostrazione delle proprietà 2 e 3.

Prima di passare alla dimostrazione di queste proprietà, introduciamo la cosiddetta formula di Green. $u(x)$ e $v(x)$ siano

---

*) Per $\rho = \rho_0 =$ costante, $k = k_0 =$ costante otteniamo il problema ai limiti delle autovibrazioni della corda con gli estremi fissati

$$X'' + \mu X = 0 \quad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0}\lambda\right), \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

che abbiamo studiato al § 2.

due funzioni qualsiasi, derivabili due volte nell'intervallo $a < x < b$ e aventi la derivata prima continua nel segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Consideriamo l'espressione

$$uL[v] - vL[u] = u(kv')' - v(ku')' = [k(uv' - vu')]'.$$

Integrando questa uguaglianza rispetto a x da a a b, otteniamo la *formula di Green*

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])\,dx = k(uv' - vu')\Big|_a^b. \tag{91}$$

Dimostriamo la proprietà 3. $X_m(x)$ e $X_n(x)$ siano due autofunzioni corrispondenti agli autovalori λ_m e λ_n. Ponendo nella formula (91) $u = X_m(x)$, $v = X_n(x)$ e tenendo conto delle condizioni al contorno (88), avremo *)

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\}\,dx = 0, \quad (a = 0,\ b = l),$$

da cui, utilizzando l'equazione (87), otteniamo

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0.$$

In tal modo, se $\lambda_n \neq \lambda_m$ si ha la condizione

$$\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0, \tag{92}$$

esprimente l'ortogonalità delle autofunzioni $X_m(x)$ e $X_n(x)$ con peso $\rho(x)$.

Dimostriamo ora che a ogni autovalore corrisponde, a meno di un fattore costante, una sola autofunzione **). In effetti, ogni

*) Le derivate X_m' e X_n' sono continue ovunque nel segmento $0 \leqslant x \leqslant l$, compresi i punti $x = 0$ e $x = l$, poiché l'equazione (87) dà

$$k(x)\,X_m'(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho)\,X_m\,dx + C.$$

Ne deriva l'esistenza della derivata X_m' per $x = 0$ e $x = l$.

**) Questa proprietà del primo problema ai limiti, che dobbiamo dimostrare, è fondata sul fatto che due soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione differenziale del secondo ordine non si possono annullare in un medesimo punto. Questa affermazione riguarda il problema ai limiti con condizioni al contorno nulle. Per altre condizioni al contorno ($X(0) = X(l)$, $X'(0) = X'(l)$ ad esempio) possono esistere due autofunzioni distinte corrispondenti a un medesimo autovalore $\left(X_n^{(1)}(x) = \cos\frac{2\pi n}{l}x,\ X_n^{(2)}(x) = \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{l}x \text{ per } \lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots\right)$.

autofunzione viene definita univocamente come soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine in base al valore della funzione stessa e della sua derivata prima per $x = 0$. Supponendo l'esistenza di due funzioni $\overline{X}$ e $\overline{\overline{X}}$ corrispondenti a un medesimo valore di λ e che si annullano per $x = 0$, e considerando la funzione

$$X^*(x) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(t),$$

vediamo che questa funzione verifica la stessa equazione del secondo ordine (87) e le stesse condizioni iniziali della funzione $\overline{X}(x)$, e cioè:

$$X^*(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}'(0) = \overline{X}'(0).$$

Con ciò abbiamo dimostrato che $X^*(x) = \overline{X}(x)$ e che

$$\overline{X}(x) = A\overline{\overline{X}}(x) \quad \left(A = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\right).$$

Notiamo che nel corso della dimostrazione ci siamo serviti della condizione $\overline{\overline{X}}'(0) \neq 0$ la quale indubbiamente viene soddisfatta in quanto la soluzione dell'equazione lineare (87) definita dalle condizioni iniziali

$$\overline{\overline{X}}(0) = 0, \quad \overline{\overline{X}}'(0) = 0$$

è identicamente nulla e quindi non può essere un'autofunzione (si veda la pag. 119).

Essendo lineari e omogenee l'equazione e le condizioni ai limiti, è evidente che se $X_n(x)$ è un'autofunzione per l'autovalore λ_n, allora $A_n X_n(x)$, dove A_n è una costante arbitraria, è anch'essa un'autofunzione per lo stesso λ_n. Sopra è stato dimostrato che con ciò si esaurisce completamente la classe delle autofunzioni. Le autofunzioni che differiscono per un fattore non sono considerate, ovviamente, essenzialmente distinte. Per eliminare l'indeterminazione nella scelta del fattore, si può imporre alle autofunzioni la condizione di normalizzazione

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx = 1.$$

Se una funzione $\hat{X_n}(x)$ non verifica questa condizione, la si può «normalizzare» moltiplicando per il coefficiente A_n:

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\| X_n \|}.$$

Imponendo la condizione di normalizzazione ($\| X_n \| = 1$) alle autofunzioni del problema (87)-(88), queste ultime formano un sistema ortonormalizzato

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Passiamo ora alla dimostrazione della proprietà 2. Dimostriamo che $\lambda > 0$ per $q \geqslant 0$. $X_n(x)$ sia un'autofunzione normalizzata corrispondente all'autovalore λ_n, di modo che

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

Moltiplicando ambedue i membri di questa uguaglianza per $X_n(x)$ e integrando rispetto a x da 0 a l, otteniamo

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = -\int_0^l X_n(x) L[X_n] dx$$

ossia

$$\lambda_n = -\int_0^l X_n \frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{dX_n}{dx}\right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx$$

poiché la funzione $X_n(x)$ è supposta normalizzata. Integrando per parti e tenendo conto delle condizioni al contorno (88), otteniamo

$$\lambda_n = -X_n k X_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx =$$

$$= \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx, \tag{93}$$

da cui risulta che

$$\lambda_n > 0$$

poiché, per ipotesi, $k(x) > 0$ e $q(x) \geqslant 0$.

Lasciando in disparte la dimostrazione del teorema sulla sviluppabilità, soffermiamoci brevemente sul calcolo dei coefficienti dello sviluppo.

È facile vedere che

$$F_n = \frac{1}{\| X_n \|^2} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x)\, dx. \tag{94}$$

Moltiplicando infatti per $\rho(x) X_n(x)$ ambedue i membri dell'uguaglianza

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x),$$

integrando rispetto a x da 0 a l e tenendo conto dell'ortogonalità delle autofunzioni, otteniamo l'espressione sopra dedotta per i coefficienti F_n (i *coefficienti di Fourier*) *).

Torniamo ora all'equazione alle derivate parziali. Per la funzione $T(t)$ abbiamo l'equazione

$$T'' + \lambda_n T = 0 \tag{95}$$

senza condizioni aggiuntive. In virtù della dimostrata positività di λ_n, la sua soluzione ha la forma

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t,$$

dove A_n e B_n sono coefficienti indeterminati. In tal modo il problema ausiliare ha un'infinità di soluzioni della forma

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t\right) X_n(x).$$

Passiamo ora alla risoluzione del problema con condizioni iniziali date. Cercheremo la soluzione nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t\right) X_n(x). \tag{96}$$

Lo schema formale che permette di rendere soddisfatte le condizioni iniziali (86) è basato sul teorema di sviluppabilità 4 e viene applicato come nel caso di una corda omogenea. Dalle uguaglianze

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}\, X_n(x)$$

troviamo che

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{97}$$

*) La possibilità di integrazione termine a termine della serie deriva dal teorema di Steklov sulla convergenza uniforme della serie (90).

dove φ_n e ψ_n sono i coefficienti di Fourier delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sviluppate in sistema di funzioni $\{X_n(x)\}$ ortogonale con peso $\rho(x)$.

Limitandoci allo schema generale del metodo di separazione delle variabili, non diamo qui le condizioni di applicabilità di questo metodo nei confronti né dei coefficienti dell'equazione né delle funzioni iniziali.

I lavori fondamentali relativi a questo metodo appartengono a V. A. Steklov *).

Problemi

1. Trovare la funzione $u(x, t)$ che definisce il processo di vibrazione della corda $(0, l)$ con gli estremi fissati (fig. 24) tesa nel punto $x = c$ della

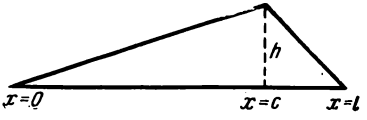


Fig. 24

quantità h, cioè $u(c, 0) = h$ (si veda Appendice I). La velocità iniziale è nulla.

2. Una corda con gli estremi fissati è sottoposta nel punto $x = c$ alla forza F_0. Determinare le vibrazioni della corda se all'istante iniziale la forza cessa di agire e se la velocità iniziale è nulla.

3. Trovare la funzione $u(x, t)$ che definisce il processo di vibrazione di una corda $(0, l)$ con gli estremi fissati sottoposta a un impulso K distribuito nell'intervallo $(c - \delta, c + \delta)$: a) uniformemente, b) in base alla legge $v_0 \cos \frac{x - c}{2\delta} \pi$ (si veda Appendice I) se la deviazione iniziale è nulla.

4. Trovare la funzione $u(x, t)$ che definisce le vibrazioni della corda $(0, l)$ con gli estremi fissati e sottoposta all'impulso K applicato al punto $x = c$ (si veda Appendice I). La deviazione iniziale è nulla.

5. Dimostrare l'additività dell'energia di singole armoniche per il processo delle vibrazioni sotto le condizioni al contorno $u = 0$, $u_x = 0$. Considerare anche il caso della condizione al contorno di terza specie $u_x + hu = 0$ (tutte le serie vanno supposte uniformemente convergenti). Calcolare l'energia di singole armoniche dei problemi 1, 2, 3, 4.

6. Una molla con un estremo fissato nel punto $x = 0$ è soggetta a un carico di massa M, sospeso nel punto $x = l$. Trovare le vibrazioni della molla se all'istante $t = 0$ il carico si stacca e l'estremo $x = l$ non è più soggetto a nessuna forza.

7. Un estremo di una sbarra è fissato e sull'altro agisce la forza F_0. Determinare le vibrazioni della sbarra se all'istante iniziale la forza cessa di agire.

8. Determinare il processo di vibrazione di una molla che ha un estremo fissato, mentre all'altro è attaccato un carico di massa M all'istante iniziale. Le condizioni iniziali sono nulle.

*) Atti della Società matematica di Charkov, seconda serie, vol. 5, n. 1, 2 (1896); Problemi fondamentali di fisica matematica, vol. 1 (1922) (ed. russa); V. A. Iljin, *Sulla risolvibilità dei problemi misti per le equazioni iperboliche e paraboliche* (Successi delle scienze matematiche, 15, op. 2, 1960).

9. Una massa M è attaccata al punto $x = c$ di una corda omogenea con gli estremi $x = 0$ e $x = l$ fissati. Determinare la deviazione della corda $u(x, t)$ se: a) all'istante iniziale la corda nel punto $x = c$ è spostata della quantità h dalla posizione di equilibrio e poi lasciata andare senza velocità iniziale; b) la deviazione iniziale e la velocità iniziale sono nulle (si veda Appendice III).

10. Determinare il processo di vibrazione di una molla con gli estremi liberi sottoposta a un'estensione iniziale uniforme (dare un modello di questo problema).

11. Determinare il processo di vibrazione di una molla con gli estremi rigidamente fissati, con gli stessi coefficienti di rigidità, se le condizioni iniziali sono arbitrarie.

Esaminare la soluzione per h picolo (estremi « deboli ») e per h grande (estremi « rigidi ») e calcolare le correzioni corrispondenti agli autovalori della corda con estremi liberi e fissati.

12. Determinare la deviazione $u(x, t)$ di una corda con gli estremi rigidamente fissati se le vibrazioni si producono in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità e le condizioni iniziali sono arbitrarie.

13. Un filo elettrico isolato di lunghezza l e caratteristiche L, R, C e $G = 0$ è carico fino a un certo potenziale costante v_0. All'istante iniziale un estremo del filo ha contatto a terra e l'altro resta sempre isolato. Trovare la distribuzione della tensione nel filo.

14. Una corda con gli estremi fissati vibra per azione di una forza armonica distribuita con densità $f(x, t) = \Phi(x) \operatorname{sen} \omega t$. Determinare la deviazione $u(x, t)$ della corda sotto condizioni iniziali arbitrarie. Studiare la possibilità di risonanza e trovare la soluzione nel caso di risonanza.

15. Risolvere il problema 14 supponendo che le vibrazioni si producano in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità. Determinare le vibrazioni stabili che costituiscono la parte principale della soluzione per $t \to \infty$.

16. Una sbarra elastica di lunghezza l è disposta verticalmente e attaccata rigidamente con l'estremo superiore a un ascensore che scende liberamente e dopo aver raggiunto la velocità v_0 si arresta immediatamente. Determinare le vibrazioni della sbarra supponendo che il suo estremo inferiore sia libero.

17. Risolvere l'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

sotto condizioni iniziali nulle e condizioni al contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

dove b, A e B sono costanti.

18. Risolvere l'equazione differenziale

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \operatorname{sh} x$$

sotto condizioni iniziali nulle e condizioni al contorno

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

dove A, B e C sono costanti.

19. Al punto $x = c$ $(0 < c < l)$ di una corda omogenea con gli estremi $x = 0$ e $x = l$ fissati è applicata una forza armonica

$$F(t) = P_0 \operatorname{sen} \omega t$$

agente a cominciare dall'istante $t = 0$. Determinare la deviazione $u(x, t)$ supponendo nulle le condizioni iniziali.

20. Risolvere il problema delle vibrazioni di una sbarra non omogenea di lunghezza l, con gli estremi rigidamente fissati, che è formata da due

sbarre omogenee congiunte nel punto $x = c$ $(0 < c < l)$ se la deviazione iniziale ha la forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c} x & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \dfrac{h}{l-c} (l-x) & \text{per } c \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

e le velocità iniziali sono nulle.

21. Determinare le vibrazioni stabili di una sbarra non omogenea che ha un estremo fissato, mentre l'altro è soggetto all'azione della forza $F(t) = A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \operatorname{sen} \omega_2 t$.

22. Determinare le vibrazioni stabili di una sbarra non omogenea composta di due sbarre omogenee congiunte nel punto $x = c$ quando un estremo della sbarra è fissato e l'altro si sposta in base alla legge

$u(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t$.

§ 4. Problemi con dati relativi alle caratteristiche

1. Impostazione del problema. Consideriamo alcuni problemi che rappresentano uno sviluppo del primo problema ai limiti per l'equazione delle vibrazioni di una corda. Per semplicità, studieremo i fenomeni in prossimità di un estremo supponendo l'altro lontano, all'infinito, cioè considereremo quale problema iniziale il problema per la retta infinita da una parte.

L'equazione delle vibrazioni della corda $u_{t't'} = a^2 u_{xx}$ è simmetrica rispetto alle variabili x e t ponendo $a^2 = 1$, cioè cambiando la scala dei tempi grazie alla variabile introdotta $t = at'$. Tuttavia le condizioni aggiuntive implicano un'asimmetria nell'interpretazione matematica di x e t: nelle condizioni iniziali (per $t = 0$) vengono assegnate due funzioni $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$, mentre nelle condizioni al contorno (per $x = 0$) è data una sola funzione $u(0, t)$.

Come è stato notato nel § 2, n. 9, fra le funzioni e le loro derivate normali per $t = 0$ e $x = 0$ esiste la relazione

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \qquad (a^2 = 1)$$

per un valore arbitrario di z. Ne segue che per $x = 0$ e $t = 0$ è impossibile assegnare tutte queste funzioni in maniera indipendente; soltanto tre condizioni sono arbitrarie, ciò indica l'impossibilità di impostare simmetricamente le condizioni complementari.

Le condizioni aggiuntive si possono assegnare sulle rette $x = 0$, $t = 0$ (abbiamo avuto a che fare finora con problemi di questo genere) oppure su certe curve del piano delle fasi. Le condizioni al contorno si possono assegnare ad esempio su una curva C_1 $(x = R_1(t))$, ma affinché questo problema abbia soluzione, la curva C_1, oltre ad essere sufficientemente liscia, deve anche soddisfare ad alcune condizioni aggiuntive.

Consideriamo il processo di vibrazione del gas in un tubo a frontiera variabile (pistone mobile). È chiaro che la velocità di spostamento della frontiera che si muove in base alla legge $x = f_1(t)$ non si può supporre arbitraria: essa non deve superare la velocità del suono a $\left(\frac{df_1(t)}{dt} < a\right)$. La conseguenza geometrica di questo fatto è che la curva C_1 $(x = f_1(t))$ deve essere separata mediante la caratteristica dalla linea $t = 0$ che porta le condizioni iniziali (fig. 25). Se almeno in un punto la curva C_1 fosse più bassa della caratteristica $x = at$, il valore della funzione $u(x, t)$ sarebbe definito completamente dalle condizioni iniziali e non potrebbe essere dato in modo arbitrario. Il significato fisico di ciò è legato al fatto che nel caso di velocità del gas superiori alla velocità del suono l'equazione dell'acustica non ha più senso e si deve ricorrere ad equazioni non lineari della dinamica dei gas *).

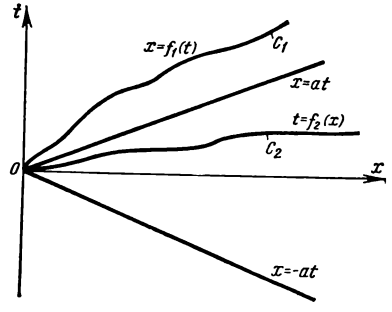


Fig. 25

Le condizioni iniziali si possono assegnare non soltanto sull'asse $t = 0$, ma anche su una curva C_2 $(t = f_2(x))$ che deve verificare la condizione $|f_2'(x)| < 1/a$ (in questo caso C_2 giace nel dominio di influenza dei dati iniziali). Problemi di questo tipo si possono risolvere facilmente mediante l'equazione integrale delle vibrazioni (si veda il § 2, n. 7).

Senza proporci di dare un elenco completo di tutti i problemi ai limiti possibili, consideriamo in dettaglio il problema della definizione di una soluzione in base a dati sulle caratteristiche. Spesso questo problema ai limiti è detto *problema di Goursat*. Un problema con dati sulle caratteristiche presenta un grande interesse dal punto di vista delle applicazioni fisiche. Esso si incontra, ad esempio, studiando i processi di assorbimento e di disassorbimento dei gas (si veda Appendice V), processi di essiccamento (si veda il problema 1) e numerosi altri problemi.

2. Metodo delle approssimazioni successive per il problema di Goursat. Consideriamo il problema elementare con dati sulle caratteristiche

$$\left.\begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

*) Si veda Appendice IV, pag. 159.

Le condizioni aggiuntive sono date sulle rette $x = 0$ e $y = 0$ che sono caratteristiche dell'equazione (1). Supporremo che le funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(y)$ siano derivabili e soddisfino alla condizione di coniugazione $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Integrando successivamente rispetto a x e y l'equazione (1), otteniamo

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi$$

ossia

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

In tal modo, per un'equazione elementare non contenente le derivate prime u_x, u_y e la funzione cercata, la soluzione si presenta nella forma analitica esplicita (2). Dalla formula (2) derivano immediatamente l'unicità e l'esistenza della soluzione del problema in esame.

Passiamo ora alla soluzione dell'equazione lineare di tipo iperbolico

$$u_{xy} = a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + f(x, y) \tag{3}$$

sotto le condizioni aggiuntive sulle caratteristiche $x = 0$ e $y = 0$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \tag{3'}$$

dove $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(y)$ verificano le condizioni di derivabilità e di coniugazione. Supporremo i coefficienti a, b e c funzioni continue di x e y.

La formula (3) mostra che la funzione $u(x, y)$ verifica l'equazione integro-differenziale

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{4}$$

Per risolverla, ricorriamo al metodo delle approssimazioni successive. Consideriamo la funzione

$$u_0(x, y) = 0$$

quale approssimazione nulla. Allora la formula (4) fornisce per le approssimazioni successive le seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \Big[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \\ &+ b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, u_{n-1} \Big] d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Notiamo, fra l'altro, che

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \Big[a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \\ &+ b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, u_{n-1} \Big] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \Big[a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \\ &+ b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, u_{n-1} \Big] d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dimostriamo la convergenza uniforme delle successioni

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)\right\}.$$

A tal fine consideriamo le differenze

$$z_n(x, y) = u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) =$$

$$= \int_0^y \int_0^x \Big[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, z_{n-1}(\xi, \eta) \Big] d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \int_0^y \Big[a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} +$$

$$+ b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, z_{n-1}(x, \eta) \Big] d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} =$$

$$= \int_0^x \Big[a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, z_{n-1}(\xi, y) \Big] d\xi.$$

Sia M la frontiera superiore dei valori assoluti dei coefficienti $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ e H la frontiera superiore dei valori assoluti di $z_0 = u_1(x, y)$ e delle sue derivate

$$|z_0| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < H$$

al variare di x e y all'interno del quadrato $(0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant L)$. Costruiamo stime maggiorate per le funzioni z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. È evidente che

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM\frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

Supponiamo che si verifichino le stime ricorrenti

$$|z_n| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

dove $K > 0$ è un numero costante il cui valore verrà precisato più avanti. Partendo da queste stime e utilizzando la formula per la $(n+1)$-esima approssimazione, dopo alcune semplificazioni che rendono più forte la disuguaglianza, otteniamo

$$|z_{n+1}| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial y}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

dove

$$K = L + 2.$$

A secondi membri di queste disuguaglianze figurano, a meno dei fattori di proporzionalità, termini generali dello sviluppo e^{2KLM}.

Queste stime mostrano che le successioni di funzioni

$$u_n = u_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

convergono uniformemente alle funzioni limite che indichiamo con

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y),$$

$$v(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$

$$w(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

Passando al limite sotto il segno di integrale nelle formule (5) e (6), avremo

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, v + b(\xi, \eta)\, w + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)\, v + b(x, \eta)\, w + c(x, \eta)\, u]\, d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)\, v + b(\xi, y)\, w + c(\xi, y)\, u]\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Le uguaglianze che ne derivano

$$v = u_x,$$

$$w = u_y$$

permettono di stabilire che la funzione $u(x, y)$ verifica l'equazione integro-differenziale

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi \quad d\eta, \quad (4)$$

nonché l'equazione differenziale iniziale (3), come si può provare derivando direttamente la (4) rispetto a x e y. La funzione $\overline{u} = u(x, y)$ verifica, come è facile vedere, anche le condizioni aggiuntive.

Dimostriamo ora l'unicità della soluzione del problema considerato (3)-(3′). Supponendo che esistano due soluzioni $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, otteniamo immediatamente per differenza

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

l'equazione integro-differenziale omogenea

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU)\, d\xi \quad d\eta.$$

Indicando, inoltre, con H_1 l'estremo superiore dei valori assoluti

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H$$

per $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$ e ripetendo le stime ottenute per le funzioni $z_n(x, y)$, vediamo che le disuguaglianze

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

sono valide qualunque sia n. Ne deriva che

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{ossia} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

e ciò dimostra l'unicità della soluzione del problema con dati sulle caratteristiche.

Se i coefficienti a, b e c sono costanti, la sostituzione

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

riduce l'equazione (3) alla forma

$$v_{xy} + C_1 v = f. \tag{8}$$

Per $C_1 = 0$ otteniamo il problema per l'equazione elementare (1) la cui soluzione è data dalla formula (2).

Se $C_1 \neq 0$, la soluzione del problema per l'equazione (8) può essere ottenuta anch'essa in forma analitica esplicita mediante un metodo che verrà dato nel § 5.

Problemi

1. Attraverso un tubo ($x > 0$) riempito di sostanza contenente un liquido viene pompata aria (a velocità v). Sia $v(x, t)$ la concentrazione di liquido nella sostanza assorbente e $u(x, t)$ la concentrazione di vapori liberi. Dedurre l'equazione per le funzioni $u(x, t)$ e $v(x, t)$ descriventi il processo di essiccamento se: 1) il processo è isotermico e 2) l'isoterma dell'essiccamento ha la forma $u = \gamma v$, dove γ è la costante isotermica (si veda anche Appendice V).

2. Attraverso un tubo ($x > 0$) viene pompata a velocità v acqua calda. Sia u la temperatura dell'acqua nel tubo, v la temperatura delle pareti del tubo e u_0 la temperatura del mezzo circostante. Dedurre le equazioni per u e v trascurando la dispersione di temperatura sulla sezione del tubo e sulle pareti e supponendo che sulle frontiere acqua-parete e parete-mezzo esista una differenza di temperatura e si produca uno scambio di calore in base al principio di Newton (si veda il capitolo III, § 1).

§ 5. Risoluzione delle equazioni lineari generali di tipo iperbolico

1. Operatori differenziali coniugati. Deduciamo alcune formule ausiliari di cui avremo bisogno per rappresentare le soluzioni dei problemi ai limiti in forma integrale. Sia

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_x + c(x, y)\, u, \quad (1)$$

dove $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ sono funzioni derivabili, l'operatore differenziale lineare corrispondente a un'equazione lineare di tipo iperbolico. Moltiplicando $\mathscr{L}[u]$ per una funzione v, scriviamo i singoli termini nella forma

$$vu_{xx} = (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, \qquad vbu_y = (bvu)_y - u(bv)_y,$$
$$vu_{yy} = (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, \qquad vcu = ucv,$$
$$vau_x = (avu)_x - u(av)_x.$$

Sommando i singoli termini, otteniamo

$$v\mathscr{L}[u] = u\mathscr{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (2)$$

dove

$$\mathscr{M}(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (3)$$
$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)\, u = \quad (4)$$
$$= -(vu)_x + (2u_x + au)\, v, \quad (4')$$
$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)\, u = \quad (5)$$
$$= (uv)_y - (2u_y - bu)\, v. \quad (5')$$

Due operatori differenziali si dicono *coniugati* se la differenza

$$v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$$

è la somma delle derivate parziali rispetto a x e y di alcune espressioni di H e K.

Gli operatori considerati $\mathscr{L}$ e $\mathscr{M}$ sono, evidentemente, coniugati.

Se $\mathscr{L}[u] = \mathscr{M}[u]$, l'operatore $\mathscr{L}[u]$ si dice autoconiugato.

L'integrale doppio della differenza $v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$, esteso a un dominio G delimitato dal contorno liscio a tratti C, vale

$$\iint_G (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\, d\xi\, d\eta = \int_C (H\, d\eta - K\, d\xi), \quad (6)$$

dove u e v sono funzioni arbitrarie doppiamente derivabili (formula di Green bidimensionale) *).

*) B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, 1965 (ed. russa).

2. Forma integrale della soluzione. Serviamoci della formula (6) per risolvere il seguente problema:

trovare una soluzione dell'equazione lineare di tipo iperbolico

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = \\ = -f(x, y), \tag{7}$$

soddisfacente sulla curva C alle condizioni iniziali

$$u|_C = \varphi(x), \\ u_n|_C = \psi(x) \tag{7'}$$

(u_n è la derivata lungo la direzione della normale alla curva C), *e determinare il dominio in cui la soluzione è definita dalle condizioni* (7').

La curva C è data in questo caso dell'equazione

$$y = f(x),$$

dove $f(x)$ è una funzione derivabile. Imponiamo alla curva C la condizione che ogni caratteristica della famiglia $y - x =$ costante e $y + x =$ costante intersechi la curva C non più di una volta

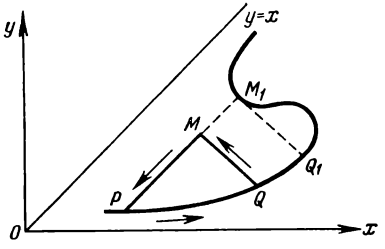


Fig. 26

(a tal fine occorre che $|f'(x)| < 1$). La formula (6) per il triangolo curvilineo MPQ delimitato dall'arco di curva PQ, dalla curva C e dai tratti delle caratteristiche MP e MQ (fig. 26) dà

$$\iint_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\, d\xi\, d\eta = \\ = \int_{Q}^{M} (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int_{M}^{P} (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int_{P}^{Q} (H\, d\eta - K\, d\xi).$$

Trasformiamo i primi due integrali, presi lungo le caratteristiche MQ e MP. Tenendo presente che

$$\left.\begin{aligned} d\xi = -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \text{ su } QM, \\ d\xi = d\eta \quad = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \text{ su } MP \end{aligned}\right\} \quad (ds \text{ è l'elemento d'arco lungo } QM \text{ e } MP)$$

e utilizzando le formule (4) e (5), otteniamo

$$\int_Q^M (H\,d\eta - K\,d\xi) = -\int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right) u\,ds =$$

$$= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right) u\,ds$$

e analogamente

$$\int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}v\right) u\,ds.$$

Di qui e dalla formula (6) segue

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v\right) u\,ds +$$

$$+ \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v\right) u\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi) - \frac{1}{2}\iint_{MPQ} (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v])\,d\xi\,d\eta. \qquad (8)$$

Questa formula è un'identità valida per funzioni u e v qualsiasi, sufficientemente lisce.

Sia u la soluzione del problema sopra formulato con le condizioni iniziali, e la funzione v dipenda dal punto M come da un parametro e soddisfi alle seguenti condizioni:

$$\mathcal{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \quad \text{all'interno del } \triangle MPQ \qquad (9)$$

e

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \text{ sulla caratteristica } MP, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}}v \text{ sulla caratteristica } MQ, \end{aligned}\right\} \qquad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

Dalle condizioni date sulle caratteristiche e dall'ultima condizione ricaviamo

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{su} \quad MP,$$

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{su} \quad MQ,$$

dove s_0 è il valore di s nel punto M. Come abbiamo visto al § 4, l'equazione (9) e i valori della funzione v sulle caratteristiche MP e MQ la definiscono completamente nel dominio MPQ. Spesso la funzione v si dice *funzione di Riemann.*

In tal modo la formula (8) per la funzione u, che verifica l'equazione (7), assume infine la seguente forma:

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q [v(u_\xi\, d\eta + u_\eta\, d\xi) - u(v_\xi\, d\eta + v_\eta\, d\xi) +$$

$$+ uv(a\, d\eta - b\, d\xi)] + \frac{1}{2}\iint_{MPQ} v(M, M')\, f(M')\, d\sigma_{M'} \quad (d\sigma_{M'} = d\xi\, d\eta). \tag{10}$$

Questa formula risolve il problema posto in quanto le espressioni che figurano sotto il segno di integrale lungo PQ contengono funzioni date sull'arco di curva C. Infatti, la funzione v è stata definita sopra, mentre le funzioni

$$u|_C = \varphi(x),$$

$$u_x|_C = u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$

$$u_y|_C = u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

si calcolano mediante i dati iniziali.

La formula (10) mostra che se i dati iniziali sono assegnati sull'arco PQ, essi definiscono completamente la funzione all'interno del triangolo caratteristico PMQ a condizione che la funzione $f(x, y)$ sia nota in questo dominio *).

La formula (10), dedotta supponendo l'esistenza di una soluzione, la definisce mediante i dati iniziali e il secondo membro dell'equazione (7) e, quindi, dimostra l'unicità della soluzione (cfr. la formula di D'Alembert, capitolo II, § 2, pag. 55).

Si può mostrare che la funzione u definita dalla formula (10) soddisfa alle condizioni del problema (7)-(7'). Tuttavia non ci soffermiamo su questa dimostrazione.

3. Interpretazione fisica della funzione di Riemann. Precisiamo il significato fisico della funzione $v(M, M')$. A tal fine troviamo la soluzione dell'equazione non omogenea

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

*) Se la caratteristica interseca la curva C in due punti P e M_1 (si veda la fig. 26), il valore $u(M_1)$ non può essere dato in modo arbitrario, ma viene determinato in base alla formula (10) mediante i dati iniziali sull'arco PQ_1 e i valori di $f(x, y)$ nel $\triangle PM_1Q_1$.

con condizioni iniziali nulle sulla curva C. Tornando alla formula (10), vediamo che la soluzione cercata ha la forma

$$u(M) = \int\int_{MPQ} v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{11}$$

Supponiamo che $f_1(M)$ sia una funzione locale del punto M_1, dappertutto nulla, tranne in un piccolo intorno S_ε del punto M_1, e soddisfacente alla condizione di normalizzazione

$$\int\int_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = 1. \tag{12}$$

In questo caso la formula (11) diventa

$$u_\varepsilon(M) = \int\int_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{13}$$

Utilizzando il teorema della media si può scrivere

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \int\int_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*),$$

dove M_1^* è un punto del dominio S_ε.

Facendo tendere l'ε-intorno S_ε al punto M_1 ($\varepsilon \to 0$) troviamo

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \tag{14}$$

La funzione f_1, come abbiamo visto su alcuni esempi, è di solito una densità di forza e la variabile y si presenta come un tempo. L'espressione

$$\int\int_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = \int\int_{S_\varepsilon} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{15}$$

rappresenta l'impulso della forza. Di qui in virtù della formula (11) concludiamo che $v(M, M_1)$ è la funzione di influenza dell'impulso unitario applicato al punto M_1. La funzione $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$ è stata definita come funzione dei parametri $M(x, y)$, soddisfacente nelle coordinate ξ, η del punto M_1 all'equazione

$$\mathscr{M}_{(\xi, \eta)}[v] = 0 \tag{16}$$

con le condizioni complementari (9a).

Consideriamo la funzione

$$u = u(M, M_1),$$

che è funzione dei parametri $M_1(\xi, \eta)$ e soddisfa nelle coordinate x, y del punto M all'equazione

$$\mathscr{L}_{(x, y)}[u] = 0 \tag{17}$$

con le condizioni complementari (si veda la fig. 27)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{b-a}{2\sqrt{2}}u \text{ sulla caratteristica } M_1Q_1,\\ &\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{b+a}{2\sqrt{2}}u \text{ sulla caratteristica } M_1P_1, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$u(M_1, M_1)=1.$$

Da queste condizioni ricaviamo

$$u(M, M_1)=\left\{\begin{array}{ll} e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b-a}{2\sqrt{2}}ds} & \text{su } M_1Q_1,\\ e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b+a}{2\sqrt{2}}ds} & \text{su } M_1P_1, \end{array}\right\} \tag{19}$$

$$u(M_1, M_1)=1.$$

L'equazione (17) e le condizioni (18) definiscono completamente la funzione u nel quadrangolo $MP_1M_1Q_1$ delimitato dai segmenti delle caratteristiche MP_1, MQ_1 e M_1P_1, M_1Q_1.

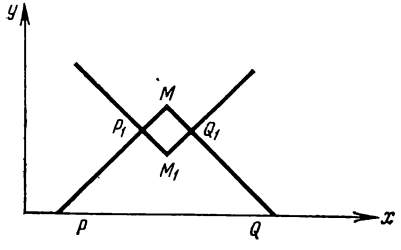


Fig. 27

Applicando la formula (6) al quadrangolo $MP_1M_1Q_1$, otteniamo

$$\int_{MP_1}\int_{M_1Q_1}(v\mathcal{L}[u]-u\mathcal{M}[v])\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int_{M}^{P_1}(H\,d\eta-K\,d\xi)+\int_{Q_1}^{M}+\int_{M_1}^{Q_1}+\int_{P_1}^{M_1}=0$$

($R(\xi, \eta)$ è il punto variabile d'integrazione in MP_1M_1Q). Utilizzando le formule (4) e (5) per K e H e le condizioni (9a) sulle caratteristiche per la funzione v, si possono calcolare facilmente

i due primi integrali a secondo membro

$$\int_{M}^{P_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int_{Q_1}^{M} (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

così come abbiamo fatto per dedurre la formula (10).

Analogamente, utilizzando le uguaglianze (4′) e (5′) e le condizioni (19) per la funzione $u\,(M,\ M_1)$ sulle caratteristiche, troviamo

$$\int_{P_1}^{M_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi\,d\eta - (uv)_\eta\,d\xi] +$$

$$+ \int_{P_1}^{M_1} v\,[(2u_\xi\,d\eta + 2u_\eta\,d\xi) + (au\,d\eta - bu\,d\xi)] =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} d\,(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}\,u\right) v\,ds =$$

$$= (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1}\left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1} \qquad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right).$$

Sommando le quattro uguaglianze, otteniamo

$$2\,(uv)_M = 2\,(uv)_{M_1}$$

ossia

$$u\,(M,\ M_1) = v\,(M,\ M_1), \tag{20}$$

poiché

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

Vediamo così che $v\,(M,\ M_1)$, quale funzione di influenza dell'impulso unitario concentrato nel punto M_1, si può definire come soluzione dell'equazione

$$\mathcal{L}_{(x,\,y)}\,[v\,(M,\ M_1)] = 0, \qquad M = M\,(x,\ y),\ M_1 = M_1\,(\xi,\ \eta)$$

con le condizioni complementari (18).

4. Equazioni a coefficienti costanti. Quale primo esempio di applicazione della formula (10) consideriamo il problema con

i dati iniziali per l'equazione delle vibrazioni di una corda:

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left(y = at,\ f_1 = \frac{f}{a^2}\right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \qquad \left(\psi_1 = \frac{\psi}{a}\right).$$

Nella formula (10) l'arco PQ è un segmento dell'asse $y = 0$. L'operatore

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

è autoconiugato in quanto

$$\mathscr{M}[u] = \mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

Poiché $a = 0$ e $b = 0$, la funzione v sulle caratteristiche MP e MQ vale l'unità. Ne segue che

$$v(M, M') \equiv 1$$

per ogni punto M' interno al triangolo PMQ.

Tenendo poi conto che nel caso considerato

$$d\eta = 0 \quad \text{su} \quad PQ,$$

otteniamo

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q u_\eta\, d\xi + \frac{1}{2}\iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Osservando che $P = P(x - y, 0)$, $Q = Q(x + y, 0)$, dove x e y sono le coordinate del punto $M = M(x, y)$, e tenendo conto delle condizioni iniziali, avremo

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Tornando alle variabili x e t, otteniamo la formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

che abbiamo già incontrato nel n. 9 del § 2 (formula (30)).

Quale secondo esempio consideriamo il problema con le condizioni iniziali per l'equazione a coefficienti costanti

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \tag{21}$$

(a, b, c sono costanti),

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \tag{22}$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \tag{23}$$

La sostituzione

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \tag{24}$$

permette di ricondurre l'equazione (21) alla forma più semplice

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad y > 0 \tag{25}$$

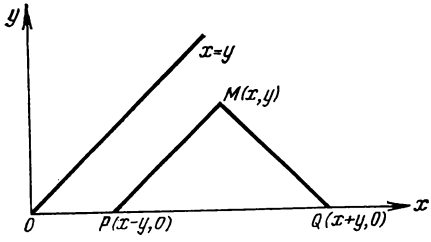


Fig. 28

con le condizioni complementari

$$U|_{y=0} = \varphi(x)\, e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{22'}$$

$$U_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x) \quad -\infty < x < \infty, \tag{23'}$$

qualora, però, i parametri λ e μ siano scelti in modo appropriato ponendo

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \tag{26}$$

La definizione della funzione $U(x, y)$ in base ai dati iniziali e all'equazione (25) si riduce alla costruzione della funzione di Riemann $v(x, y; \xi, \eta)$:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} &v = 1 \text{ sulla caratteristica } MP, \\ &v = 1 \text{ sulla caratteristica } MQ \text{ (fig. 28).} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Cercheremo v sotto la forma

$$v = v(z), \tag{29}$$

dove

$$z = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2} \text{ ossia } z^2 = (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2. \tag{30}$$

La variabile z si annulla sulle caratteristiche MP e MQ, di modo che $v(0) = 1$. In seguito, il primo membro dell'equazione (27) si trasforma nel seguente modo:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

Derivando due volte l'espressione per z^2 rispetto a x e y, otteniamo

$$zz_x = x - \xi,$$
$$zz_y = -(y-\eta),$$
$$zz_{xx} + z_x^2 = 1,$$
$$zz_{yy} + z_y^2 = -1.$$

Di qui e dalla formula (30) troviamo che

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

L'equazione per v diventa

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

a condizione che $v(0) = 1$. La funzione di Bessel di ordine zero (si veda Appendice II, parte prima, § 1)

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z)$$

ossia

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]}\right) \tag{31}$$

è la soluzione di questa equazione. Per trovare $U(x, y)$, ricorriamo ora alla formula (10) che nel dato caso diventa

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q (vU_\eta \, d\xi - Uv_\eta \, d\xi) \quad (d\eta = 0). \tag{32}$$

Calcoliamo preliminarmente l'integrale esteso al segmento PQ ($\eta = 0$)

$$\int_P^Q (vU_\eta - Uv_\eta) \, d\xi = \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0\left(\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - y^2]}\right) U_\eta(\xi, 0) - \right.$$
$$\left. - \frac{U(\xi, 0) \sqrt{c_1} \, y J_0'\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)}{\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - y^2]}} \right\} d\xi. \tag{33}$$

Partendo dalle condizioni iniziali (22′) e (23′) troviamo che

$$U(x,y)=\frac{\varphi_1(x-y)+\varphi_1(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi_1(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}, \tag{34}$$

da cui, in virtù delle (24), (22′) e (23′), ricaviamo la formula

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x-y)\,e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)\,c^{\frac{a+b}{2}y}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x-y}^{x+y}\left\{\frac{b}{2}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{c_1}\,y\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\right\}e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{35}$$

che fornisce la soluzione del problema posto.

Consideriamo il caso particolare $a=0$, $b=0$, cioè l'equazione

$$u_{xx}-y_{yy}+cu=0.$$

Dalla formula (35) ricaviamo immediatamente

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{36}$$

Ponendovi $c_1=0$ e $y=at$, otteniamo la formula di D'Alembert

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{37}$$

che dà la soluzione dell'equazione delle vibrazioni della corda

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

sotto le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \overline{\psi}(x),$$

$$\overline{\psi}(x) = a\psi(x) = au_y(y, 0).$$

Problemi al capitolo II

1. Risolvere il problema 1 del § 4 supponendo che all'istante iniziale la concentrazione di liquido sia costante lungo tutto il tubo e che all'entrata venga pompata aria secca.

2. Risolvere il problema 2 del § 4 supponendo che la temperatura iniziale del sistema sia uguale a u_0 e la temperatura all'uscita dal tubo valga sempre $v_0 > u_0$.

3. Risolvere il sistema di equazioni telegrafiche (si veda la formula (21) del § 1)

$$i_x + Cv_t + Gv = 0,$$

$$v_x + Li_t + Ri = 0$$

per una linea infinita sotto le condizioni iniziali

$$i(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$$

Suggerimento. Ridurre il sistema di equazioni (formula (21) del § 1) a un'equazione del secondo ordine per una delle funzioni $i(x, t)$ o $v(x, t)$, ad esempio,

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\, i_t + GRi,$$

sotto le condizioni iniziali $i(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\frac{\partial i}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i\right)_{t=0} = -\frac{1}{L}\psi'(x) - \frac{R}{L}\varphi(x) = \psi_0(x),$$

ed applicare quindi la formula (35).

4. Esaminare la soluzione dell'equazione telegrafica ottenuta (la formula (35)) per il caso di G e R piccoli. Considerare il caso limite $G \to 0$, $R \to 0$ e ricavare dalla (35) la formula di D'Alembert per risolvere le equazioni delle vibrazioni della corda.

APPENDICI AL CAPITOLO II

I. *Sulle vibrazioni delle corde degli strumenti musicali*

Una corda vibrante suscita vibrazioni nell'aria, percepite dall'orecchio umano come suono emesso dalla corda. L'intensità del suono è caratterizzata dall'energia o dall'ampiezza delle vibrazioni, il suono stesso dal periodo delle vibrazioni e il timbro dal rapporto fra le energie del suono fondamentale e dei sopratoni *). Senza soffermarci sui processi fisiologici di percezione

*) J. W. Rayleigh, *Theory of the sound*, vol. I, capitolo VI.

del suono e sulla trasmissione del suono nell'atmosfera, caratterizzeremo il suono della corda mediante la sua energia, il periodo e la distribuzione dell'energia in sopratoni.

Di solito sono le vibrazioni trasversali ad essere eccitate negli strumenti musicali. Esistono tre tipi di strumenti musicali a corda: a pizzico, a percussione e ad arco. Negli strumenti a percussione (il pianoforte, ad esempio) la vibrazione viene prodotta con un colpo che trasmette alla corda la velocità iniziale senza deviazione iniziale. Negli strumenti musicali a pizzico (l'arpa

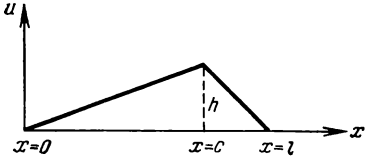


Fig. 29

o la chitarra, ad esempio) le vibrazioni vengono eccitate mediante una certa deviazione iniziale della corda senza velocità iniziale.

Le vibrazioni libere della corda, eccitate in modo arbitrario, si possono rappresentare sotto la forma (vedi il § 3 del capitolo II)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

A titolo di esercizio per il § 3 è stato proposto il problema 1 che costituisce la base della teoria dell'eccitazione delle corde negli strumenti a pizzico. La soluzione di questo problema mostra che se la deviazione iniziale della corda è data sotto forma di un triangolo di altezza h nel punto $x = c$ (fig. 29), allora

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c\,(l-c)} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l}, \quad b_n = 0. \tag{1}$$

L'energia dell'n-esima armonica vale

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = M h^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l-c)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \tag{2}$$

e decresce in modo inversamente proporzionale a n^2.

Il problema 4 del § 3 considera la teoria elementare della percussione della corda mediante un colpo concentrato nel punto c di impulso K. La soluzione del problema si presenta nella

forma

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \omega_n t \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \tag{3}$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l}. \tag{4}$$

In tal modo, percuotendo la corda con un colpo concentrato in un piccolo intervallo di lunghezza δ le energie delle diverse armoniche (per le quali δ è piccola rispetto alla distanza fra i nodi) si differenziano poco, e le vibrazioni della corda così eccitata sono sature di sopratoni. È facile provare questa conclusione in via sperimentale. Toccando una corda tesa (del monocordo, ad esempio) con la lama di un coltello, essa suonerà: il suono emesso sarà saturo di sopratoni. Nel pianoforte la corda è percossa da un martelletto avvolto in cuoio. Questa eccitazione della corda può essere rappresentata dagli schemi seguenti.

1. La corda viene eccitata ricevendo la velocità iniziale costante v_0 nell'intervallo $(c - \delta, c + \delta)$. È il caso corrispondente a un martelletto rigido piano di larghezza 2δ che percuote nel punto c. Il processo di vibrazioni è descritto dalla funzione (si veda il problema 3 del § 3)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \omega_n t,$$

e le energie delle armoniche diverse valgono

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

2. La corda viene eccitata dalla velocità iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \dfrac{x - c}{\delta} \cdot \dfrac{\pi}{2} & |x - c| < \delta, \\ 0 & |x - c| > \delta. \end{cases}$$

Questo caso corrisponde a un martelletto rigido convesso di larghezza 2δ. Il martelletto di questo tipo produce al centro dell'intervallo 2δ la velocità iniziale più grande, ciò che può essere descritto schematicamente dalla funzione suindicata. La vibrazione così eccitata ha la forma (si veda il problema 3 del § 3)

$$u(x, t) = \frac{8v_0 \delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \dfrac{\pi n}{l} \delta \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\dfrac{2\delta n}{l} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \omega_n t$$

è le energie delle armoniche valgono

$$E_n = \frac{16 v_0^2 \delta^2 \rho}{l \pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n \delta}{l} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l}.$$

3. Il martelletto che percuote le corde non è perfettamente rigido. In questo caso le vibrazioni sono determinate non più dalla velocità iniziale, bensì da una forza variabile con il tempo. Siamo giunti così all'equazione non omogenea con secondo membro

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x - c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\tau}, & \text{se } \begin{matrix} |x - c| < \delta, \\ 0 \leqslant t \leqslant \tau, \end{matrix} \\ 0, & \text{se } \begin{matrix} |x - c| > \delta, \\ t > \tau. \end{matrix} \end{cases}$$

La soluzione di questa equazione per $t > \tau$ si presenta sotto la forma

$$u(x, t) = \frac{16 F_0 \tau \delta}{\pi^3 \rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n \delta}{l} \cos \frac{\omega_n \tau}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{n a \tau}{l}\right)^2\right]} \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \operatorname{sen} \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Gli esempi considerati mostrano che la larghezza dell'intervallo percosso e la durata della percussione influiscono sostanzialmente sul valore dell'energia dei sopratoni acuti. Notiamo, inoltre, che l'esistenza del fattore $\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} c$ indica quanto segue: se il centro del colpo del martelletto coincide con il nodo dell'n-esima armonica l'energia dell'armonica corrispondente è nulla.

L'esistenza di sopratoni acuti (a partire dal settimo) viola l'armonia del suono e crea l'impressione di dissonanza *). Viceversa, l'esistenza di sopratoni bassi crea l'impressione di completezza del suono. Nel pianoforte il punto percosso dal martelletto è scelto vicino al punto di congiunzione della corda fra i nodi del settimo e ottavo sopratono per diminuirne l'energia. Regolando la larghezza del martelletto e la sua rigidità, si cerca di aumentare l'energia relativa dei sopratoni bassi (del terzo e del quarto). Nei pianoforti di vecchia costruzione, che emettevano un suono più acuto e fino a una certa misura tintinnante, si usavano martelletti stretti e rigidi.

*) Per esempio, se la frequenza fondamentale (la prima armonica) di 440 vibrazioni al secondo corrisponde a « la » della prima ottava, allora la frequenza di sette volte più grande corrisponde a « sol » della quarta ottava. L'intervallo la-sol, detto piccola settima, ha un suono dissonante sgradevole all'orecchio.

II. *Sulle vibrazioni delle sbarre*

Nei corsi dedicati ai metodi della fisica matematica il posto principale spetta alle equazioni del secondo ordine. Tuttavia numerosi problemi sulle vibrazioni di sbarre, di lamine ecc. conducono ad equazioni di ordine superiore.

A titolo di esempio di equazione del quarto ordine consideriamo il problema delle autovibrazioni di un diapason equiva-

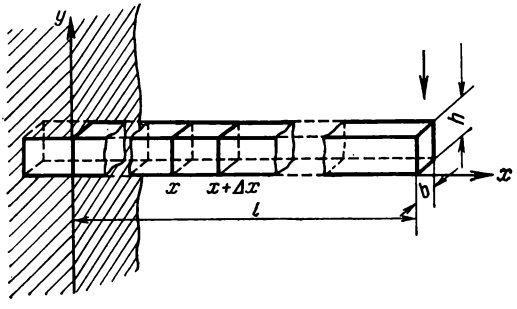


Fig. 30

lente al problema delle vibrazioni di una sbarra rettangolare sottile un estremo della quale è fissato fra le ganasce di una morsa massiccia. La determinazione della forma delle vibrazioni del diapason e della sua frequenza si riduce alla soluzione dell'« equazione delle vibrazioni trasversali della sbarra »

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \qquad (1)$$

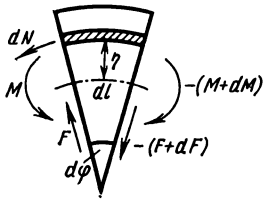


Fig. 31

Con questa equazione si ha a che fare in numerosi problemi delle vibrazioni delle sbarre calcolando la stabilità degli alberi di rotazione o studiando le vibrazioni delle navi *).

Diamo la deduzione elementare dell'equazione (1). Consideriamo una sbarra rettangolare di lunghezza l $(0 \leqslant x \leqslant l)$, di altezza h e larghezza b (fig. 30). Isoliamone un elemento di lunghezza dx. Dopo la flessione le sezioni trasversali dell'elemento, supposte piane, formano l'angolo $d\varphi$. Se le deformazioni sono trascurabili e se la lunghezza dell'asse della sbarra non cambia per flessione ($dl = dx$), allora

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x - \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx.$$

*) Si veda, ad esempio, la monografia di A. N. Krylov, *Vibrazione delle navi* (ed. russa).

Lo strato di sostanza distante di η dall'asse della sbarra $y = 0$ cambia la sua lunghezza di $\eta\, d\varphi$ (fig. 31). In accordo con la legge di Hooke la forza di tensione agente lungo lo strato vale

$$dN = E \cdot b\, d\eta \cdot \frac{\eta\, d\varphi}{dx} = -E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta\, d\eta,$$

dove E è il modulo di elasticità della sostanza di cui è fabbricata la sbarra. Il momento flettente completo delle forze agenti sulla sezione x vale

$$M = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2\, d\eta = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \tag{2}$$

dove

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2\, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

è il momento d'inerzia della sezione rettangolare rispetto al suo asse orizzontale. Indichiamo con $M(x)$ il momento agente sulla parte destra della sbarra in ogni sezione. Sulla sezione $x + dx$ agisce, evidentemente, un momento pari a $-(M + dM)$.

L'eccesso del momento $-dM$ viene equilibrato dal momento delle forze tangenziali

$$dM = F\, dx.$$

Di qui in virtù dell'uguaglianza (2) ricaviamo il valore della forza tangenziale

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \tag{3}$$

Eguagliando la forza risultante agente sull'elemento

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

al prodotto della massa dell'elemento per l'accelerazione

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

dove ρ è la densità della sbarra, S l'area della sezione trasversale (in questo caso trascuriamo il moto rotatorio per flessione), otteniamo l'equazione delle vibrazioni trasversali della sbarra

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{EJ}{\rho S}\right). \tag{1}$$

Come condizioni al contorno per l'estremo fissato $x = 0$ servono l'immobilità della sbarra e l'orizzontabilità della tangente

$$y\,|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

Sull'estremo libero, il momento flettente (2) e la forza tangenziale (3) devono essere nulli, da cui segue che

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

Per determinare completamente il movimento della sbarra, si devono ancora assegnare le condizioni iniziali: la deviazione iniziale e la velocità iniziale

$$y\,|_{t=0} = f(x) \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{6}$$

In tal modo il problema si riduce alla soluzione dell'equazione (1) con le condizioni al contorno (4), (5) e le condizioni iniziali (6).

Risolviamo il problema con il metodo di separazione delle variabili ponendo

$$y = Y(x)\,T(t). \tag{7}$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione (1) avremo

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

Per la funzione $Y(x)$ otteniamo il problema degli autovalori

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \tag{8}$$

$$Y\,|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{d^3Y}{dx^3}\right|_{x=l} = 0. \tag{9}$$

La soluzione generale dell'equazione (8) ha la forma

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, x + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, x + C \cos \sqrt[4]{\lambda}\, x + D \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}\, x.$$

Dalle condizioni $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = 0$ ricaviamo $C = -A$, $D = -B$. Ne consegue che

$$Y(x) = A\left(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, x - \cos \sqrt[4]{\lambda}\, x\right) + B\left(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, x - \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}\, x\right).$$

Le condizioni $Y''(l) = 0$ e $Y'''(l) = 0$ danno

$$A\left(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, l + \cos \sqrt[4]{\lambda}\, l\right) + B\left(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, l + \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}\, l\right) = 0,$$

$$A\left(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, l - \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}\, l\right) + B\left(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, l + \cos \sqrt[4]{\lambda}\, l\right) = 0.$$

Questo sistema omogeneo ha soluzioni non banali A e B se il suo determinante è nullo. Eguagliando a zero il determinante

del sistema, otteniamo l'equazione trascendente seguente che permette di calcolare gli autovalori:

$$\operatorname{sh}^2 \sqrt[4]{\lambda}\, l - \operatorname{sen}^2 \sqrt[4]{\lambda}\, l = \operatorname{ch}^2 \sqrt[4]{\lambda}\, l + 2 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, l \cos \sqrt[4]{\lambda}\, l + \cos^2 \sqrt[4]{\lambda}\, l.$$

Poiché $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, questa equazione si può scrivere sotto la forma

$$\operatorname{ch} \mu \cdot \cos \mu = -1 \quad (\mu = \sqrt[4]{\lambda}\, l). \tag{10}$$

Le radici dell'equazione (10) si possono calcolare facilmente, ad esempio, graficamente *)

$\mu_1 = 1{,}875,$

$\mu_2 = 4{,}694,$

$\mu_3 = 7{,}854,$

. . . . . .

$\mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1)$ per $n > 3.$

L'ultima formula fornisce il valore di μ_n, a meno di tre decimali a cominciare da $n = 3$, e a meno del sesto segno decimale per $n \geqslant 7$.

Consideriamo ora le frequenze di vibrazione del diapason. L'equazione

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

viene verificata dalle funzioni trigonometriche

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \operatorname{sen} 2\pi \nu_n t$$

di frequenza

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

Le frequenze ν_n delle autovibrazioni si comportano come quadrati di μ_n. Poiché

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6{,}267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17{,}548,$$

il secondo autosuono è superiore al suono fondamentale di due ottave e mezzo, cioè superiore alla sesta armonica della corda rispetto al suono fondamentale; la terza autovibrazione, invece, è superiore al suono fondamentale più di quattro ottave. Per esempio, se la frequenza fondamentale del diapason è di 440 vibrazioni al secondo (lo standard accettato per a', la nota *la* della prima ottava), la successiva autofrequenza del diapason sarà

*) Sul calcolo delle radici dell'equazione (10) si veda Rayleigh, *Theory of the sound*, vol. I, capitolo VIII.

uguale a 2757,5 vibrazioni al secondo (fra $c''' = 2637{,}3$ e $f''' = 2794{,}0$, ossia fra le note *mi* e *fa* della quarta ottava della gamma uniformemente temperata), mentre la terza autofrequenza di 7721,1 vibrazioni al secondo esce ormai dai limiti dei suoni propriamente musicali.

Eccitando le vibrazioni del diapason con una percussione, esistono, accanto alla prima, anche armoniche superiori, ciò spiega la presenza di un suono metallico all'istante iniziale. Tuttavia le armoniche di ordine superiore si smorzano presto col tempo e il diapason emette un suono puro fondamentale.

III. *Vibrazioni di una corda tesa*

1. Impostazione del problema. Consideriamo il problema delle vibrazioni di una corda con gli estremi fissati $(0, l)$, in alcuni punti della quale $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sono collocate delle masse concentrate M_i.

Le condizioni nel punto x_i si possono ottenere in due modi. Se al punto x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è applicata una forza concentrata $F_i(t)$, si devono verificare le relazioni

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \tag{1}$$

$$ku_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -F_i. \tag{2}$$

Nel caso considerato con F_i si deve intendere la forza d'inerzia. Sostituendo

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t)$$

nella relazione (2), otteniamo

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0}. \tag{3}$$

È possibile un'altra deduzione della condizione (3). Distribuiamo la massa M_i nell'intervallo $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ con densità costante δ_i e utilizziamo l'equazione delle vibrazioni di una corda non omogenea

$$(\rho + \delta_i) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \tag{4}$$

dove ρ è la densità della corda. Sia $u_\varepsilon(x, t)$ la soluzione di questa equazione.

Integrando l'equazione (4) rispetto a x fra $x_i - \varepsilon$ e $x_i + \varepsilon$ e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, avremo la condizione (3) per la funzione $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$. Non ci soffermiamo sulla giustificazione del passaggio al limite.

Formuliamo completamente il nostro problema: *trovare la soluzione dell'equazione delle vibrazioni*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

soddisfacente alle condizioni al contorno

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

e alle condizioni di coniugazione nei punti $x = x_i$

$$\left.\begin{aligned} u(x_i - 0, t) &= u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{tt}(x_i, t) &= k u_x \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \right\} \tag{7}$$

e alle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

dove $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *sono due funzioni date.*

2. Autovibrazioni di una corda tesa. Soffermiamoci soprattutto sullo studio delle autofrequenze e dei profili delle onde stazionarie nel caso di una corda tesa. A tal fine dobbiamo trovare la soluzione del problema posto, rappresentabile sotto forma di prodotto

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{9}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (5) e tenendo conto delle condizioni al contorno, avremo dopo la separazione di variabili

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{10}$$

e

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(k \frac{dX}{dx}\right) + \lambda \rho X = (kX')' + \lambda \rho X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Le condizioni di coniugazione danno

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$

$$M_i X(x_i)\, T'' = kX' \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} T.$$

Tenendo conto dell'equazione (10), riscriviamo l'ultima relazione nella forma

$$kX' \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

Otteniamo così per la funzione $X(x)$ il seguente problema degli autovalori

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda\rho X = 0, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \tag{11}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &X(x_i - 0) = X(x_i + 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \\ &kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

L'aspetto caratteristico del problema ai limiti considerato è che il parametro λ figura non soltanto nell'equazione, ma anche nelle condizioni complementari.

Non ci soffermiamo sulle dimostrazioni dell'esistenza di un'infinità di autovalori e di autofunzioni, sulla positività degli autovalori, sul teorema di sviluppabilità. Questo problema ai limiti, così, come quelli di tipo ordinario studiati nel § 3 del capitolo II, si riduce a un'equazione integrale che, nel dato caso, è *pesata* ed equivalente a quella in integrali di Stieltjes.

Soffermiamoci in dettaglio sulla deduzione della condizione di ortogonalità delle autofunzioni

$$X_1(x), \; X_2(x), \; \ldots,$$

la quale nel dato caso è diversa dalla (92) del § 3 e si chiama condizione di ortogonalità pesata.

Come è stato mostrato nel capitolo II (cfr. § 3), le autofunzioni per il problema ai limiti

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX}{dx}\right) + \lambda\rho X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

sono ortogonali con peso ρ nell'intervallo $(0, l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n). \tag{14}$$

Distribuendo ogni massa M_i di densità costante δ_i in un intervallo $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$, dove $\varepsilon > 0$ è un numero piccolo, arriviamo al problema delle autovibrazioni di una corda non omogenea di densità $\rho_\varepsilon(x)$. Siano $\lambda_{\varepsilon n}$ e $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ gli autovalori e le autofunzioni di questo problema, che debbano soddisfare alla condizione di ortogonalità

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

Distribuendo gli integrali dell'uguaglianza (15) negli intervalli $(x_i - \varepsilon, \; x_i + \varepsilon)$ e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, otteniamo la

relazione

$$\int_0^l X_m(x)\, X_n(x)\, \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} M_i X_m(x_i)\, X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \quad (16)$$

detta condizione di ortogonalità pesata *).

Lasciamo di nuovo da parte la questione sulla possibilità di questo passaggio al limite.

La condizione di ortogonalità (16) può essere ottenuta anche in modo puramente formale dall'equazione e dalle condizioni (11)-(13). $X_m(x)$ e $X_n(x)$ siano autofunzioni del problema (11)-(13), corrispondenti agli autovalori λ_m e λ_n e soddisfacenti alle equazioni

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_m}{dx}\right) + \lambda_m \rho X_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_n}{dx}\right) + \lambda_n \rho X_n = 0.$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $X_n(x)$ e la seconda per $X_m(x)$, sottraiamo dal primo prodotto il secondo. Integrando l'uguaglianza ottenuta successivamente rispetto a $(0, x_1)$; (x_1, x_2); . . .; (x_N, l) e sommando, avremo

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x)\, X_n(x)\, \rho(x)\, dx -$$

$$- \sum_{i=0}^{k} \int_{x_i}^{x_i+1} \frac{d}{dx}\left[X_m k X_n' - X_n k X_m'\right] dx = 0, \quad (17)$$

dove poniamo $x_0 = 0$, $x_{N+1} = l$. Integrando ciascun addendo della somma e riunendo i termini corrispondenti alle sostituzioni $x = x_i - 0$ e $x = x_i + 0$, otteniamo una somma di addendi della forma

$$A_i = (X_m k X_n' - X_n k X_m')_{x=x_i-0} - (X_m k X_n' - X_n k X_m')_{x=x_i+0}.$$

In questo caso le sostituzioni per $x = 0$ e $x = l$ si annullano in virtù delle condizioni al contorno.

Per calcolare A_i ricorriamo alla condizione di coniugazione

$$\left.\begin{aligned} X_j(x_i - 0) &= X_j(x_i + 0), \\ k X_j'(x_i + 0) - k X_j'(x_i - 0) &= -M_i \lambda_j X_j(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (j = m, n). \quad (13')$$

*) R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Physics Mathematical*, vol. I, capitolo VI.

Riscrivendo A_i sotto la forma

$$A_i = X_m(X_i)\,[kX'_n(x_i - 0) - kX'_n(x_i + 0)] -$$
$$- X_n(x_i)\,[kX'_m(x_i - 0) - kX'_m(x_i + 0)]$$

e utilizzando la formula (13') troviamo

$$A_i = X_m(x_i)\,M_i\lambda_n X_n(x_i) - X_n(x_i)\,M_i\lambda_m X_m(x_i) =$$
$$= M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\,(\lambda_n - \lambda_m).$$

Ora si può scrivere l'uguaglianza (17) nella forma

$$(\lambda_m - \lambda_n)\left\{\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\right\} = 0.$$

Se $\lambda_m \neq \lambda_n$, ne segue immediatamente la condizione di ortogonalità pesata (16).

La norma delle autofunzioni $X_n(x)$ è data dalla formula

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} M_i X_n^2(x_i). \tag{18}$$

È ovvio che sviluppando una funzione $f(x)$ in serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x),$$

i coefficienti di sviluppo veranno determinati mediante la formula

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} M_i f(x_i)\,X_n(x_i)}{\| X_n \|^2}. \tag{19}$$

Il problema con le condizioni iniziali posto nel n. 1 può essere risolto applicando il metodo della separazione delle variabili in base allo schema usuale. Analogamente può essere considerato il problema della vibrazione di una sbarra (o di una trave) in presenza di masse concentrate.

Il problema delle vibrazioni di una corda carica di masse concentrate trova larga applicazione in fisica e nella tecnica. Già Poisson risolse il problema del movimento longitudinale di un carico appeso a una corda elastica. A. N. Krylov *) mostrò che a quel problema si riduce la teoria dell'indicatore della macchina a vapore, delle vibrazioni a torsione di un albero il cui estremo è munito di un volano, delle valvole « vibranti » di vario tipo ecc. Per la teoria di numerosi strumenti di misurazione è molto

*) A. N. Krylov, *Su certe equazioni differenziali della fisica matematica*, capitolo VII, Acc. delle Scienze dell'URSS, 1932 (ed. russa).

importante studiare le vibrazioni a torsione di un filo all'estremo del quale è appesa una massa (uno specchietto, ad esempio).

Problemi di questo tipo hanno acquistato attualmente un'importanza notevole per lo studio delle vibrazioni stabili nelle ali degli aerei. Ma per risolvere questo problema è necessario calcolare le frequenze proprie dell'ala (trave a sezione variabile) carica di masse (motori). Inoltre il detto problema si incontra nel calcolo delle autovibrazioni delle antenne cariche di masse concentrate e di autoinduzioni (si veda in proposito l'Appendice dedicata all'analogia fra le vibrazioni meccaniche e quelle elettromagnetiche).

Non ci soffermiamo qui sui metodi approssimati per determinare gli autovalori e le autofunzioni, analoghi ai metodi approssimati per determinare le grandezze corrispondenti per una corda non omogenea.

3. Corda con un carico applicato a uno degli estremi. Un interesse pratico importante presenta il problema delle vibrazioni di una corda omogenea uno degli estremi della quale è fissato ($x = 0$) e all'altro estremo ($x = l$) è applicato un carico di massa M.

In questo caso la condizione per $x = l$ assume la forma

$$Mu_{tt} = -ku_x\ (l,\ t)$$

e l'ampiezza delle onde stazionarie è data dall'equazione

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

con le condizioni al contorno

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho}\lambda_n X_n(l).$$

Di qui ricaviamo

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x}{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, l},$$

dove λ_n è determinato dall'equazione

$$\operatorname{cotg} \sqrt{\lambda_n}\, l = \frac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}. \tag{20}$$

La condizione di ortogonalità delle funzioni $\{X_n(x)\}$ assume la forma

$$\int_0^l X_n(x)\, X_m(x)\, \rho\, dx + M X_n(l)\, X_m(l) = 0.$$

Calcoliamo il quadrato della norma

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x)\, \rho\, dx + M X_n^2(l).$$

Utilizzando l'equazione (20), otteniamo

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho}\lambda_n l.$$

Il problema con le condizioni iniziali si risolve mediante il metodo usuale.

4. Correzioni degli autovalori. Calcoliamo le correzioni delle frequenze proprie nel caso dei carichi M piccoli e grandi. Per semplicità consideriamo il caso in cui il peso sia applicato a un estremo della corda. Allora sono possibili due casi limite.

1. $M = 0$. L'estremo $x = l$ è libero. Gli autovalori sono dati dalla formula

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}.$$

2. $M = \infty$. L'estremo $x = l$ è rigidamente fissato: $u(l, t) = 0$. Gli autovalori sono determinati mediante la formula

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

Ci interessa il caso di M piccolo ($M \to 0$) e di M grande ($M \to \infty$).

1°. M è piccolo. Troviamo la correzione all'autovalore $\lambda_n^{(1)}$, ponendo

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \varepsilon M, \tag{21}$$

dove ε è un certo numero. Sostituendo l'equazione (21) nell'espressione (20), trascurando M^2 e le potenze superiori di M, troviamo

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)}\left(1 - \frac{2M}{\rho l}\right), \tag{22}$$

vale a dire le autofrequenze di una corda carica per $M \to 0$ aumentano e si avvicinano alle autofrequenze della corda a un estremo libero.

2°. M è grande. Considerando $1/M$ quale parametro di piccolezza, poniamo

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon\frac{1}{M}.$$

L'equazione (20) dà

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}.$$

In questo caso trascuriamo i termini contenenti $1/M^2$ e le potenze superiori di $1/M$.

In tal modo

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}\frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \tag{23}$$

cioè all'aumentare del carico le autofrequenze decrescono avvicinandosi uniformemente a quelle della corda avente i due estremi fissi.

IV. *Equazioni della dinamica dei gas e teoria delle onde d'urto*

1. Equazioni della dinamica dei gas. Legge di conservazione dell'energia. Le equazioni dell'acustica (cfr. il § 1) sono state ottenute supponendo piccole le velocità del gas e piccole le variazioni di pressione, ciò che ha permesso di linearizzare le equazioni dell'idrodinamica.

Nei problemi che si pongono studiando il volo dei razzi e degli aerei veloci nella teoria balistica e delle onde d'esplosione si ha a che fare con processi idrodinamici caratterizzati da grandi velocità e gradienti di pressione. In questo caso l'approssimazione lineare dell'acustica è inapplicabile e si deve ricorrere ad equazioni non lineari dell'idrodinamica. Poiché nella pratica movimenti di questo genere si incontrano per i gas, l'idrodinamica delle grandi velocità si chiama *dinamica dei gas.*

Le equazioni della dinamica dei gas nel caso di moto unidimensionale del gas (nella direzione dell'asse x) hanno la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \qquad \text{(equazione di continuità)}, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{(equazione di moto)}, \tag{2}$$

$$p = f(\rho, T) \qquad \text{(equazione di stato)}. \tag{3}$$

Quindi le equazioni della dinamica dei gas rappresentano equazioni di moto di un liquido perfettamente comprimibile in assenza di forze esterne.

Passiamo ora alla legge di conservazione dell'energia. L'energia per unità di volume vale

$$\frac{\rho v}{2} + \rho \varepsilon, \tag{4}$$

dove il primo termine è l'energia cinetica e il secondo quella interna. Qui ε rappresenta, evidentemente, l'*energia interna* per unità di massa.

Per un gas perfetto si ha $\varepsilon = c_v T$, dove c_v è il calore specifico a volume costante e T la temperatura. Calcoliamo la variazione dell'energia nell'unità di tempo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon). \tag{5}$$

Derivando il primo termine e tenendo conto delle equazioni (1) e (2), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)=\frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)-\rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{6}$$

Per trasformare la derivata $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$ ricorriamo al primo principio della termodinamica esprimente la legge di conservazione dell'energia

$$dQ = d\varepsilon + p\, d\tau, \tag{7}$$

dove dQ è la quantità di calore ottenuta (o trasmessa) dal sistema dall'esterno, $p\, d\tau$ il lavoro speso per variare il volume di una grandezza $d\tau$ ($\tau = 1/\rho$ è il volume specifico).

Se il processo è adiabatico (in assenza di scambio di calore con l'ambiente), allora

$$dQ = 0$$

e

$$d\varepsilon = -pd\frac{1}{\rho}=\frac{p}{\rho^2}d\rho. \tag{8}$$

Utilizzando questa uguaglianza avremo

$$d(\rho\varepsilon)=\varepsilon\, d\rho+\rho\, d\varepsilon=\varepsilon\, d\rho+\frac{p}{\rho}d\rho=w\, d\rho, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)=w\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{10}$$

dove

$$w=\varepsilon+\frac{p}{\rho} \tag{11}$$

è la *funzione termica* o contenuto di calore nell'unità di massa.

La derivata $\frac{\partial w}{\partial x}$ verifica, in virtù delle relazioni (9) e (11), l'equazione

$$\rho v\frac{\partial w}{\partial x}=v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Tenendo conto delle uguaglianze (2), (5), (6), (10) e (12), otteniamo la legge di conservazione dell'energia nella forma differenziale seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \tag{13}$$

Per precisare il significato fisico di questa uguaglianza, integriamola su un certo volume (x_1, x_2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dx=-\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

A primo membro abbiamo la variazione dell'energia nell'unità di tempo nell'intervallo (x_1, x_2), a secondo membro il flusso di energia uscente nell'unità di tempo dal volume in questione.

Se è impossibile trascurare l'effetto di conducibilità di calore, l'equazione della conservazione dell'energia diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right], \tag{14}$$

dove $\varkappa$ è il coefficiente di conducibilità di calore.

2. Onde d'urto. Condizioni di compatibilità dinamica. Nel caso di grandi velocità sono possibili movimenti tali per cui su certe superfici che si spostano nello spazio si producono discontinuità nella distribuzione delle grandezze idrodinamiche (pressione, velocità, densità ecc.). Queste discontinuità sono dette *onde d'urto.*

Sulla superficie della discontinuità (il *fronte dell'onda d'urto*) si devono verificare le condizioni di continuità del flusso di sostanza, dell'energia e della quantità di moto (le *condizioni di Hugoniot*). Passiamo a dedurre queste condizioni.

Trasformiamo l'equazione (2) per avere una forma più conveniente al nostro scopo. Moltiplicando la (1) per v e sommando alla (2), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2). \tag{2'}$$

Riscriviamo ora le equazioni di continuità, di moto e di conservazione dell'energia sotto la forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \tag{1'}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2), \tag{2'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \tag{13}$$

Consideriamo nel piano (x, t) la curva $x=\alpha(t)$ che è la « traccia » della superficie di discontinuità nel piano (x, t). AC sia un certo arco della curva di discontinuità $x=\alpha(t)$, dove A e C sono due punti di coordinate x_1, t_1 e $x_2=x_1+\Delta x$; $t_2=t_1+\Delta t$, rispettivamente. Costruiamo il rettangolo $ABCD$ coi lati paralleli agli assi coordinati.

Scriviamo ora la legge di conservazione della materia sotto la forma integrale seguente:

$$\int_{x_2}^{x_2} [(\rho)_{t_2} - (\rho)_{t_1}]\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}]\, dt, \tag{15}$$

dove a primo membro abbiamo la variazione della massa nell'intervallo (x_1, x_2) durante il tempo (t_1, t_2), e a secondo membro la quantità di sostanza uscente dall'intervallo (x_1, x_2) durante il tempo (t_1, t_2). Se le funzioni ρ e ρv sono continue e derivabili ovunque entro $ABCD$, l'equazione (15) è equivalente alla (1'). Nel caso considerato ciò non si verifica.

Ricorriamo al teorema della media per ciascun termine preso separatamente

$$[(\rho)_{\substack{t=t_2\\x=x^*}} - (\rho)_{\substack{t=t_1\\x=x^{**}}}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{\substack{x=x_2\\t=t^*}} + (\rho v)_{\substack{x=x_1\\t=t^{**}}},$$

dove x^*, x^{**}, t^*, t^{**} sono le medie delle variabili indipendenti x e t.

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ $(x_2 \to x_1)$ e $\Delta t \to 0$ $(t_2 \to t_1)$ e segnando con l'indice 2 i valori della funzione sopra la curva $x = \alpha(t)$ (dietro il fronte dell'onda d'urto) e con l'indice 1 i valori della funzione sotto questa curva (davanti al fronte), otteniamo

$$(\rho_2 - \rho_1)\, U = -(\rho v)_1 + (\rho v)_2, \tag{16}$$

dove

$$U = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

è la velocità dell'onda d'urto.

Le velocità delle particelle davanti al fronte e, rispettivamente, dietro al fronte dell'onda d'urto vengono indicate nel sistema di coordinate che si muove con l'onda d'urto:

$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2.$

La relazione (16) può essere riscritta nella forma

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{16'}$$

Questa uguaglianza esprime la continuità del flusso di materia attraverso il fronte dell'onda d'urto.

Scrivendo nella forma integrale la legge di conservazione della quantità di moto, abbiamo

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_{t_2} - (\rho v)_{t_1}]\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho v^2)_{x_2} - (p + \rho v^2)_{x_1}]\, dt,$$

dove a secondo membro figura la somma dell'impulso delle forze agenti (pressione) e del flusso di quantità di moto. Passando al

limite per $\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, otteniamo la legge di conservazione del flusso di quantità di moto sul fronte

$$U\,[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

ossia

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \tag{17}$$

Analogamente si ottiene anche l'equazione di conservazione dell'energia sul fronte

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_1 U =$$

$$= -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2,$$

la quale dopo alcune facili trasformazioni diventa

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

o, in virtù della condizione (16),

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{18}$$

Quindi, sul fronte dell'onda d'urto si devono verificare le equazioni (le *condizioni di compatibilità dinamica* o le *condizioni di Hugoniot*)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{16'}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \tag{17}$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{18}$$

Le u_1 e u_2 delle prime due equazioni (16) e (17) si esprimono mediante p e ρ:

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

da cui

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} (p_1 - p_2).$$

Sostituendo quindi questa espressione nell'equazione (18), troviamo la relazione fra i valori dell'energia da ambo le parti del fronte

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)$$

e

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2).$$

Consideriamo un gas perfetto per cui

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

cioè

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{19}$$

Ricorrendo alla formula (19) e dopo trasformazioni facili otteniamo l'equazione detta equazione dell'*adiabatica di Hugoniot*

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\, p_2 + (\gamma-1)\, p_1}{(\gamma-1)\, p_2 + (\gamma+1)\, p_1} \tag{20}$$

ossia

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\, \rho_2 - (\gamma-1)\, \rho_1}{(\gamma+1)\, \rho_1 - (\gamma-1)\, \rho_2}. \tag{21}$$

Questa formula permette di determinare una delle grandezze p_1, ρ_1, p_2, ρ_2 se sono note le altre tre.

L'onda d'urto si muove sempre relativamente al gas dalle regioni a pressione più elevata a quelle meno elevata: $p_2 > p_1$ (*teorema di Zemplen*). Ne segue che la densità del gas dietro al fronte è più grande di quella davanti al fronte.

La formula (20) esprime la dipendenza fra p_2 e ρ_2 quando p_1 e ρ_1 sono dati. La funzione $\rho_2 = \rho_2 (p_2)$, con p_1 e ρ_1 dati, è una funzione monotona crescente e tendente a un limite finito per $p_2/p_1 \to \infty$ (onda d'urto di grande ampiezza):

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \tag{22}$$

Questa formula mostra il salto massimo della densità (compressione) che può verificarsi sul fronte dell'onda d'urto. Per un gas biatomico si ha $\gamma = 7/5$ e la compressione massima vale 6.

$$\frac{\rho^2}{\rho_1} = 6.$$

Utilizzando le uguaglianze (16'), (17), (20) e ponendo $p_1 = 0$, troviamo

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2\,(\gamma+1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

Se l'onda d'urto si muove in gas a riposo ($v_1 = 0$), allora la velocità di propagazione dell'onda d'urto vale

$$U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

vale a dire essa cresce proporzionalmente alla radice quadrata di p_2.

Consideriamo un problema elementare della teoria delle onde d'urto, che ammette una soluzione analitica. In un tubo cilindrico $x > 0$ illimitato da un lato e chiuso da un pistone dall'altro ($x = 0$) si trova un gas a densità costante ρ_1 e pressione costante p_1. All'istante iniziale $t = 0$ il pistone comincia a muoversi a velocità costante v nella direzione positiva dell'asse x. Davanti al pistone sorge l'onda d'urto che all'istante iniziale coincide con il pistone e quindi si allontana da esso con velocità $U > v$. Fra il pistone e il fronte dell'onda d'urto sorge la regione 2 in cui il gas ha la velocità del pistone. Davanti al fronte (regione 1) il gas si trova in uno stato imperturbato: $\rho = \rho_1$, $p = p_1$ ($v = 0$).

Tenendo conto delle condizioni sul fronte (16), (17) e (18), è facile determinare la velocità del fronte e anche la grandezza del salto, la densità e la pressione.

Introduciamo le grandezze adimensionali

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \tag{23}$$

dove $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ è la velocità del suono davanti al fronte (nella regione imperturbata 1). Allora le equazioni di conservazione diventano

$$\omega\tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{v} \quad \text{o} \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{v}}{1-\omega}, \tag{24}$$

$$\tilde{p} = 1 + \gamma\tilde{U}\tilde{v} \quad \text{o} \quad \tilde{p} = 1 + \gamma\frac{\tilde{v}^2}{1-\omega}, \tag{25}$$

$$\tilde{p}\omega = 1 + (\gamma - 1)\left(\tilde{U}\tilde{v} - \frac{1}{2}\tilde{v}^2\right). \tag{26}$$

Eliminando $\tilde{p}$ e $\tilde{U}$ otteniamo un'equazione quadratica che permette di determinare ω:

$$2\omega^2 - \omega\,[4 + (\gamma + 1)\tilde{v}^2] + [2 + (\gamma - 1)\tilde{v}^2] = 0. \tag{27}$$

Poiché $\omega < 1$ (essendo $\rho_2 > \rho_1$), consideriamo la radice più piccola

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 - \tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{28}$$

Dalle equazioni (24) e (28) ricaviamo

$$\tilde{U} = \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}, \tag{29}$$

$$\tilde{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 + \gamma\tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{30}$$

dove

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

Calcolando l'integrale (46) otteniamo

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

cioè

$$\lambda_1 = 0,$$

da cui segue che

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Il problema della fuoruscita del gas nel vuoto è così risolto.

Ci siamo limitati sopra allo studio dei problemi più elementari della dinamica dei gas. Per uno studio più approfondito si veda la letteratura specializzata *).

V. *Dinamica dell'assorbimento dei gas*

1. Equazioni descriventi il processo di assorbimento dei gas. Consideriamo il problema dell'*assorbimento* dei gas **). Supponiamo che attraverso un tubo (che consideriamo come asse coordinato x) riempito di una sostanza assorbente passi una miscela gassosa. Indichiamo con $a\ (x,\ t)$ la quantità di gas assorbita dall'unità di volume della sostanza assorbente e con $u\ (x,\ t)$ la concentrazione di gas nei pori dello strato assorbente x.

Scriviamo l'equazione di bilancio della sostanza supponendo che la velocità del gas v sia sufficientemente alta e che la diffusione non incida sostanzialmente sul trasporto del gas. Consideriamo lo strato assorbente da x_1 a x_2 durante l'intervallo di tempo da t_1 a t_2. È ovvio che per esso si può scrivere l'equazione di bilancio

$$[vu \mid_{x_1} - vu \mid_{x_2}]\, S\Delta t = [(a + u) \mid_{t_2} - (a + u) \mid_{t_1}]\, S\Delta x, \qquad (1)$$

la quale dividendo per $\Delta x \Delta t$ e passando al limite per $\Delta x \to 0$

---

*) N. E. Kočin, I. A. Kibel' e N. V. Roze, *Idrodinamica teorica*, parte II, capitolo I, Mosca, 1963 (ed. russa); L. Landau e E. Lifšits, *Meccanica dei mezzi continui*, capitolo VII (in via di pubblicazione presso Editori Riuniti Edizioni Mir); Ja. B. Zeldovič, *Teoria delle onde d'urto ed introduzione alla dinamica dei gas*, Mosca, 1946 (ed. russa); L. I. Sedov, *Propagazione di onde d'esplosione forti*, Matematica applicata e meccanica, vol. X, fasc. 2, Mosca, 1946 (ed. russa).

**) A. N. Tichonov, A. A. Žuchovitskij e Ja. L. Zabežinskij, *Assorbimento di un gas dalla corrente d'aria da uno strato di sostanza granulosa*, ŽFCh, 20, fasc. 10, Mosca, 1946 (ed. russa).

e $\Delta t \to 0$ diventa

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(a+u). \tag{2}$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta la quantità di gas che si accumula nell'unità di lunghezza e di tempo per il trasporto; il secondo membro è la quantità di gas consumata per elevare la concentrazione del gas assorbito e di quello nei pori. A questa equazione di bilancio va aggiunta l'equazione cinetica di assorbimento

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - y), \tag{3}$$

dove β è il coefficiente cinetico, y la concentrazione di gas che si trova in « equilibrio » con la quantità di gas assorbito.

Le grandezze a e y sono connesse dalla relazione

$$a = f(y) \tag{4}$$

che è caratteristica della sostanza assorbente.

La curva $a = f(y)$ si dice *isoterma dell'assorbimento*. Se

$$f(y) = \frac{y u_0}{\gamma (u_0 + py)},$$

l'isoterma è detta *isoterma di Langmuir*. La forma più semplice della funzione f corrisponde all'*isoterma di Henry* valida per il dominio di piccole concentrazioni

$$a = \frac{1}{\gamma} y, \tag{5}$$

dove $1/\gamma$ è il coefficiente di Henry.

In questo caso abbiamo il problema seguente:

trovare le funzioni $u(x, t)$ *e* $a(x, t)$ *dalle equazioni*

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - \gamma a) \tag{6}$$

con le condizioni aggiuntive

$$\left.\begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$u(0, t) = u_0, \tag{8}$$

dove u_0 *è la concentrazione di gas all'entrata.*

Trascurando la derivata $\frac{\partial u}{\partial t}$, che rappresenta il consumo di gas per elevare la concentrazione libera nei pori della sostanza assorbente, rispetto alla derivata $\frac{\partial a}{\partial t}$ che è il consumo di gas per elevare

la quantità di gas assorbito, otteniamo *):

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - \gamma a), \tag{6}$$

$$a(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u_0.$$

Eliminiamo la funzione $a(x, t)$ derivando la prima equazione rispetto a t e utilizzando la seconda equazione

$$-\nu u_{xt} = \beta u_t - \beta\gamma a_t = \beta u_t + \beta\nu\gamma u_x$$

ossia

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\nu} u_t + \beta\gamma u_x = 0.$$

Determiniamo la condizione iniziale per u, ponendo nella prima equazione $t = 0$,

$$-\nu u_x(x, 0) = \beta u(x, 0), \quad u(0, 0) = u_0,$$

da cui ricaviamo

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\nu}x}.$$

Il problema della determinazione della funzione $u(x, t)$ si è ridotto all'integrazione dell'equazione

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\nu} u_t + \beta\gamma u_x = 0 \tag{9}$$

con le condizioni aggiuntive

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\nu}x}, \tag{10}$$

$$u(0, t) = u_0. \tag{8}$$

Le curve

x = costante, t = costante

sono caratteristiche di questa equazione. Le condizioni aggiuntive in questo problema rappresentano i valori che la funzione cercata $u(x, t)$ assume sulle caratteristiche. Analogamente si pone il problema per la funzione $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{\nu} a_t + \beta\gamma a_x = 0, \tag{11}$$

$$a(x, 0) = 0, \tag{7}$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{\gamma}(1 - e^{-\beta\nu t}). \tag{12}$$

*) Per il sistema di equazioni (2') e (6) è sufficiente una condizione iniziale in quanto l'asse $t = 0$ diventa caratteristica nel dato caso. Per i dettagli si veda la nota alla pag. 173.

Si deve notare che un problema simile si incontra studiando altre questioni (essiccamento mediante corrente d'aria, riscaldamento di un tubo mediante corrente d'acqua calda, ad esempio) *).

La soluzione dell'equazione (9) può essere ottenuta in forma esplicita mediante il metodo esposto nel § 5 ed è data dalla for-

---

*) Passando all'equazione (2'), abbiamo trascurato il termine u_t. Tuttavia è facile notare che arriveremo alla stessa equazione se introduciamo le seguenti variabili:

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \qquad t = \tau + \frac{\xi}{v}, \qquad \xi = x, \qquad x = \xi$$

(fig. 32) nelle quali il tempo nel punto x viene calcolato a partire da $t_0 = x/v$, cioè dall'istante in cui la miscela gassosa giunge in questo punto. Infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

nell'equazione (2) diventano

$$-v\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \tag{2''}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \tag{6}$$

Le condizioni iniziali (7) e le equazioni (2) e (6) danno

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= 0, \\ u_t(x,\ 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Nel dominio delimitato dalla retta $t = 0$ e dall'asse ξ abbiamo il problema della determinazione della funzione u a partire dalle condizioni iniziali

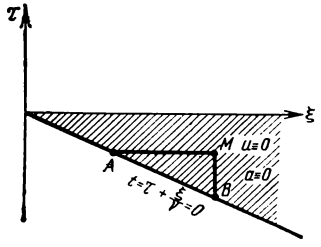


Fig. 32

(7') (problema di Cauchy). È evidente che in questo dominio $u(x,\ t) \equiv 0$ (e anche $a \equiv 0$). Si vede dalle equazioni (2') e (6) che per $\tau = 0$ la funzione $u(x,\ t)$ ha una discontinuità mentre la funzione $a(x,\ t)$ resta continua. Quindi, per $\tau = 0$ la funzione u, come è stato mostrato sopra, viene determinata a partire dall'equazione (2') per $a(x,\ 0) = 0$. Determinando, come è stato fatto alla pag. 172 (si vedano le formule (10) e (12)), i valori $u(x,\ 0)$ e $a(0,\ t)$, otteniamo per le funzioni $u(x,\ t)$ e $a(x,\ t)$ problemi con dati sulle caratteristiche.

mula

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1}\left[e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0 \times \right.$$

$$\left. \times (2\sqrt{\tau})\, d\tau\right], \tag{13}$$

dove $x_1 = \frac{\beta v}{\nu}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ sono due variabili adimensionali, I_0 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero con argomento immaginario.

Utilizzando le formule asintotiche per la funzione I_0 è facile ottenere la rappresentazione asintotica della soluzione per valori grandi degli argomenti.

2. Soluzione asintotica. Sopra abbiamo studiato il processo di assorbimento di un gas dipendente dall'isoterma di assorbimento di Henry, che stabilisce una dipendenza lineare

$$a = \frac{1}{\gamma} y$$

fra la quantità di sostanza assorbita a e una concentrazione di peso uguale y.

Consideriamo l'isoterma di assorbimento di forma generale $a = f(y)$.

Se introduciamo le variabili adimensionali

$$x_1 = \frac{x\beta}{\nu}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{\gamma}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0\gamma},$$

allora il sistema (2'), (6), (7), (8) diventa

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(z u_0) \tag{15}$$

con le condizioni aggiuntive

$$\bar{u}(0, t_1) = 1, \tag{16}$$

$$v(x_1, 0) = 0. \tag{17}$$

Ci interessa il comportamento asintotico delle funzioni che rappresentano una soluzione del sistema (14).

Quanto alla funzione $f_1(z)$ supporremo quanto segue:

1. $f_1(z)$ sia una funzione crescente e $f_1(0) = 0$.

2. $f_1(z)$ abbia derivata continua per tutti i valori di z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

3. La semiretta congiungente l'origine delle coordinate con il punto $(1, f_1(1))$ passi sotto la curva $f_1(z)$ nell'intervallo $0 \leqslant z \leqslant 1$ (fig. 33) ciò che in particolare ha luogo per un'isoterma convessa.

Introducendo la notazione per la funzione inversa

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

cercheremo la soluzione asintotica del problema posto sotto forma di un'onda propagantesi *)

$$\begin{aligned} \widetilde{u} &= \psi(\xi), \\ \widetilde{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned} \qquad \xi = x - \sigma t, \tag{18}$$

dove σ è la velocità di propagazione dell'onda che deve essere determinata.

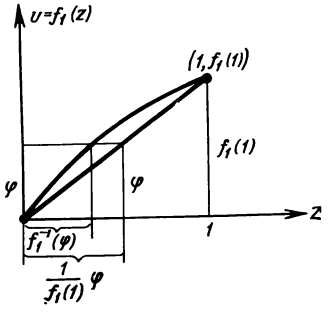


Fig. 33

Ciò significa che a grandi distanze (per $x \to \infty$) o per un grande intervallo di tempo ($t \to \infty$)

$$v(x, t) = \widetilde{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \widetilde{u} = \psi(x - \sigma t).$$

Le concentrazioni $\bar{u}$ e v per $x = \infty$ o $t = \infty$ devono verificare la condizione di equilibrio

$$v = f_1(\bar{u}) \quad \text{o} \quad \bar{u} = F(v).$$

In questo caso dalla condizione (16) segue che

$$\bar{u}\Big|_{\substack{x=0 \\ t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v\Big|_{\substack{x=0 \\ t=\infty}} = f_1(1). \tag{19}$$

Dalla condizione (17) risulta che

$$v\Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u}\Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = F(0) = 0. \tag{20}$$

Le condizioni (19) significano che per $t \to \infty$ ($\xi \to -\infty$) deve stabilirsi dovunque la saturazione.

*) Per semplificare la scrittura al posto di x_1, t_1 scriveremo x, t.

Sostituendo la soluzione supposta nelle equazioni (14) otteniamo

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0, \tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \tag{22}$$

In base alle (21) e (20) concludiamo che

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \tag{23}$$

Allora dalle equazioni (19) segue che

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}\Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \tag{24}$$

ossia, in grandezze adimensionali,

$$\sigma = \gamma\frac{u_0}{a_0}, \quad a_0 = f(u_0). \tag{24'}$$

Dalle (22) e (23) troviamo

$$-\sigma\frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \tag{25}$$

Integrando avremo

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \tag{26}$$

dove $\omega(\varphi)$ è un integrale del primo membro e ξ_0 la costante di integrazione. Di qui la funzione cercata $\varphi(\xi)$ verrà definita a meno della costante incognita ξ_0:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \tag{27}$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \tag{28}$$

Vediamo se può essere definita la funzione ω^{-1} e se le funzioni φ e ψ possono verificare le condizioni poste per $\xi \to \infty$ e $\xi \to -\infty$. Mostriamo che la derivata

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma\frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \tag{29}$$

cioè

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

è una funzione monotona decrescente φ. Infatti, il denominatore nella (29) è uguale a

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

Il primo termine è l'ascissa del punto di ordinata φ giacente sulla semiretta congiungente l'origine delle coordinate con il punto $(1, f_1(1))$ (fig. 33). Poiché, come abbiamo supposto, la curva

$\varphi = f_1(z)$ sta sopra questa semiretta, allora

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant f_1(1))$$

e, di conseguenza,

$\sigma\varphi - f^{-1}_1(\varphi) > 0.$

Inoltre,

$\sigma\varphi - f^{-1}_1(\varphi) = 0$ per $\varphi = 0$ e per $\varphi = f_1(1)$.

Ne segue che

$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty$ per $\varphi = 0$,

$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty$ per $\varphi = f_1(1)$.

Per la funzione inversa abbiamo:

$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1)$ per $\xi = -\infty$,

$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0$ per $\xi = \infty$.

Quindi, in virtù dell'uguaglianza (29) abbiamo

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1 \quad \text{per} \quad \xi = -\infty,$$

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0 \quad \text{per} \quad \xi = \infty.$$

Dunque, tutte le condizioni (19) e (20) sono verificate e rimane dimostrato così che il sistema di equazioni ha una soluzione sotto forma di onda propagantesi con una costante indeterminata ξ_0.

Per determinare ξ_0 integriamo la prima equazione rispetto a t_1 fra 0 e t_0 e rispetto a x da 0 a x_0:

$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau)\, d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\, d\tau\right] +$$

$$+\left[\int_0^{x_0} v(x, t_0)\, dx - \int_0^{x_0} v(x, 0)\, dx\right] = 0. \tag{30}$$

L'uguaglianza ottenuta esprime la legge di conservazione della materia. Passando al limite per $x_0 \to \infty$ ed utilizzando le condizioni iniziali per $\bar{u}$ e v, troviamo

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\, dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\, d\tau = t_0.$$

Supponiamo che per grandi valori di t la soluzione del problema esaminato si avvicini alle funzioni $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ che sono state determinate sopra sotto forma di onde propagantisi.

Determinando ξ_0 dalla condizione

$$\int_0^\infty v(x, t_0)\, dx - t_0 \to 0 \quad (t_0 \to \infty), \tag{31}$$

avremo il valore di ξ_0 che corrisponde alle funzioni $\tilde{u}(x, t)$ e $\tilde{v}(x, t)$.

Trasformiamo l'integrale in questione

$$\int_0^\infty \tilde{v}(x, t_0)\, dx = \int_0^\infty \varphi(x - \sigma t_0)\, dx = \int_0^\infty \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0)\, dx =$$

$$= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^\infty \omega^{-1}(\xi)\, d\xi = \int_{\zeta_1}^\infty \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta \quad \left(\begin{matrix} \zeta = x - \sigma t_0 - \xi_0, \\ \zeta_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{matrix} \right).$$

Indichiamo con φ^* il valore $\omega^{-1}(\zeta)$ per $\zeta = 0$:

$\omega^{-1}(0) = \varphi^*$.

È facile vedere che se $\varphi = \omega^{-1}(\zeta)$ è l'inversa della funzione

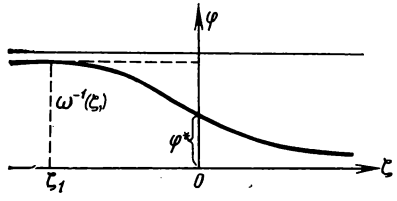


Fig. 34

$\zeta = \omega(\varphi)$, allora (fig. 34)

$$\int_{\zeta_1}^\infty \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta = \int_{\zeta_1}^0 \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta + \int_0^\infty \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \left[-\zeta_1 \omega^{-1}(\zeta_1) + \int_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\zeta_1)} \omega(\varphi)\, d\varphi + \int_0^{\varphi^*} \omega(\varphi)\, d\varphi \right]. \tag{32}$$

Ne segue che al posto dell'uguaglianza limite (31) si può scrivere

$$\int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^\infty \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta - t_0 = \left\{ (\sigma t_0 + \xi_0)\, \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0)} \omega(\varphi)\, d\varphi \right\} - t_0 \to 0 \quad (t_0 \to \infty). \tag{32'}$$

Passiamo al limite per $t_0 \to \infty$. Allora

$$\sigma\varphi\,(-\sigma t_0 - \xi_0) \to \sigma\varphi\,(-\infty) = \sigma f_1\,(1) = 1. \tag{32''}$$

Per calcolare il limite dell'espressione

$$\sigma t_0 \varphi\,(-\sigma t_0 - \xi_0) - t_0,$$

ricorriamo all'equazione (25). Sviluppando $f_1^{-1}(\varphi) = F(\varphi)$ in serie in prossimità del punto $\varphi_0 = f_1(1)$, otteniamo

$$\sigma\varphi - F(\varphi) = \sigma(\varphi - \varphi_0) + 1 - F(\varphi) =$$
$$= \sigma(\varphi - \varphi_0) - [F(\varphi) - F(\varphi_0)] = [\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \ldots,$$

da cui

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \ldots} = d\xi, \tag{33}$$

dove i puntini indicano termini di ordine superiore rispetto a $(\varphi - \varphi_0)$.

Dalla richiesta 3 per la funzione f_1 segue che

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

L'equazione (33) permette di determinare l'ordine di crescita di φ per $\xi \to -\infty$:

$$\varphi = Ae^{k\xi} + \varphi_0, \tag{34}$$

dove A e $k > 0$ sono due costanti.

Dall'uguaglianza (34) segue

$$\lim_{t_0 \to \infty} t_0 [\sigma\varphi\,(-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \to \infty} t_0 A \sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0. \tag{32'''}$$

Passando al limite per $t_0 \to \infty$ in base alla formula (32′) e tenendo conto delle espressioni (32″) e (32‴), otteniamo

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi. \tag{35}$$

Così i profili dell'onda $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ sono completamente determinati.

Interesse particolare presenta l'isoterma di Langmuir. Troviamo la soluzione asintotica dell'assorbimento di gas, che è retta dall'isoterma di Langmuir.

L'equazione (25) diventa

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \dfrac{\varphi}{1 - p\varphi}} = d\xi, \tag{36}$$

dove $\sigma = \frac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ è la velocità dell'onda. Dalla (36) ricaviamo

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

dove

$$\omega(\varphi) = \sigma \int \frac{(1 - p\varphi)\, d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1 - p\varphi)} + A =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - 1 - p\sigma\varphi) - \ln\varphi\right] + A.$$

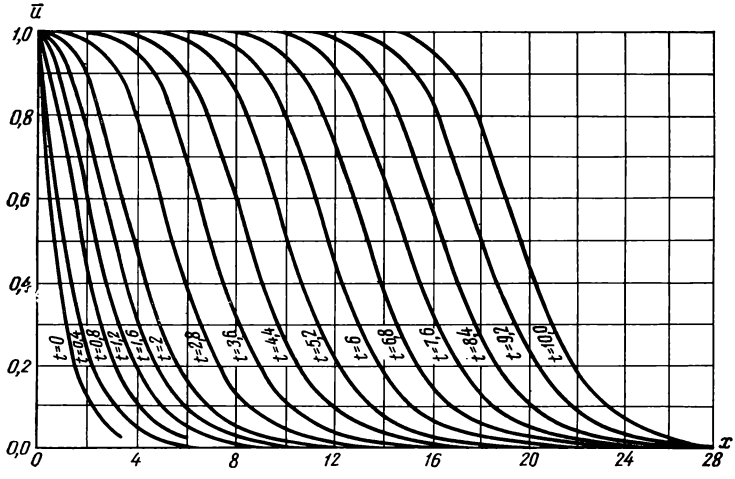


Fig. 35

Quando φ varia da 0 a $f_1(1)$, allora $\omega(\varphi)$ varia ovviamente da $+\infty$ a $-\infty$. Scegliamo A in modo tale che

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

cioè che

$$\omega(\varphi^*) = 0 \quad \text{per} \quad \varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+p}.$$

Sotto questa condizione

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{2}p\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+p}\right)\right]$$

e

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln 2(1 - \sigma\varphi) - \ln 2(1 + p)\varphi\right].$$

Il valore di ξ_0 è dato dalla formula

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi = \ln 2 - 1$$

e non dipende da $p = u_0/y$, cioè dalla concentrazione trasmessa.

La soluzione asintotica cercata ha la forma

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x,\ t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \tilde{u}(x,\ t) &= \sigma\omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \tag{37}$$

dove $\omega^{-1}(\xi)$ è l'inversa della funzione $\omega(\varphi)$.

La fig. 35 fornisce i risultati dell'integrazione numerica delle equazioni (14) per l'isoterma di Langmuir mediante il metodo delle differenze finite. Questi grafici sono dati per valori $0 < t \leqslant t_1 = 10$. Per $t = t_1$ i risultati dell'integrazione numerica coincidono con la soluzione asintotica a meno dell'1%. Per i valori $t > t_1$ si possono utilizzare formule asintotiche.

VI. *Analogie fisiche*

Studiando fenomeni fisici diversi spesso troviamo aspetti generali in questi fenomeni. Ciò conduce a formulazioni matematiche aventi le stesse equazioni per descrivere fenomeni fisici diversi. Come semplice esempio consideriamo l'equazione

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0,$$

che descrive processi vibratori in sistemi elementari: il pendolo matematico, le vibrazioni di un carico sotto l'azione di una molla, le oscillazioni elettriche in un circuito semplice con capacità e induttanza ecc. Il carattere comune di equazioni relative a processi fisici diversi permette conclusioni su un fenomeno meno studiato in base a qualità di un altro. Così lo studio di diversi fenomeni acustici può essere reso più facile grazie allo studio di schemi elettrici simili.

La propagazione delle oscillazioni elettriche in sistemi a costanti distribuite è descritta, come è noto, dalle equazioni telegrafiche

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t} + GV, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I}{\partial t} + RI, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dove C, G, L, R sono rispettivamente la capacità, la caduta, l'induzione e la resistenza distribuite del sistema. Se si possono trascurare la resistenza e la caduta di corrente elettrica, allora

per V e I si ottengono due equazioni d'onda ordinarie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0,$$

e le equazioni (1) diventano

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Risolvendo il problema della propagazione del suono in una direzione, ad esempio studiando i flussi d'aria nei tubi, arriviamo alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dove v è la velocità delle particelle oscillanti, ρ la densità, p la pressione e $\tau = p_0\gamma$ il coefficiente di elasticità dell'aria.

La somiglianza delle equazioni (2) e (3) permette di stabilire una corrispondenza fra grandezze acustiche ed elettriche. Alla differenza di potenziale corrisponde la pressione, alla corrente la velocità delle particelle. La densità, che determina le proprietà inerziali del gas, corrisponde all'induttanza del circuito elettrico, mentre alla capacità del circuito corrisponde $1/\tau$, cioè l'inverso del coefficiente di elasticità. La stessa corrispondenza può essere stabilita anche mediante le espressioni dell'energia cinetica e potenziale per i sistemi elettrico ed acustico.

Tornando alle equazioni (1) possiamo introdurvi analoghi acustici della resistenza e della caduta. Si deve tener conto della resistenza acustica nei casi in cui nello studio del movimento del gas ha importanza l'attrito del gas contro le pareti del recipiente. Per analogia con la resistenza elettrica che è definita come rapporto fra tensione e corrente, si può introdurre anche la resistenza acustica, definita come rapporto fra pressione e flusso di un gas nel mezzo, proporzionale alla velocità delle particelle di gas: $R_A = p/uv$. Nel caso in cui il gas si muova in un mezzo poroso, si deve introdurre una grandezza analoga alla caduta nei circuiti elettrici. Questa grandezza indicata con P si chiama porosità ed è determinata da una parte del volume di materia riempita d'aria.

L'analogo meccanico dell'equazione telegrafica è l'equazione delle vibrazioni longitudinali di una sbarra, la quale alla pari

delle equazioni (2) può essere scritta sotto la forma seguente:

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial v}{\partial t},$$

dove T è la tensione della sbarra, v la velocità dei punti oscillanti, ρ la densità e k il coefficiente di elasticità della sbarra.

Confrontando questa equazione con la (2), possiamo stabilire un'analogia fra grandezze meccaniche ed elettriche. Così, stabilendo una corrispondenza fra la tensione elettrica e quella della corda, fra la corrente e la velocità delle particelle, vediamo che l'inverso del coefficiente di elasticità corrisponde alla capacità, e la densità all'induttanza.

Quindi, lo studio di problemi dinamici simili permette di stabilire una corrispondenza fra tutta una serie di grandezze elettriche, acustiche e meccaniche. Questa corrispondenza può essere illustrata dalla tabella seguente *):

	Sistema elettrico	Sistema acustico	Sistema meccanico
Variabili	Tensione V	Pressione p	Tensione (forza) T
	Corrente I	Velocità delle particelle v	Velocità di spostamento $\dot{x}$
	Carica e	Spostamento u	Spostamento x
Parametri	Induttanza L	Inerzia (densità) ρ	Densità della massa ρ_m
	Capacità C	Capacità acustica $C_A=1/\tau$	Mollezza $C_M=1/k$
	Resistenza R	Resistenza acustica R_A	Resistenza meccanica R_M

Le considerazioni esposte sopra permettono di ottenere in alcuni problemi acustici dei dati sul carattere dei fenomeni e anche di fornire soluzioni dei problemi.

Così il problema della propagazione dell'aria nei pori per onde armoniche semplici conduce alle equazioni **)

$$-i\omega\rho_m u+ru=-\operatorname{grad} p,$$

$$\Delta p+i\frac{\gamma P\omega}{\rho c^2}(r-i\omega\rho_m)\,p=0,$$

dove u è la velocità volumetrica dell'aria attraverso i pori, p la pressione, ρ la densità, ρ_m la densità d'aria efficace nei pori che

*) Si veda, ad esempio, H. Olsen, *Analogie dinamiche*.

**) Si veda V. V. Furduev, *Elettroacustica*, Gostechizdat, Mosca, 1948 (ed. russa).

può essere superiore a ρ in quanto nei pori assieme con l'aria possono oscillare anche le particelle della sostanza, P la porosità, c ed ω la velocità e la frequenza del suono, r la resistenza alla corrente, che caratterizza la diminuzione della pressione nella sostanza. Ponendo $r = R_A$, $\rho_m = L_A$, $\frac{\nu P}{\rho c^2} = C_A$, otteniamo le equazioni sotto la forma

$$L_A \frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\text{grad } p,$$

$$C_A L_A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

Queste equazioni sono completamente simili a quelle di propagazione delle oscillazioni elettriche in un circuito. Pertanto analogamente alla resistenza d'onda del circuito

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

possiamo scrivere immediatamente l'espressione della resistenza detta impedenza caratteristica della sostanza porosa

$$Z = c\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho_w - i\frac{r}{\omega}}{\gamma P}}$$

considerando in questo caso $G = 0$. L'espressione dell'impedenza caratteristica indica lo smorzamento delle onde propagantisi in un materiale poroso.

L'analogia stabilita fra i fenomeni elettrici ed acustici dà la possibilità di sostituire lo studio di alcuni problemi acustici con quello di schemi elettrici equivalenti.

Il metodo di similitudine ha trovato ultimamente una larga applicazione nel modellare dispositivi calcolatori in cui per risolvere un'equazione corrispondente a un processo fisico viene costruito uno schema elettrico equivalente.

Capitolo III

EQUAZIONI DI TIPO PARABOLICO

Le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico si incontrano spesso studiando processi di conduzione di calore e di diffusione. L'equazione elementare di tipo parabolico

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (y = a^2 t)$$

si chiama usualmente *equazione della conduzione termica.*

§ 1. Problemi elementari che conducono ad equazioni di tipo parabolico. Impostazione dei problemi ai limiti

1. Problema lineare della propagazione di calore. Consideriamo una sbarra di lunghezza l, isolata termicamente ai lati e sufficientemente sottile affinché in ogni istante si possa ritenere uguale la temperatura in tutti i punti della sezione trasversale. Se le temperature u_1 ed u_2 agli estremi della sbarra sono mantenute costanti, allora, come è ben noto, lungo la sbarra si stabilisce una distribuzione lineare di temperature (fig. 36)

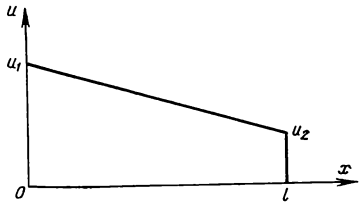


Fig. 36

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \tag{1}$$

In questo caso il calore andrà dall'estremo più riscaldato a quello più freddo. La quantità di calore passante attraverso la sezione della sbarra di area S per unità di tempo è data dalla formula sperimentale

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{2}$$

dove k è il coefficiente di conduzione termica dipendente dal materiale della sbarra.

Il flusso di calore è supposto positivo se va verso le x crescenti.

Consideriamo il processo di distribuzione della temperatura nella sbarra. Questo processo può essere descritto dalla funzione $u(x, t)$ che rappresenta la temperatura nella sezione x all'istante t. Troviamo l'equazione che deve soddisfare alla funzione $u(x, t)$. A tale scopo formuliamo le leggi fisiche che determinano i processi connessi alla distribuzione di calore.

1. *Legge di Fourier.* Se la temperatura del corpo non è uniforme, allora in esso nascono correnti termiche dirette dai punti più caldi a quelli più freddi.

La quantità di calore passante attraverso la sezione x in un intervallo di tempo $(t, t + dt)$ è pari a

$$dQ = qS\,dt, \tag{3}$$

dove

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

è la densità di flusso di calore, uguale alla quantità di calore passante nell'unità di tempo attraverso l'area di 1 cm^2. Questa legge rappresenta una generalizzazione della formula (2). Le si può attribuire la forma integrale seguente:

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt, \tag{5}$$

dove Q è la quantità di calore passante nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) attraverso la sezione x. Se la sbarra non è omogenea, allora k è una funzione di x.

2. La quantità di calore che deve essere trasmessa a un corpo omogeneo per aumentarne la temperatura di Δu è uguale a

$$Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u, \tag{6}$$

dove c è il calore specifico, m la massa del corpo, ρ la sua densità, V il volume.

Se la temperatura varia in modo diverso in diversi punti della sbarra e se la sbarra non è omogenea, allora

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta u(x)\,dx. \tag{7}$$

3. Il calore può comparire o essere assorbito all'interno della sbarra (ad esempio, al passare di corrente elettrica, in seguito a reazioni chimiche ecc.). L'emanazione di calore può essere caratterizzata dalla densità delle sorgenti di calore $F(x, t)$ nel punto x

all'istante t *). Sotto l'azione di queste sorgenti nel tratto di sbarra $(x,\ x + dx)$, nell'intervallo di tempo $(t,\ t + dt)$, verrà emanata la quantità di calore

$$dQ = SF\,(x,\ t)\,dx\,dt \tag{8}$$

ossia, sotto forma integrale,

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F\,(x,\ t)\,dx\,dt, \tag{9}$$

dove Q è la quantità di calore emanata nel tratto di sbarra $(x_1,\ x_2)$ durante l'intervallo di tempo $(t_1,\ t_2)$.

L'equazione della conduzione termica si ottiene calcolando il bilancio di calore su un certo tratto $(x_1,\ x_2)$ in un intervallo di tempo $(t_1,\ t_2)$. Applicando la legge di conservazione dell'energia e utilizzando le formule (5), (7) e (9), si può scrivere l'uguaglianza

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}\,(x,\ \tau)\Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}\,(x,\ \tau)\Big|_{x=x_1} \right] d\tau +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F\,(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau = \int_{x_1}^{x_2} c\rho \left[u\,(\xi,\ t_2) - u\,(\xi,\ t_1) \right] d\xi, \tag{10}$$

che rappresenta l'equazione della conduzione termica in forma integrale.

Per ottenere l'equazione della conduzione termica in forma differenziale supponiamo che la funzione $u\,(x,\ t)$ abbia due derivate continue u_{xx} e u_t **).

Applicando il teorema della media otteniamo l'uguaglianza

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial x}\,(x,\ \tau)\Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}\,(x,\ \tau)\Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_3} \Delta t +$$

$$+ F\,(x_4,\ t_4)\,\Delta x\,\Delta t = \{c\rho\,[u\,(\xi,\ t_2) - u\,(\xi,\ t_1)]\}_{\xi=x_3}\,\Delta x, \tag{11}$$

---

*) Se, ad esempio, il calore viene emanato dal passaggio di corrente elettrica di intensità I lungo una sbarra la cui resistenza per unità di lunghezza è R, allora $F = 0{,}24 \cdot I^2 R$.

**) Chiedendo che la funzione $u\,(x,\ t)$ sia derivabile, possiamo perdere in generale alcune soluzioni possibili che verificano l'equazione integrale e non soddisfano l'equazione differenziale. Tuttavia, nel caso dell'equazione della conduzione termica, se vogliamo ottenere una soluzione derivabile non perdiamo di fatto soluzioni possibili in quanto si può dimostrare che se la funzione verifica l'equazione (10) essa necessariamente deve essere derivabile.

che possiamo trasformare mediante il teorema degli incrementi finiti nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right]\Big|_{\substack{x=x_5\\t=t_3}}\Delta t\,\Delta x + F(x_4,\ t_4)\,\Delta x\,\Delta t =$$

$$= \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\right]_{\substack{x=x_3\\t=t_5}}\Delta x\,\Delta t, \tag{12}$$

dove t_3, t_4, t_5 e x_3, x_4, x_5 sono punti intermedi degli intervalli $(t_1,\ t_2)$ e $(x_1,\ x_2)$.

Di qui, dopo aver diviso per il prodotto $\Delta x \Delta t$, ricaviamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_5\\t=t_3}} + F(x,\ t)\Big|_{\substack{x=x_4\\t=t_4}} = c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_5\\x=x_3}}. \tag{13}$$

Tutti questi ragionamenti si riferiscono a intervalli arbitrari $(x_1,\ x_2)$ e $(t_1,\ t_2)$. Passando al limite per $x_1,\ x_2 \to x$ e $t_1,\ t_2 \to t$, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,\ t) = c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{14}$$

detta *equazione della conduzione termica.*

Consideriamo alcuni casi particolari.

1. Se la sbarra è omogenea, allora k, c e ρ si possono supporre costanti e l'equazione si scrive usualmente sotto la forma

$$u_t = a^2 u_{xx} - f(x,\ t),$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \qquad f(x,\ t) = \frac{F(x,\ t)}{c\rho},$$

dove a^2 è una costante detta *coefficiente di conduzione termica.* Se le sorgenti mancano, cioè se $F(x,\ t) = 0$, l'equazione della conduzione termica assume la forma semplice seguente:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{14'}$$

2. La densità delle sorgenti di calore può dipendere dalla temperatura. In caso di scambio di calore con il mezzo circostante, che è regolato dalla *legge di Newton*, la quantità di calore perduta dalla sbarra *), calcolata per unità di lunghezza e di tempo, vale

$$F_0 = h\,(u - \theta),$$

dove $\theta\,(x,\ t)$ è la temperatura del mezzo circostante, h il *coefficiente di scambio di calore.* Quindi, la densità delle sorgenti di

*) Poiché nella nostra approssimazione non si tiene conto della distribuzione della temperatura nella sezione, l'azione delle sorgenti superficiali è equivalente a quella delle sorgenti di calore volumetriche.

calore nel punto x all'istante t è uguale a

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \tag{15}$$

dove $F_1(x, t)$ è la densità di altre sorgenti di calore.

Se la sbarra è omogenea, l'equazione della conduzione termica con scambio di calore laterale diventa

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

dove $\alpha = \frac{h}{c\rho}$; $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$ è una funzione data.

3. Di regola, i coefficienti k e c sono funzioni della temperatura che variano lentamente. Pertanto la supposizione fatta sopra circa la costanza di questi coefficienti è possibile soltanto quando si considerano piccoli intervalli di variazione della temperatura. Lo studio della variazione della temperatura in un grande intervallo conduce all'equazione della conduzione termica quasilineare la quale per un mezzo non omogeneo si scrive sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u, x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = C(u, x)\rho(u, x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

(si veda l'Appendice III).

2. Equazione della diffusione. Se il mezzo non è riempito uniformemente di gas si assiste alla sua diffusione dalle zone di concentrazione più alta a quelle di concentrazione minore. Lo stesso fenomeno si produce nelle soluzioni se la concentrazione della sostanza solubile nel volume non è costante.

Consideriamo il processo di diffusione in un tubo vuoto o in uno riempito di sostanza porosa, supponendo che in ogni istante la concentrazione di gas (soluzione) nella sezione del tubo sia uguale. Allora il processo di diffusione può essere descritto dalla funzione $u(x, t)$ che rappresenta la *concentrazione* nella sezione x all'istante di tempo t.

Secondo la *legge di Nernst*, la massa di gas passante attraverso la sezione x nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$ vale

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\, S\, dt = WS\, dt,$$

$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{16}$$

dove D è il coefficiente di diffusione, S l'area della sezione del tubo, $W(x, t)$ la densità della corrente diffusa uguale alla massa di gas passante nell'unità di tempo attraverso l'unità d'area.

In accordo con la definizione di concentrazione la quantità di gas nel volume V è uguale a

$$Q = uV;$$

di qui otteniamo che la variazione della massa di gas nel tratto di tubo (x_1, x_2), al variare della concentrazione di Δu, vale

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\, \Delta u \cdot S\, dx,$$

dove $c(x)$ è il *coefficiente di porosità* *).

Scriviamo l'equazione di bilancio della massa di gas nel tratto (x_1, x_2) durante l'intervallo di tempo (t_1, t_2):

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) \right] d\tau =$$

$$= S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\, d\xi.$$

Di qui, come nel 1, ricaviamo l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{17}$$

detta *equazione della diffusione*. Essa è completamente analoga a quella della conduzione termica. Nel dedurre questa equazione abbiamo supposto che nel tubo non esistano sorgenti di materia e che non avvenga diffusione attraverso le pareti del tubo. Se teniamo conto di questi fenomeni avremo un'equazione simile alle equazioni (14) e (15) (si veda il capitolo VI, § 2, n. 3).

Se il coefficiente di diffusione è costante l'equazione della diffusione diventa

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{dove} \quad a^2 = D/c.$$

Se il coefficiente di porosità $c = 1$ e il coefficiente di diffusione è costante l'equazione della diffusione si scrive come segue: $u_t = D u_{xx}$.

3. Propagazione di calore nello spazio. Il processo di propagazione di calore nello spazio può essere caratterizzato dalla temperatura $u(x, y, z, t)$ che è funzione di x, y, z e t.

Se la temperatura non è costante sorgono correnti di calore che vanno dalle zone a temperatura più alta a quelle a temperatura più bassa.

Sia $d\sigma$ un'area nel punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ di normale $\boldsymbol{n}$. La quantità di calore passante attraverso $d\sigma$ nell'unità di tempo è uguale, secondo la legge di Fourier, a

$$W_n\, d\sigma = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{n})\, d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

*) Si chiama coefficiente di porosità il rapporto fra il volume dei pori e il volume totale V_0 che nel caso considerato è pari a $S\, dx$.

dove k è il coefficiente di conduzione termica, $\partial u/\partial n$ la derivata lungo la direzione della normale $\boldsymbol{n}$ a $d\sigma$ pari a

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, z) = (\text{grad } u, \boldsymbol{n}).$$

Spesso la legge di Fourier si scrive sotto la forma

$$\boldsymbol{W} = -k \text{ grad } u,$$

dove $\boldsymbol{W}$ è il vettore densità di corrente di calore.

Se il mezzo è isotropo, k è uno scalare. Nel caso di anisotropia del mezzo, k è un tensore e il vettore densità di corrente di calore $\boldsymbol{W}$ è il prodotto del tensore k per il vettore — grad u. Considereremo soltanto mezzi isotropi.

Passiamo alla deduzione dell'equazione della conduzione termica nello spazio.

Consideriamo un certo volume V delimitato dalla superficie S. L'equazione di bilancio del calore nel volume V durante il tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ ha la forma

$$\int\int\int_V c\rho\,[u(P, t_2) - u(P, t_1)]\,dV_P =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int\int_S W_n\,d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int\int\int_V F(P, t)\,dV_P \right), \qquad (18)$$

dove $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ è il punto di integrazione, $dV_P = d\xi\,d\eta\,d\zeta$ l'elemento di volume, $c\rho$ il calore specifico nell'unità di volume, W_n la componente normale della densità di corrente di calore. Questa equazione esprime la legge di conservazione del calore nel volume V durante il tempo Δt: la variazione della quantità di calore nel volume V durante il tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ (primo membro dell'equazione (18)) è condizionata dalla corrente di calore attraverso la superficie delimitante S (il primo termine a secondo membro dell'uguaglianza (18)) nonché dalla quantità di calore emanata nel volume V durante il tempo Δt in seguito all'azione delle sorgenti di calore.

Per passare dall'equazione integrale di bilancio del calore all'equazione differenziale, supponiamo che $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ sia due volte derivabile rispetto a x, y, z e una volta rispetto a t e che queste derivate siano continue nel dominio considerato. Allora si può ricorrere alla formula di Ostrogradskij

$$\int\int_S W_n\,d\sigma = \int\int\int_V \text{div}\,\boldsymbol{W}\,dV$$

e ridurre l'equazione di bilancio del calore alla forma

$$\iiint_V c\rho\,[u(P,\ t_2) - u(P,\ t_1)]\,dV_P =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\,dV_P\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\iiint_V F(P,\ t)\,dV_P\,dt.$$

(Supporremo che $F(P,\ t)$ sia funzione continua dei suoi argomenti.)

Applicando il teorema della media e il teorema degli incrementi finiti per le funzioni di più variabili avremo

$$c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_3\\P=P_1}} dt\cdot V = -\operatorname{div} \boldsymbol{W}\Big|_{\substack{t=t_4\\P=P_2}} \Delta t\cdot V + F\Big|_{\substack{t=t_5\\P=P_3}} \Delta t\cdot V,$$

dove t_3, t_4, t_5 sono punti intermedi dell'intervallo Δt e P_1, P_2, P_3 punti del volume V. Fissiamo un certo punto $M(x,\ y,\ z)$ all'interno di V, riduciamo il volume V a questo punto e facciamo tendere Δt a zero. Dopo aver diviso per $\Delta t V$ e passando al limite otteniamo

$$c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ z,\ t) = -\operatorname{div} \boldsymbol{W}(x,\ y,\ z,\ t) + F(x,\ y,\ z,\ t).$$

Sostituendo $\boldsymbol{W}$ secondo la formula $\boldsymbol{W} = -k \operatorname{grad} u$ otteniamo l'equazione differenziale della conduzione termica

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

ossia

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F.$$

Se il mezzo è omogeneo questa equazione si scrive usualmente sotto la forma

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

dove $a^2 = k/c\rho$ è il coefficiente di conduzione termica, ossia

$$u_t = a^2\Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right),$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è l'operatore di Laplace.

4. Impostazione dei problemi ai limiti. Per individuare un'unica soluzione dell'equazione della conduzione termica è necessario aggiungere all'equazione le condizioni iniziali e quelle al contorno.

A differenza dall'equazione di tipo iperbolico una condizione iniziale consiste nell'assegnare per la funzione $u(x, t)$ valor nell'istante iniziale t_0.

Le condizioni al contorno possono essere diverse a seconda del regime di temperatura al contorno. Di solito vanno considerati i tre tipi fondamentali seguenti di condizione al contorno.

1. All'estremo $x = 0$ della sbarra è data la temperatura

$$u(0, t) = \mu(t),$$

dove $\mu(t)$ è una funzione data in un certo intervallo $t_0 \leqslant t \leqslant T$, essendo T il lasso di tempo durante il quale si studia il processo.

2. All'estremo $x = l$ è dato il valore della derivata

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

Si arriva a questa condizione se è data la quantità di corrente di calore $Q(l, t)$ passante attraverso la sezione trasversale della sbarra:

$$Q(l, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

da cui $\frac{du}{dx}(l, t) = \nu(t)$, dove $\nu(t)$ è una funzione nota che si esprime mediante la corrente data $Q(l, t)$ in base alla formula

$$\nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. All'estremo $x = l$ è data una relazione lineare fra la derivata e la funzione

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)].$$

Questa condizione al contorno corrisponde allo scambio di calore, in base alla legge di Newton, sulla superficie del corpo con il mezzo circostante la cui temperatura θ è nota. Utilizzando le due seguenti espressioni per la corrente di calore uscente dalla sezione $x = l$:

$$Q = h(u - \theta)$$

e

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x},$$

otteniamo la formulazione matematica della terza condizione al contorno sotto la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)],$$

dove $\lambda = h/k$ è il coefficiente di scambio termico, $\theta(t)$ è una funzione data. Per l'estremo $x = 0$ della sbarra $(0, l)$ la terza condi-

zione al contorno ha la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = \lambda\,[u(0,\ t) - \theta(t)].$$

Le condizioni al contorno per $x = 0$ e $x = l$ possono essere di tipo diverso in modo che il numero di problemi diversi è grande.

Il primo problema ai limiti consiste nel determinare la soluzione $u = u(x,\ t)$ dell'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ per } 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T,$$

la quale soddisfa alle condizioni

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u(0,\ t) = \mu_1(t), \quad u(l,\ t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

dove $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ sono funzioni date.

Analogamente si pongono altri problemi ai limiti con diverse combinazioni di condizioni al contorno per $x = 0$ e $x = l$. Sono possibili condizioni al contorno di tipo più complesso di quelle studiate sopra. Supponiamo, ad esempio, che all'estremo $x = 0$ della sbarra sia concentrato il calore specifico C_1 (un corpo di conduzione termica elevata per cui si può considerare costante la temperatura lungo tutto questo corpo) e che si produca scambio di calore con il mezzo circostante in base alla legge di Newton. Allora la condizione al contorno per $x = 0$ (esprimente l'equazione di bilancio termico) avrà la forma

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h\,(u - u_0),$$

dove u_0 è la temperatura del mezzo circostante. Questa condizione contiene la derivata $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\left(\text{ossia } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ se si tiene conto dell'equazione } u_t = a^2 u_{xx}\right)$.

Se il mezzo non è omogeneo e se i coefficienti dell'equazione sono funzioni discontinue, allora l'intervallo $(0,\ l)$ nel quale si cerca la soluzione del problema viene diviso dai punti di discontinuità dei coefficienti in più parti all'interno delle quali la funzione u verifica l'equazione della conduzione termica e al contorno condizioni coniugate.

Nel caso più semplice queste condizioni consistono nella continuità della temperatura e nella continuità della corrente di calore

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0,\ t) = k(x_i + 0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0,\ t),$$

dove x_i sono punti di discontinuità dei coefficienti.

Oltre ai problemi suindicati si incontrano dei casi limite.

Consideriamo il processo di conduzione termica in una sbarra molto lunga. Durante un piccolo intervallo di tempo l'influenza del regime termico dato al contorno influisce debolmente sulla parte centrale della sbarra, dove la temperatura è determinata essenzialmente dalla distribuzione iniziale di temperatura. In questo caso il valore preciso della lunghezza della sbarra non ha importanza, poiché una variazione di lunghezza non inciderà sostanzialmente sulla temperatura del tratto che interessa; nei problemi di questo tipo la sbarra è supposta di lunghezza infinita. In tal modo si pone il *problema con le condizioni iniziali* (*problema di Cauchy*) *inerente alla distribuzione di temperatura lungo una retta infinita*:

trovare la soluzione dell'equazione della conduzione termica nel dominio $-\infty < x < \infty$ *e* $t \geqslant t_0$, *che verifica la condizione*

$$u(x,\ t_0) = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

dove $\varphi(x)$ *è una funzione data.*

Analogamente, se il tratto di sbarra, la cui temperatura interessa, si trova in prossimità di un estremo e lontano dall'altro, allora la temperatura in questo caso viene determinata praticamente dal regime termico dell'estremo vicino e dalle condizioni iniziali. Nei problemi di questo tipo si suppone di solito che la sbarra sia infinita da un lato e che la coordinata calcolata a partire dall'origine varii nei limiti $0 \leqslant x \leqslant \infty$. A titolo d'esempio diamo la formulazione del *primo problema ai limiti per una sbarra infinita da un lato*:

trovare la soluzione della equazione della conduzione termica nel dominio $0 < x < \infty$ *e* $t_0 \leqslant t$, *che verifica le condizioni*

$$\left.\begin{aligned} &u(x,\ t_0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < \infty), \\ &u(0,\ t) = \mu(t) \qquad (t \geqslant t_0), \end{aligned}\right\}$$

dove $\varphi(x)$ *e* $\mu(t)$ *sono due funzioni date.*

I problemi suindicati rappresentano un caso limite (*degenere*) dei problemi ai limiti fondamentali. Sono possibili casi limite del problema fondamentale anche di altro tipo, quando vengono trascurate le condizioni iniziali. L'influenza delle condizioni iniziali nella propagazione della temperatura lungo la sbarra indebolisce con il tempo. Se l'istante che ci interessa è sufficientemente lontano da quello iniziale la temperatura della sbarra è determinata praticamente dalle condizioni al contorno in quanto una variazione di condizioni iniziali non modificherebbe il regime termico della sbarra nei limiti della precisione osservata. In questo caso si può supporre praticamente che l'esperienza duri un tempo indefinito in modo che le condizioni iniziali non servono più.

In tal modo, siamo giunti ai *problemi ai limiti senza condizioni iniziali* quando si cerca una soluzione dell'equazione della condu-

zione termica per $0 \leqslant x \leqslant l$ e $-\infty < t$, che soddisfi alle condizioni

$$u\ (0,\ t) = \mu_1\ (t),$$

$$u\ (l,\ t) = \mu_2\ (t).$$

A seconda del carattere del regime al contorno sono possibili altri tipi di problemi senza condizioni iniziali.

Un'importanza rilevante riveste il problema senza condizioni iniziali per una sbarra infinita da un lato ($l = \infty$) quando si deve trovare una soluzione dell'equazione della conduzione termica per $0 < x < \infty$, $t > -\infty$, che soddisfi alla condizione

$$u\ (0,\ t) = \mu\ (t),$$

dove $\mu\ (t)$ è una funzione data.

Si incontrano spesso problemi senza condizioni iniziali per un regime al contorno periodico

$$\mu\ (t) = A \cos \omega t$$

(si veda l'appendice I al capitolo III).

È naturale supporre che, dopo un grande intervallo di tempo, la temperatura della sbarra varii anch'essa secondo una legge periodica con la stessa frequenza. Tuttavia, se vogliamo partire precisamente dalle condizioni iniziali, formalmente non otterremo mai una soluzione periodica, poiché l'influenza delle condizioni iniziali, anche se indebolirà col passare del tempo, ma non si annullerà; non ha senso tener conto di questa influenza anche perché sono inevitabili errori di osservazione. Considerando la soluzione periodica trascuriamo l'influenza delle condizioni iniziali.

L'impostazione dei problemi ai limiti esposta sopra si riferisce, ovviamente, non soltanto alle equazioni a coefficienti costanti. Con la locuzione « equazione della conduzione termica » potremmo intendere ogni equazione considerata prima.

Oltre ai suddetti problemi lineari ai limiti, si pone anche un problema di condizioni al contorno non lineari, ad esempio della forma

$$k \frac{\partial u}{\partial x}\ (0,\ t) = \sigma\ [u^4\ (0,\ t) - \theta^4\ (0,\ t)].$$

Questa condizione al contorno corrisponde alla radiazione, secondo la legge di Stephan-Boltzmann dall'estremo $x = 0$ a un mezzo di temperatura $\theta\ (t)$. Soffermiamoci in dettaglio sull'impostazione dei problemi ai limiti. Consideriamo il primo problema ai limiti per un dominio limitato.

Chiameremo *soluzione del primo problema ai limiti* una funzione $u\ (x,\ t)$ che gode delle proprietà seguenti:

1) $u\ (x,\ t)$ è definita e continua nel dominio chiuso

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

2) $u\,(x,\ t)$ verifica l'equazione della conduzione termica nel dominio aperto

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

3) $u\,(x,\ t)$ soddisfa condizioni iniziale e al contorno, cioè

$$u\,(x,\ t_0) = \varphi\,(x), \quad u\,(0,\ t) = \mu_1\,(t), \quad u\,(l,\ t) = \mu_2\,(t),$$

dove $\varphi\,(x)$, $\mu_1\,(t)$, $\mu_2\,(t)$ sono funzioni continue soddisfacenti alle condizioni coniugate

$$\varphi\,(0) = \mu_1\,(t_0) \quad [=u\,(0,\ t_0)] \quad \text{e} \quad \varphi\,(l) = \mu_2\,(t_0) \quad [=u\,(l,\ t_0)],$$

necessarie affinché $u\,(x,\ t)$ sia continua nel dominio chiuso.

Consideriamo il piano degli stati di fase $(x,\ t)$ (fig. 37). Nel problema considerato si chiede di trovare la funzione $u\,(x,\ t)$ definita all'interno del rettangolo $ABCD$. Questo dominio è definito dall'impostazione stessa del problema poiché si studia il processo di propagazione del calore nella sbarra $0 \leqslant x \leqslant l$ nell'intervallo di tempo $t_0 \leqslant t \leqslant T$ nel corso del quale è dato il regime termico agli estremi. Sia $t_0 = 0$; supponiamo che $u\,(x,\ t)$ verifichi l'equazione unicamente per $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, ma non per $t = 0$ (il lato AB) e non per $x = 0$, $x = l$ (i lati AD e BC), dove i valori di questa funzione sono assegnati direttamente dalle condizioni iniziali e al contorno. Se chiedessimo che l'equazione sia verificata, ad esempio, per $t = 0$, chiederemmo che esista la derivata $\varphi'' = u_{xx}\,(x,\ 0)$ che entra nell'equazione. Con questa condizione limiteremmo il dominio di studio dei fenomeni fisici, escludendo dalla considerazione le funzioni per le quali questa condizione non si verifica. La condizione 3) senza ipotesi di continuità di $u\,(x,\ t)$ nel dominio $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (cioè nel rettangolo chiuso $ABCD$) o senza un'altra condizione qualsiasi, che sostituisca questa ipotesi non ha senso *). Consideriamo infatti la funzione $v\,(x,\ t)$ definita nel seguente modo:

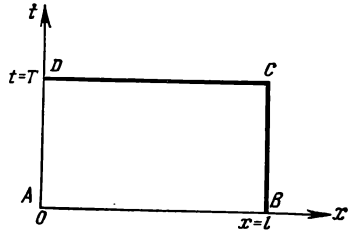


Fig. 37

$$v\,(x,\ t) = C \qquad (0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T),$$

$$v\,(x,\ 0) = \varphi\,(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$\left.\begin{aligned} v\,(0,\ t) &= \mu_1\,(t), \\ v\,(l,\ t) &= \mu_2\,(t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

*) Più avanti verranno considerati problemi con condizioni al contorno ed iniziali discontinue. Per questi problemi si terrà conto del modo in cui si intende la verifica delle condizioni al contorno.

dove C è una costante arbitraria. La funzione $v(x, t)$ soddisfa, evidentemente, la condizione 2) e le condizioni al contorno. Tuttavia, questa funzione non rappresenta il processo di propagazione del calore nella sbarra alla temperatura iniziale $\varphi(x) \neq C$ e alle temperature al contorno $\mu_1(t) \neq C$ e $\mu_2(t) \neq C$ poiché essa è discontinua per $t = 0$, $x = 0$, $x = l$.

La continuità della funzione $u(x, t)$ per $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$ deriva dal fatto che questa funzione verifica l'equazione. Quindi, la condizione di continuità della funzione $u(x, t)$ per $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ riguarda di fatto i punti in cui sono assegnate le condizioni al contorno e iniziali. In seguito, con la locuzione « soluzione dell'equazione soddisfacente alle condizioni al contorno » intenderemo una funzione che verifica le condizioni 1), 2), 3) senza specificare ogni volta queste condizioni qualora non ci sia una necessità speciale.

Analogamente si pongono altri problemi ai limiti, compresi i problemi di sbarra infinita e quelli senza condizioni iniziali.

Quanto detto sopra resta valido per i problemi a più variabili geometriche indipendenti. In questi problemi, per $t = t_0$ è data una temperatura iniziale e sulla superficie del corpo sono assegnate le condizioni al contorno. Si possono considerare anche problemi per un dominio infinito.

Per ciascuno dei problemi posti sorgono le questioni seguenti*):

1) l'unicità della soluzione del problema considerato;

2) l'esistenza della soluzione;

3) la dipendenza continua della soluzione dalle condizioni aggiuntive.

Se il problema posto ha più soluzioni, allora la locuzione « soluzione del problema » non ha un senso preciso. Pertanto, prima di parlare della soluzione del problema, è necessario dimostrarne l'unicità. Praticamente è più importante la questione 2) poiché per la dimostrazione dell'esistenza della soluzione si dà di solito, il metodo di calcolo della soluzione.

Come è stato detto prima (si veda il capitolo II, § 2, n. 5), un processo si dice fisicamente definito se per una piccola variazione delle condizioni iniziali e al contorno del problema la sua soluzione varia poco. In seguito verrà dimostrato che il processo di propagazione del calore viene definito fisicamente dalle sue condizioni iniziali e al contorno, vale a dire che una piccola variazione delle condizioni iniziale e al contorno cambia poco la soluzione stessa.

5. **Principio del valore massimo.** Nel seguito considereremo l'equazione a coefficienti costanti

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

---

*) Cfr. capitolo II, § 2.

Come abbiamo visto, questa equazione con la sostituzione

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u \quad \text{per} \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

si riduce alla forma

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Dimostriamo la seguente proprietà delle soluzioni di questa equazione, che chiameremo *principio del valore massimo.*

Se una funzione $u(x, t)$, definita e continua in un dominio chiuso $0 \leqslant t \leqslant T$ e $0 \leqslant x \leqslant l$, verifica l'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{19}$$

nei punti del dominio $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, allora i valori massimo e minimo della funzione $u(x, t)$ si ottengono o all'istante iniziale, oppure nei punti di frontiera $x = 0$ o $x = l$.

È evidente che la funzione $u(x, t) =$ costante verifica l'equazione della conduzione termica e assume il suo massimo (minimo) in un qualsiasi punto. Tuttavia ciò non contraddice il teorema poiché dalla sua ipotesi segue che se il valore massimo (minimo) si ottiene all'interno del dominio, allora esso deve essere ottenuto anche (e non unicamente) o per $t = 0$, o per $x = 0$, oppure per $x = l$.

Il significato fisico di questo teorema è immediato: se la temperatura sulla frontiera e all'istante iniziale non supera un certo valore M allora, in assenza di sorgenti, l'interno del corpo non può essere a temperatura superiore a M. Soffermiamoci dapprima sulla dimostrazione del teorema per il valore massimo.

Dimostriamo il teorema per assurdo. Indichiamo con M il valore massimo di $u(x, t)$ per $t = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ o per $x = 0$, oppure per $x = l$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ *), e supponiamo che in un punto (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leqslant T)$ la funzione $u(x, t)$ ottenga un massimo uguale a

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

---

*) Se non supponessimo la continuità della funzione $u(x, t)$ nel dominio chiuso $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, questa funzione in nessun punto potrebbe avere un massimo e le considerazioni ulteriori sarebbero inapplicabili. In virtù del teorema secondo il quale ogni funzione continua ha un massimo in un dominio chiuso, possiamo essere sicuri che: 1) la funzione $u(x, t)$ *ha un valore massimo* (indicato con M) sul lato inferiore o sui lati laterali del rettangolo; 2) se $u(x, t)$ è superiore a M almeno in un punto, allora esiste il punto (x_0, t_0) in cui $u(x, t)$ *ha un massimo* superiore a M:

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

dove

$$0 < x_0 < l, \quad 0 < t_0 \leqslant T.$$

Confrontiamo i segni del primo e del secondo membro dell'equazione (19) nel punto (x_0, t_0). Poiché in questo punto la funzione ha un massimo, allora necessariamente deve essere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0 \text{ *)}. \tag{20}$$

Inoltre, dato che $u(x_0, t)$ ha un massimo per $t = t_0$, allora *)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0. \tag{21}$$

Confrontando i segni del primo e del secondo membro dell'equazione (19), vediamo che essi sono opposti. Tuttavia questo fatto non dimostra ancora il teorema in quanto il primo e il secondo membro possono essere nulli, ciò che non implica alcuna contraddizione. Siamo ricorsi a questi ragionamenti per evidenziare l'idea fondamentale della dimostrazione. Per la dimostrazione completa consideriamo il punto (x_1, t_1) in cui $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0$ e $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$. A tal fine consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \tag{22}$$

dove k è una costante. È evidente che

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

e

$$k(t_0 - t) \leqslant kT.$$

Consideriamo il numero $k > 0$ tale che kT sia inferiore ad $\varepsilon/2$, cioè che $k < \varepsilon/2T$; allora il valore massimo di $v(x, t)$ per $t = 0$ o $x = 0$, $x = l$ non supererà $M + \frac{\varepsilon}{2}$, cioè

$$v(x, t) \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{per } t = 0 \text{ o } x = 0, \text{ oppure } x = l), \tag{23}$$

poiché per questi argomenti il primo termine della formula (22) non supera M e il secondo $-\varepsilon/2$.

In virtù della continuità di $v(x, t)$, questa funzione deve avere un massimo in un punto (x_1, t_1). È evidente che

$$v(x_1, t_1) \geqslant v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

---

*) Infatti, come è noto dall'analisi, condizione sufficiente affinché la funzione $f(x)$ nel punto interno x_0 dell'intervallo $(0, l)$ abbia un massimo relativo, è la seguente: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$. Quindi, se $f(x)$ ha un massimo nel punto x_0, allora 1) $f'(x_0) = 0$ e 2) è impossibile che $f''(x_0) > 0$, cioè $f''(x_0) \leqslant 0$.

È chiaro intanto che se $t_0 < T$, allora $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; se, invece, $t_0 = T$, allora $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$.

Pertanto $t_1 > 0$ e $0 < x_1 < l$ poiché per $t = 0$ o $x = 0$, $x = l$ si verifica la disuguaglianza (23). Per analogia con le (20) e (21), nel punto (x_1, t_1) deve essere $v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0$ e $v_t(x_1, t_1) \geqslant 0$. Tenendo conto della (22) troviamo:

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0,$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geqslant k > 0.$$

Ne segue che

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geqslant k > 0,$$

vale a dire l'equazione (19) nel punto interno (x_1, t_1) non è verificata. Abbiamo dimostrato quindi che la soluzione $u(x, t)$ dell'equazione della conduzione termica (19) all'interno del dominio non può assumere valori superiori al massimo di $u(x, t)$ sulla frontiera (cioè per $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Analogamente si può dimostrare anche la seconda parte del teorema riguardante il valore minimo. Fra l'altro, ciò non richiede una dimostrazione a parte in quanto la funzione $u_1 = -u$ ha un massimo laddove u ha un minimo.

Stabiliamo ora alcune conseguenze derivanti dal principio del valore massimo. Prima di tutto dimostriamo il teorema di unicità per il primo problema ai limiti.

6. Teorema di unicità. *Se due funzioni* $u_1(x, t)$ *e* $u_2(x, t)$, *definite e continue nel dominio* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *verificano l'equazione della conduzione termica*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{per } 0 < x < l,\ t > 0), \tag{24}$$

con le stesse condizioni iniziali e al contorno

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t),$$

allora $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ *).

Per dimostrare questo teorema consideriamo la funzione

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

Poiché le funzioni $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sono continue per

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

la funzione $v(x, t)$, uguale alla loro differenza, sarà anch'essa continua in questo dominio. Quale differenza di due soluzioni

*) Nel n. 3 del § 2 questo teorema sarà rafforzato e perciò abbiamo tolto qui la condizione di continuità per $t = 0$.

dell'equazione della conduzione termica nel dominio $0 < x < l$, $t > 0$, la funzione $v(x, t)$ rappresenta una soluzione dell'equazione della conduzione termica omogenea, in questo dominio. Quindi, il principio del valore massimo è applicabile a questa funzione, vale a dire essa ha un massimo e un minimo per $t = 0$, o per $x = 0$, oppure per $x = l$. Tuttavia, per ipotesi, abbiamo

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Perciò

$$v(x, t) \equiv 0,$$

cioè

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Di qui segue che la soluzione del primo problema ai limiti è unica.

Dimostriamo ancora alcune conseguenze dirette dal principio del valore massimo. Nel seguito parleremo semplicemente della « soluzione dell'equazione della conduzione termica » invece di elencare in dettaglio le proprietà della funzione che, fra l'altro, soddisfano anche le condizioni iniziali e al contorno.

1. *Se due soluzioni* $u_1(x, t)$ *e* $u_2(x, t)$ *dell'equazione della conduzione termica soddisfano le condizioni*

$$u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0),$$

$$u_1(0, t) \leqslant u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leqslant u_2(l, t),$$

allora

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$$

per tutti i valori $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Infatti, la differenza $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ soddisfa le condizioni sotto le quali è stato stabilito il principio del valore massimo, e, inoltre, le condizioni

$$v(x, 0) \geqslant 0, \quad v(0, t) \geqslant 0, \quad v(l, t) \geqslant 0.$$

Perciò

$$v(x, t) \geqslant 0 \text{ per } 0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T,$$

poiché altrimenti la funzione $v(x, t)$ avrebbe un minimo negativo nel dominio

$$0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T.$$

2. *Se tre soluzioni dell'equazione della conduzione termica*

$$u(x, t), \quad \underline{u}(x, t), \quad \overline{u}(x, t)$$

soddisfano le condizioni

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \overline{u}(x, t) \quad \text{per} \quad t = 0, \ x = 0 \ \text{e} \ x = l,$$

allora le stesse disuguaglianze si verificano identicamente, cioè per tutti gli x, t *in* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Questa affermazione è il corollario 1 applicabile alle funzioni

$u(x, t)$, $\bar{u}(x, t)$ e $\underline{u}(x, t)$, $u(x, t)$.

3. *Se per due soluzioni dell'equazione della conduzione termica,* $u_1(x, t)$ *e* $u_2(x, t)$, *si verifica la disuguaglianza*

$$| u_1(x, t) - u_2(x, t) | \leqslant \varepsilon \quad \text{per} \quad t = 0, \quad x = 0, \quad x = l,$$

allora

$$| u_1(x, t) - u_2(x, t) | \leqslant \varepsilon$$

identicamente, cioè vale per tutti gli x, t

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Questa affermazione deriva dal corollario 2 se quest'ultimo è applicato alle soluzioni dell'equazione della conduzione termica

$$\underline{u}(x, t) = -\varepsilon,$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

$$\bar{u}(x, t) = \varepsilon.$$

Il corollario 3 consente di stabilire una dipendenza continua della soluzione del primo problema ai limiti dalle condizioni iniziale e al contorno. Se in un problema fisico, al posto della soluzione dell'equazione della conduzione termica corrispondente alle condizioni iniziale e al contorno seguenti:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

consideriamo la soluzione $u(x, t)$ corrispondente ad altri valori iniziale e al contorno, definiti dalle funzioni $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$, che non differiscono nei limiti di un dato grado di precisione ε dalle funzioni $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$| \varphi(x) - \varphi^*(x) | \leqslant \varepsilon, \quad | \mu_1(t) - \mu_1^*(t) | \leqslant \varepsilon,$$

$$| \mu_1(t) - \mu_2^*(t) | \leqslant \varepsilon,$$

allora la funzione $u_1(x, t)$ differirà dalla funzione $u(x, t)$ nei limiti della stessa precisione

$$| u(x, t) - u_1(x, t) | \leqslant \varepsilon.$$

Qui è contenuto il principio di determinazione fisica del problema.

Abbiamo studiato in modo particolareggiato la questione dell'unicità e della determinazione fisica del problema sull'esempio del primo problema ai limiti per un segmento limitato. Il teorema di unicità del primo problema ai limiti per un dominio

limitato nello spazio a due o tre dimensioni può essere dimostrato ripetendo letteralmente tutti i ragionamenti sopra citati.

Questioni simili sorgono per lo studio di altri problemi molti dei quali sono già stati trattati nel paragrafo precedente. Questi problemi richiedono, però, che sia alquanto modificato il metodo di dimostrazione.

L'unicità della soluzione del problema per un dominio illimitato (si veda il n. 7) o del problema senza condizioni iniziali ha luogo soltanto se alle funzioni in questione si impongono alcune condizioni aggiuntive.

7. Teorema di unicità per la retta infinita. Risolvendo il problema sulla retta infinita assume importanza la condizione di limitatezza della funzione cercata in tutto il dominio, cioè l'esistenza di un M tale che $|u(x, t)| < M$ per tutti i valori in $-\infty < x < +\infty$ e per $t \geqslant 0$.

Se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sono due funzioni continue, limitate in tutto il dominio di variazione delle variabili (x, t), soddisfacenti all'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0) \tag{19}$$

e alla condizione

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

allora

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0).$$

Consideriamo, come al solito, la funzione

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

La funzione $v(x, t)$ è continua, verifica l'equazione della conduzione termica, limitata in tutto il dominio

$$|v(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M$$

$(-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0)$

e soddisfa la condizione

$$v(x, 0) = 0.$$

Il principio del valore massimo che abbiamo sfruttato per la dimostrazione dell'unicità del problema per un segmento di retta qui non è applicabile, perché in un dominio illimitato la funzione $v(x, t)$ può non avere valori massimi in nessun punto. Per utilizzare questo principio, consideriamo il dominio

$$|x| \leqslant L,$$

dove L è un numero ausiliario che in seguito faremo crescere indefinitamente, e la funzione

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{25}$$

La funzione $V(x, t)$ è continua, verifica l'equazione della conduzione termica, come è facile provare differenziando, e, in più, gode delle proprietà seguenti:

$$V(x, 0) \geqslant |v(x, 0)| = 0,$$

$$V(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant |v(\pm L, t)|. \tag{26}$$

Per il dominio limitato $|x| \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ è valido il principio del valore massimo. Applicando il corollario 2 del numero precedente alle funzioni $u = -V(x, t)$, $u = v(x, t)$ e $\overline{u} = V(x, t)$ e tenendo conto delle proprietà (26), otteniamo

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leqslant v(x, t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Fissiamo certi valori di (x, t) e, tenendo presente che il numero L è arbitrario, lo facciamo crescere indefinitamente. Passando al limite per $L \to \infty$, otteniamo

$$v(x, t) \equiv 0,$$

come si doveva dimostrare.

§ 2. Metodo di separazione delle variabili

1. Problema ai limiti omogeneo. Passiamo alla soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione della conduzione termica su un segmento di retta:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < l, \ t > 0) \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

e le condizioni al contorno

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

Iniziamo lo studio del primo problema ai limiti generale dalla soluzione del seguente semplice problema I:
trovare una soluzione continua nel dominio chiuso $(0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *dell'equazione omogenea*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2}$$

e alle condizioni al contorno omogenee

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Per risolvere questo problema consideriamo dapprima, come si suole nel metodo di separazione delle variabili, il problema fondamentale ausiliare:

trovare una soluzione dell'equazione

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

non identicamente nulla, soddisfacente alle condizioni al contorno omogenee

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{5}$$

e rappresentabile nella forma

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{6}$$

dove $X(x)$ è funzione della sola variabile x e $T(t)$ funzione della sola variabile t.

Sostituendo la forma presunta della soluzione (6) nell'equazione (4) e dividendo entrambi i membri dell'uguaglianza per a^2XT, otteniamo

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

dove λ = costante poiché il primo membro dell'uguaglianza dipende unicamente da t e il secondo unicamente da x.

Ne segue

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Le condizioni al contorno (5) danno

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

In tal modo per la definizione della funzione $X(x)$ abbiamo ottenuto il problema degli autovalori (problema di Sturm-Liouville)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{10}$$

studiato già nel risolvere l'equazione delle vibrazioni nel capitolo II (si veda il § 3, n. 1). Là è stato mostrato che soltanto per valori del parametro λ uguali a

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

esistono soluzioni non banali dell'equazione (8'), uguali a

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \tag{12}$$

A questi valori λ_n corrispondono le soluzioni dell'equazione (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

dove C_n sono coefficienti da determinare.

Tornando al problema fondamentale ausiliare, vediamo che le funzioni

$$u_n(x,\ t) = X_n(x)\, T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{14}$$

sono soluzioni particolari dell'equazione (4), soddisfacenti alle condizioni al contorno nulle.

Passiamo ora alla soluzione del problema (I). Costruiamo formalmente la serie

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \tag{15}$$

La funzione $u(x,\ t)$ soddisfa le condizioni al contorno in quanto esse sono soddisfatte da tutti i termini della serie. Richiedendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali, otteniamo

$$\varphi(x) = u(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{16}$$

vale a dire C_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $\varphi(x)$ quando essa è sviluppata in serie di seni nell'intervallo $(0,\ l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \tag{17}$$

Consideriamo ora la serie (15) con i coefficienti C_n definibili in base alla formula (17) e mostriamo che questa serie verifica tutte le condizioni del problema (I). A tal fine bisogna dimostrare che la funzione $u(x,\ t)$ definita dalla serie (15) è derivabile, verifica l'equazione nel dominio $0 < x < l,\ t > 0$ ed è continua nei punti di confine di questo dominio (per $t = 0,\ x = 0,\ x = l$).

Siccome l'equazione (4) è lineare, allora, in virtù del principio di sovrapposizione, una serie composta di soluzioni particolari sarà anch'essa una soluzione se converge e la si può derivare due volte termine a termine rispetto a x e poi ancora una volta rispetto a t (si veda il lemma del capitolo II, § 3, n. 3). Mostriamo che per $t \geqslant \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ è un numero ausiliare qualsiasi) le serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

sono convergenti uniformemente. Infatti,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \right| <$$

$$< |C_n| \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a_2 t}.$$

Nel seguito verranno formulate condizioni complementari cui deve soddisfare la funzione $\varphi(x)$. Supponiamo dapprima che la funzione $\varphi(x)$ sia limitata, cioè che $|\varphi(x)| < M$; allora

$$|C_n| = \left|\frac{2}{l}\right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right| < 2M,$$

da cui segue che

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{per} \quad t \geqslant \bar{t}$$

e analogamente

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{per} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

In generale

$$\left|\frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \, \partial x^l}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{per} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Studiamo la convergenza della serie maggiorante $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, dove

$$\alpha_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}}. \tag{15'}$$

Secondo il criterio di D'Alembert, questa serie è convergente in modo che

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q}{n^q} \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 \bar{t}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (2n+1)\bar{t}} = 0.$$

Di qui deriva la possibilità di derivare termine a termine la serie (15) un qualsiasi numero di volte nel dominio $t \geqslant \bar{t} > 0$. Quindi, partendo dal principio di sovrapposizione, concludiamo che la funzione definita da questa serie verifica l'equazione (4). Siccome il numero $\bar{t}$ è arbitrario, la nostra affermazione è valida

per ogni $t > 0$. Abbiamo dimostrato così che la serie (15) rappresenta una funzione derivabile a piacere e soddisfacente all'equazione (4) *).

Se la funzione $\varphi(x)$ *è continua, ha una derivata continua a tratti e soddisfa alle condizioni* $\varphi(0) = 0$ *e* $\varphi(l) = 0$, *allora la serie*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{15}$$

definisce una funzione continua per $t \geqslant 0$.

Infatti, dalla disuguaglianza

$$| u_n(x, t) | < | C_n | \quad (\text{per } t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l)$$

segue immediatamente la convergenza uniforme della serie (15) per $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, ciò che dimostra la validità della suddetta affermazione tenendo conto che per una funzione continua e liscia a tratti $\varphi(x)$ la serie dei moduli dei coefficienti di Fourier è convergente se $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ **).

Dunque, il problema della ricerca della soluzione del primo problema ai limiti per un'equazione omogenea con condizioni al contorno nulle e condizione iniziale liscia a tratti è completamente risolto.

2. Funzione della sorgente. Trasformiamo la soluzione ottenuta (15) sostituendo i C_n con i loro valori:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right] \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) \, d\xi.$$

Il cambiamento degli ordini di sommatoria e di integrazione è sempre legittimo per $t > 0$ in quanto la serie fra parentesi è convergente uniformemente in ξ per $t > 0$ ***).

Introduciamo la notazione

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{18}$$

---

*) Per dimostrare che la serie (15) verifica l'equazione $u_t = a^2 u_{xx}$ per $t > 0$, siamo partiti soltanto dalla limitatezza dei coefficienti di Fourier C_n la quale, in particolare, avrà luogo per ogni funzione limitata $\varphi(x)$.

**) Si veda il capitolo II, § 3, n. 3.

***) La serie $\sum \alpha_n$, dove α_n è definito dalla formula (15'), per $q = 0$ è maggiorante per la serie fra parentesi.

Usando la funzione $G(x, \xi, t)$ si può rappresentare $u(x, t)$ nella forma

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{19}$$

La funzione $G(x, \xi, t)$ si dice *funzione della sorgente puntuale istantanea* oppure, in modo più preciso, funzione di influenza termica di una sorgente puntuale, istantanea, di calore.

Mostriamo che la funzione della sorgente $G(x, \xi, t)$, considerata come funzione di x, rappresenta la distribuzione di temperatura nella sbarra $0 \leqslant x \leqslant l$ all'istante t se la temperatura all'istante iniziale $t = 0$ è nulla e se in questo istante il punto $x = \xi$ emana istantaneamente una quantità di calore (la cui grandezza verrà determinata più avanti), mentre agli estremi della sbarra si mantiene sempre la temperatura nulla.

La locuzione « quantità di calore Q emanata nel punto ξ » significa che, di solito, abbiamo a che fare con il calore emanato su un « piccolo » intervallo nell'intorno del punto studiato ξ. La variazione di temperatura $\varphi_\varepsilon(\xi)$ dovuta alla comparsa di calore nell'intorno del punto sarà, evidentemente, nulla all'esterno dell'intervallo $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ nel quale si emana il calore, e all'interno di questo intervallo si può supporre che $\varphi_\varepsilon(\xi)$ sia una funzione positiva continua e derivabile per la quale

$$c\rho \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = Q, \tag{20}$$

poiché il primo membro di questa equazione rappresenta la quantità di calore che comporta la variazione di temperatura della quantità $\varphi_\varepsilon(\xi)$. Il processo di propagazione della temperatura in questo caso è dato dalla formula (19):

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi. \tag{21}$$

Effettuiamo ora il passaggio al limite per $\varepsilon \to 0$. Tenendo conto della continuità di G per $t > 0$ e dell'uguaglianza (20) e applicando il teorema della media per valori fissati di x, t, avremo

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x, \xi, t)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi =$$

$$= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = G(x, \xi^*, t)\, \frac{Q}{c\rho}, \tag{21'}$$

dove ξ^* è un punto intermedio dell'intervallo $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Essendo continua la funzione $G(x, \xi, t)$ in ξ per $t > 0$, otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t) =$$

$$= \frac{Q}{c\rho} \cdot \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{22}$$

Ne segue che $G(x, \xi, t)$ rappresenta la temperatura del punto x all'istante t, dovuta all'azione della sorgente puntuale istantanea di intensità $Q = c\rho$, collocata all'istante $t = 0$ nel punto ξ appartenente all'intervallo $(0, l)$.

Sottolineiamo la seguente proprietà della funzione $G(x, \xi, t)$: la funzione $G(x, \xi, t) \geqslant 0$ per qualsiasi x, ξ e per $t > 0$. Infatti, consideriamo la funzione iniziale $\varphi_\varepsilon(x)$ avente le suddette proprietà e la soluzione (21′) che le corrisponde. Dalla non negatività delle condizioni iniziale e al contorno, in virtù del principio del valore massimo, segue che

$$u_\varepsilon(x, t) \geqslant 0$$

per ogni $0 \leqslant x \leqslant l$ e $t > 0$. Di qui mediante la formula (21′) ricaviamo

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{c\rho} \geqslant 0, \quad (\text{per } t > 0). \tag{21″}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, dalla (21′) otteniamo la disuguaglianza

$$G(x, \xi, t) \geqslant 0 \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x, \quad \xi \leqslant l \quad \text{e} \quad t > 0,$$

che si doveva dimostrare.

Questo risultato ha un significato fisico semplice. Tuttavia, sarebbe assai difficile stabilirlo direttamente in base alla formula (19) poiché la funzione $G(x, \xi, t)$ è rappresentata da una serie a segno alternato.

3. Problemi ai limiti con condizioni iniziali discontinue. La teoria esposta sopra si riferisce alle soluzioni dell'equazione della conduzione termica continua nel dominio chiuso $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Queste condizioni di continuità sono assai limitative. Consideriamo infatti il problema elementare del raffreddamento di una sbarra uniformemente calda portata a temperatura nulla agli estremi. Le condizioni aggiuntive hanno la forma

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Se $u_0 \neq 0$, la soluzione di questo problema deve essere discontinua nei punti $(0, 0)$ e $(l, 0)$. Da questo esempio risulta che le suddette condizioni di continuità del valore iniziale e le condizioni di sua coniugazione con valori al contorno escludono dall'esame casi

importanti nella pratica. Tuttavia, la formula (19) consente di risolvere un problema ai limiti anche in questo caso difficile.

Spesso nelle applicazioni si ricorre a formule che escono dai limiti della loro applicabilità a prescindere dalle condizioni di applicabilità di queste formule. Una giustificazione conseguente di tutte le formule indispensabili sarebbe troppo complicata e distoglierebbe l'attenzione del ricercatore dagli aspetti quantitativi e qualitativi del fenomeno, che caratterizzano l'essenza fisica del processo.

Riteniamo utile, però, almeno su esempi elementari, dare una giustificazione dell'apparato matematico, sufficiente per la soluzione dei problemi fondamentali.

Consideriamo alcuni problemi ai limiti con funzioni iniziali continue a tratti, senza supporre che la funzione iniziale sia coniugata con condizioni al contorno. Questa classe di condizioni aggiuntive è sufficientemente generale per i bisogni pratici e sufficientemente semplice per l'esposizione della teoria stessa. Il nostro scopo è quello di dimostrare che la stessa formula (19) fornisce una soluzione del problema posto. Indaghiamola in più stadi. Dimostriamo preliminarmente il seguente teorema.

La soluzione dell'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \quad t > 0), \tag{4}$$

continua nel dominio chiuso $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *e soddisfacente alle condizioni*

$$u\,(0,\ t) = u\,(l,\ t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$u\,(x,\ 0) = \varphi\,(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

dove $\varphi\,(x)$ *è una funzione continua qualsiasi che si annulla per* $x = 0$, $x = l$, *è definita univocamente e rappresentata dalla formula*

$$u\,(x,\ t) = \int_0^l G\,(x,\ \xi,\ t)\,\varphi\,(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Questo teorema è stato dimostrato sopra sotto la condizione aggiuntiva di derivabilità continua a tratti della funzione $\varphi\,(\xi)$.

Liberiamoci da questa condizione. Consideriamo una successione di funzioni continue, derivabili a tratti $\varphi_n\,(\xi)$ $(\varphi_n\,(0) = \varphi_n\,(l) = 0)$ convergente uniformemente a $\varphi\,(x)$. (Come $\varphi_n\,(x)$ si possono considerare, ad esempio, funzioni rappresentate dalle spezzate coincidenti con $\varphi\,(x)$ nei punti $\frac{l \cdot k}{n}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n$). Le funzioni $u_n\,(x,\ t)$ definite dalla formula (19) mediante le $\varphi_n\,(x)$ soddisfano tutte le ipotesi del teorema poiché le $\varphi_n\,(x)$ verificano la condizione di derivabilità a tratti. Queste funzioni sono uniformemente convergenti e definiscono al limite una

funzione continua $u(x, t)$. Infatti, per ogni ε si può dare un $n(\varepsilon)$ tale che

$$| \varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x) | < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \quad \text{se} \quad n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

poiché queste funzioni, per ipotesi, convergono uniformemente. Di qui in virtù del principio del valore massimo segue anche che

$$| u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t) | < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T), \ \text{se}$$

$$n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

ciò che dimostra la convergenza uniforme della successione di funzioni $u_n(x, t)$ a una funzione continua $u(x, t)$.

Se, fissato il punto (x, t), passiamo al limite sotto il segno di integrale, troviamo che la funzione

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \leftarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) \, d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \, d\xi$$

è continua nel dominio chiuso $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ e soddisfa la condizione iniziale (2). Rivedendo la nota alla pag. 205, è facile capire che essa verifica anche l'equazione (4) per $t > 0$. Il teorema è dimostrato.

La formula (19) dà l'unica soluzione continua del problema in esame.

Torniamo alla dimostrazione del *teorema di unicità* nel caso di una *funzione iniziale continua a tratti* $\varphi(x)$, senza supporre che questa funzione sia coniugata con condizioni al contorno. Dimostriamo che *una funzione continua nel dominio* $t < 0$, *soddisfacente all'equazione della conduzione termica*

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{4}$$

nel dominio $0 < x < l$, $t > 0$, *con condizioni al contorno nulle*

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{5}$$

e condizione iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

è definita univocamente se:

1) *essa è continua nei punti di continuità della funzione* $\varphi(x)$ *e*

2) *è limitata nel dominio chiuso* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}_0$, *essendo* $\bar{t}_0$ *un numero positivo qualsiasi.*

Supponiamo che questa funzione esista. È evidente, in virtù del teorema precedente, che essa può essere rappresentata nel dominio $t > \bar{t}$ dalla formula

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) \, d\xi \quad (t > \bar{t} > 0) \tag{19'}$$

per qualsiasi valore ausiliare $\bar{t}$:

$$0 < \bar{t} \leqslant t, \quad \varphi_{\bar{t}}(x) = u(x, \bar{t}).$$

Passiamo al limite in questa formula per $\bar{t} \to 0$, lasciando immutate le variabili x e t. Mostriamo *) che è possibile questo passaggio sotto il segno d'integrale e che, quindi, la funzione $u(x, t)$ è rappresentabile sotto forma di integrale

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \tag{19}$$

che la definisce univocamente.

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i punti di discontinuità della funzione $\varphi(x)$. Ponendo $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = l$ (fig. 38) e considerando gli intervalli chiusi I_k ($x_k + \delta \leqslant$

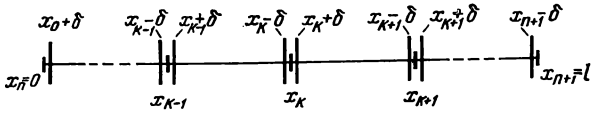


Fig. 38

$\leqslant x \leqslant x_{k+1} - \delta$), dove $k = 0, 1, \ldots, n$ e δ è un numero fissato sufficientemente piccolo, è facile vedere che la funzione integranda nella (19′) converge uniformemente alla funzione integranda nella (19) su ogni intervallo I_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Negli intervalli chiusi $\bar{I}_k$ ($x_k - \delta \leqslant x \leqslant x_k + \delta$), dove $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, $\bar{I}_0$ ($x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$) e $\bar{I}_{n+1}$ ($x_{n+1} - \delta \leqslant x \leqslant x_{n+1}$) le espressioni integrande nelle formule (19) e (19′) sono limitate da un numero N per ogni $\bar{t}$ ($0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_0$) in virtù della limitatezza della funzione $u(x, t)$ e in virtù della continuità della funzione $G(x, \xi, t)$ per $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $t > 0$. Suddividendo la differenza fra gli integrali (19) e (19′) in $2n + 3$ integrali calcolati su I_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) e $\bar{I}_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n + 1$) vediamo che questa differenza può essere resa inferiore a un numero ε assegnato se

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3} \frac{1}{4N},$$

---

*) Il teorema, che sarà dimostrato più avanti, rappresenta un caso particolare del teorema di Lebesgue sulla possibilità di passaggio al limite sotto il segno d'integrale se una successione di funzioni $F_n(x)$ converge quasi ovunque a una funzione limite sommabile $F(x)$ e se questa successione è limitata dalla funzione sommabile. Si dà questa dimostrazione per evitare l'uso di nozioni insiemistiche. Ricorrendo alle nozioni insiemistiche, si può dimostrare analogamente che la soluzione dell'equazione della conduzione termica $u(x, t)$ soddisfacente alle condizioni al contorno nulle è definita univocamente:

1) se $u(x, t) \leqslant F(x)$, dove $F(x)$ è una funzione sommabile e
2) se quasi ovunque

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione sommabile data.

di modo che

$$\left| \int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)]\, d\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3},$$

e se $\bar{t}$ è scelto così piccolo che

$$| G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi) | <$$

$$< \frac{1}{l} \frac{\varepsilon}{2n+3} \quad \text{per} \quad t \leqslant \bar{t} \quad \text{su} \quad I_k \, (k = 0, 1, \ldots, n),$$

cosicché

$$\int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)]\, d\xi <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2n+3} \quad \text{per} \quad t \leqslant \bar{t} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Ne segue la disuguaglianza

$$\left| \int_0^l [G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)]\, d\xi \right| < \varepsilon \quad \text{per} \quad t \leqslant \bar{t},$$

che dimostra la legittimità del passaggio al limite per $\bar{t} \to 0$ sotto il segno d'integrale. Quindi, se esiste una funzione $u(x, t)$ soddisfacente alle ipotesi del teorema, essa è rappresentabile nella forma (19), il che dimostra l'unicità di questa funzione.

Dimostriamo ora che *la formula* (19) *rappresenta una soluzione limitata dell'equazione* (4), *soddisfacente alle condizioni* (2) *per ogni funzione continua a tratti* $\varphi(x)$, *continua in tutti i punti di continuità di* $\varphi(x)$.

Dimostriamo questo teorema in due stadi. Prima di tutto mostriamo che esso è valido se $\varphi(x)$ è una funzione lineare, cioè

$$\varphi(x) = cx. \tag{2'}$$

Consideriamo la successione di funzioni continue ausiliarie (fig. 39)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx & \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant l\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ \alpha(l-x) & \text{per} \quad l\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant x \leqslant l, \quad \alpha = (n-1)\, c. \end{cases}$$

Le funzioni $u_n(x, t)$, definite mediante la formula (19) per la successione $\varphi_n(x)$, sono soluzioni continue dell'equazione della conduzione termica con condizioni al contorno nulle e condizioni iniziali

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

Siccome

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

in virtù del principio del valore massimo

$$u_n(x, t) \leqslant u_{n+1}(x, t).$$

La funzione $U_0(x) = cx$ rappresenta una soluzione continua dell'equazione della conduzione termica. In virtù del principio del valore massimo si ha

$$u_n(x, t) \leqslant U_0(x),$$

poiché questa disuguaglianza ha luogo per $x = 0$, $x = l$ e $t = 0$. Quindi, $u_n(x, t)$ è una successione monotona non decrescente,

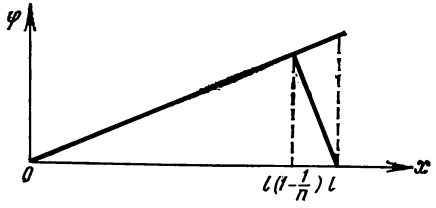


Fig. 39

limitata superiormente dalla funzione $U_0(x)$, da cui risulta che questa successione è convergente. È facile vedere che

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi \leqslant U_0(x),$$

poiché il passaggio al limite sotto il segno d'integrale è legittimo. In accordo con la nota alla pag. 209, questa funzione verifica l'equazione e soddisfa le condizioni al contorno nulle per $t > 0$. Dimostriamo che questa funzione è continua per $t = 0$ e per $0 \leqslant x < l$. Sia $x_0 < l$. Consideriamo un n tale che si abbia $x_0 < l\left(1 - \frac{n}{1}\right)$. In questo caso $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. Partendo dal fatto che

$$u_n(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant U_0(x)$$

e che

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ t\to 0}} u_n(x, t) = \lim_{x\to x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

concludiamo che esiste il limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

indipendente dal modo in cui x tende a x_0 e $t \to 0$. Di qui deriva la continuità di $u(x, t)$ nel punto $(x_0, 0)$. Questa funzione è limitata in quanto non supera $U_0(x)$. Dunque, per $\varphi(x) = cx$ il teorema è dimostrato.

La sostituzione di x con $l - x$ ci consente di vedere che il teorema è valido per

$$\varphi(x) = b(l - x). \tag{2''}$$

Ne segue che esso è valido per ogni funzione della forma

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

poiché una tale funzione può essere ottenuta sommando la (2') alla (2''). Inoltre, di qui segue anche che il teorema sussiste per ogni funzione continua senza l'ipotesi $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Infatti, ogni funzione $\varphi(x)$ di questo tipo si può rappresentare nella forma

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l}(\varphi(l) - \varphi(0))\right] + \psi(x),$$

dove l'addendo fra parentesi quadra è una funzione lineare e $\psi(x)$ è una funzione continua che si annulla agli estremi dell'intervallo chiuso: $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Poiché ci siamo già convinti che il teorema è applicabile a ogni addendo, ne segue che il teorema è valido anche per $\varphi(x)$.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema per una funzione continua a tratti qualsiasi $\varphi(x)$. La formula (19) definisce anche in questo caso una soluzione che verifica l'equazione e le condizioni al contorno nulle.

Supponiamo ora che x_0 sia un punto di continuità della funzione $\varphi(x)$. Dimostriamo che per ogni ε si può trovare una $\delta(\varepsilon)$ tale che $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ e $t < \delta(\varepsilon)$. In virtù della continuità della funzione $\varphi(x)$ nel punto x_0 esiste $\eta(\varepsilon)$ tale che

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon),$$

da cui

$$\varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon). \tag{23}$$

Costruiamo due funzioni ausiliarie, continue e derivabili $\overline{\varphi}(x)$ e $\underline{\varphi}(x)$:

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \\ &\overline{\varphi}(x) \geqslant \varphi(x) \qquad \text{per} \quad |x - x_0| > \eta(\varepsilon), \end{aligned} \tag{a}$$

$$\underline{\varphi}(x) = \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon),$$
$$\underline{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \quad \text{per} \quad |x - x_0| > \eta(\varepsilon). \tag{b}$$

Nell'intervallo $|x - x_0| > \eta(\varepsilon)$ le funzioni $\overline{\varphi}$ e $\underline{\varphi}$ soddisfano unicamente alle condizioni (a) e (b) e all'esterno di questo intervallo sono arbitrarie. In virtù delle disuguaglianze (23) abbiamo

$$\underline{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \overline{\varphi}(x). \tag{24}$$

Consideriamo le funzioni

$$\overline{u}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \overline{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$

$$\underline{u}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \underline{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

Essendo $\overline{\varphi}(x)$ e $\underline{\varphi}(x)$ continue, le funzioni $\overline{u}(x, t)$ e $\underline{u}(x, t)$ sono anch'esse continue nel punto x_0, vale a dire si trova $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$\left.\begin{aligned} &|\overline{u}(x, t) - \overline{\varphi}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ &|\underline{u}(x, t) - \underline{\varphi}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{per} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

da cui

$$\left.\begin{aligned} &\overline{u}(x, t) \leqslant \overline{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon, \\ &\underline{u}(x, t) \geqslant \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{aligned}\right\}$$

per $|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$.

Essendo la funzione $G(x, \xi, t)$ non negativa, dalla formula (24) segue che

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \overline{u}(x, t). \tag{25}$$

Di qui ricaviamo le disuguaglianze

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leqslant u(x, t) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{per}$$
$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$$

ossia

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

come si voleva dimostrare. La limitatezza della funzione $|u(x, t)|$ deriva dalla formula (25) e dalla limitatezza delle funzioni $\overline{u}(x, t)$ e $\underline{u}(x, t)$. Quindi, il teorema è dimostrato.

4. Equazione non omogenea della conduzione termica. Consideriamo l'equazione non omogenea della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = 0 \tag{26}$$

e le condizioni al contorno

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(l, t) = 0. \tag{5}$$

Cercheremo una soluzione di questa equazione $u(x, t)$ sotto forma di serie di Fourier in autofunzioni del problema (11), cioè in funzioni $\left\{\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x\right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{27}$$

considerando t come un parametro. Per trovare la funzione $u(x, t)$, è necessario definire le funzioni $u_n(t)$. Rappresentiamo la funzione $f(x, t)$ sotto forma di serie

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

dove

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{28}$$

Sostituendo la forma presunta della soluzione nell'equazione iniziale (1), avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}(t) - f_n(t) \right\} = 0.$$

Questa equazione sarà verificata se tutti i coefficienti dello sviluppo sono nulli, cioè se

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{29}$$

Partendo dalla condizione iniziale per $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

otteniamo la condizione iniziale seguente per $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \tag{30}$$

Risolvendo l'equazione differenziale comune (29) con la condizione iniziale nulla (30) *), troviamo

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{31}$$

Sostituendo l'espressione (31) per $u_n(t)$ nella formula (27) otteniamo la soluzione del problema iniziale sotto la forma

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \tag{32}$$

Sfruttiamo l'espressione (28) per $f_n(\tau)$ per trasformare nel seguente modo la soluzione ottenuta (32):

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{33}$$

dove

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \tag{34}$$

coincide con la funzione della sorgente definibile dalla formula (18).

Specifichiamo il significato fisico della soluzione ottenuta

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau\ . \tag{33}$$

Supponiamo che la funzione $f(\xi,\ \tau)$ non sia nulla soltanto in un intorno sufficientemente piccolo del punto $M_0(\xi_0,\ \tau_0)$

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

La funzione $F(\xi,\ \tau) = c\rho f(\xi,\ \tau)$ rappresenta la densità di sorgenti di calore. La quantità totale di calore emanata sull'intervallo $(0,\ l)$ nel tempo d'azione della sorgente (cioè $\Delta\tau$) vale

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} c\rho f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{35}$$

*) Si veda il testo in carattere minuto alla fine del n. 4, § 3, capitolo II.

Applichiamo il teorema della media all'espressione

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= G(x,\ \bar{\xi},\ t-\bar{\tau}) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x,\ t),$$

dove

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau.$$

Passando al limite per $\Delta\xi \to 0$ e $\Delta\tau \to 0$, otteniamo la funzione

$$u(x,\ t) = \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0 \\ \Delta\tau\to 0}} \bar{u}(x,\ t) = \frac{Q}{c\rho}\, G(x,\ \xi_0,\ t-\tau_0), \tag{36}$$

che si può interpretare come funzione di influenza della sorgente di calore istantanea concentrata nel punto ξ_0 all'istante τ_0.

Se è nota la funzione $\frac{Q}{c\rho} G(x,\ \xi,\ t-\tau)$ rappresentante l'azione di una sorgente istantanea unitaria concentrata, allora l'azione di sorgenti distribuite con continuità con densità $F(x,\ t) = c\rho f(x,\ t)$ deve essere espressa dalla formula (33), come deriva immediatamente dal significato fisico della funzione $G(x,\ \xi,\ t-\tau)$.

Dunque, l'influenza termica delle sorgenti di calore agenti nel dominio $(\xi_0,\ \xi_0 + \Delta\xi)$ $(\tau_0,\ \tau_0 + \Delta\tau)$ è data dall'espressione

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, \Delta\xi\, \Delta\tau \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi,\ \tau)\, \Delta\xi\, \Delta\tau \right).$$

Se le sorgenti sono distribuite con continuità, allora, sommando le influenze termiche delle sorgenti agenti su tutto il dominio $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, otteniamo, passando al limite per $\Delta\xi \to 0$ e $\Delta\tau \to 0$:

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

In tal modo, partendo dal significato fisico della funzione della sorgente $G(x,\ \xi,\ t)$, si potrebbe dedurre immediatamente l'espressione (33) per la funzione che fornisce la soluzione dell'equazione non omogenea.

Conoscendo la forma in cui deve essere rappresentata la soluzione del problema è possibile studiare le condizioni di applicabilità di questa formula nei riguardi della funzione $f(\xi,\ \tau)$. Non ci occuperemo di questo studio.

Abbiamo considerato qui un'equazione non omogenea con condizioni iniziali nulle. Se la condizione iniziale è diversa da zero, alla soluzione ottenuta si deve aggiungere la soluzione dell'equazione omogenea con la condizione iniziale data $u\ (x,\ 0) = \varphi\ (x)$, trovata nel n. 1.

5. Primo problema ai limiti generale. Consideriamo il primo problema ai limiti generale per l'equazione della conduzione termica:

trovare la soluzione dell'equazione

$$u_t = a^2 u_{xx} + f\ (x,\ t) \tag{1}$$

con le condizioni aggiuntive

$$u\ (x,\ 0) = \varphi\ (x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u\,(0,\ t) &= \mu_1\,(t), \\ u\,(l,\ t) &= \mu_2\,(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Introduciamo la nuova funzione incognita $v\ (x,\ t)$

$$u\ (x,\ t) = U\ (x,\ t) + v\ (x,\ t) \tag{37}$$

rappresentante la deviazione da una funzione nota $U\ (x,\ t)$.

Questa funzione $v\ (x,\ t)$ sarà definita come soluzione dell'equazione

$$v_t - a^2 v_{xx} = \overline{f}\ (x,\ t),$$

$$\overline{f}\ (x,\ t) = f\ (x,\ t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

con le condizioni complementari

$$v\,(x,\ 0) = \overline{\varphi}\,(x), \qquad \overline{\varphi}\,(x) = \varphi\,(x) - U\,(x,\ 0),$$

$$v\,(0,\ t) = \overline{\mu}_1\,(t), \qquad \overline{\mu}_1\,(t) = \mu_1\,(t) - U\,(0,\ t),$$

$$v\,(l,\ t) = \overline{\mu}_2\,(t), \qquad \overline{\mu}_2\,(t) = \mu_2\,(t) - U\,(l,\ t).$$

Consideriamo la funzione ausiliaria $U\ (x,\ t)$ in modo tale che

$$\overline{\mu}_1\ (t) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\mu}_2\ (t) = 0;$$

a questo scopo è sufficiente porre *)

$$U\ (x,\ t) = \mu_1\,(t) + \frac{x}{l}\,[\mu_2\,(t) - \mu_1\,(t)].$$

In tal modo, la ricerca della funzione $u\ (x,\ t)$ che fornisce la soluzione del problema ai limiti generale si riduce alla definizione della funzione $v\ (x,\ t)$ che risolve lo stesso problema con condizioni al contorno nulle. Il metodo di definizione della funzione $v\ (x,\ t)$ è dato nel n. 4.

---

*) Si veda il capitolo II, § 3, n. 5.

Sopra è stato dato lo schema formale per la risoluzione di problemi per equazioni e condizioni al contorno con elementi eterogenei; questo schema non è sempre comodo per rappresentare la funzione cercata $u(x, t)$. Le difficoltà di ricerca della funzione ausiliaria $v(x, t)$ sono connesse alla funzione $U(x, t)$ dalla quale si cerca la deviazione.

In particolare, per problemi con elementi eterogenei stazionari è più comodo determinare una soluzione stazionaria e cercare la deviazione da questa soluzione *).

Consideriamo, ad esempio, il problema per una sbarra limitata $(0, l)$, agli estremi della quale si mantengono temperature costanti u_0 e u_1:

$$u_t = a^2 u_{xx},$$
$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u(0, t) = u_0,$$
$$u(l, t) = u_1.$$

Cercheremo la soluzione sotto forma di somma

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

dove $\bar{u}(x)$ è la temperatura stazionaria e $v(x, t)$ la deviazione da questa temperatura.

Per le funzioni $\bar{u}(x)$ e $v(x, t)$ avremo le condizioni

$$\bar{u}'' = 0, \qquad v_t = a^2 v_{xx};$$
$$\bar{u}(0) = u_0, \quad v(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}(x) = \varphi_1(x);$$
$$\bar{u}(l) = u_1, \quad v(0, t) = 0,$$
$$v(l, t) = 0.$$

Di qui troviamo

$$\bar{u}(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

La funzione $v(x, t)$, definita da condizione iniziale e condizioni al contorno omogenee, si trova facilmente con il metodo di separazione delle variabili.

Problemi

1. Dedurre l'equazione per il processo di riscaldamento di un filo sottile omogeneo con corrente elettrica costante se sulla sua superficie si produce uno scambio di calore con il mezzo circostante.

2. Dedurre l'equazione della diffusione in un mezzo dotato di moto uniforme nella direzione dell'asse x con velocità w. Considerare il caso di una sola variabile indipendente.

*) Si veda il capitolo II, § 3, n. 6.

3. Partendo dalle equazioni di Maxwell, supponendo che $E_x = E_z = 0$, $H_z = 0$ e trascurando le correnti di spostamento, mostrare che in un conduttore omogeneo la componente del campo elettromagnetico E_y verifica l'equazione

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

dove σ è la conduttività del mezzo, c la velocità della luce. Dedurre l'equazione per H_x.

4. Dare un'interpretazione fisica delle condizioni al contorno seguenti nei problemi della condizione termica e della diffusione:

a) $u(0, t) = 0$, b) $u_x(0, t) = 0$,

c) $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $(h < 0)$.

$u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$

5. Risolvere il problema del raffreddamento di una sbarra omogenea uniformemente calda, con la temperatura nulla agli estremi, supponendo che lo scambio di calore sulle superfici laterali non esista.

6. La temperatura iniziale di una sbarra è $u(x, 0) = u_0 =$ costante per $0 < x < l$. La temperatura agli estremi si mantiene costante, $u(0, t) = u_1$ e $u(l, t) = u_2$, per $0 < t < \infty$. Determinare la temperatura della sbarra se lo scambio di calore non esiste sulla superficie laterale. Trovare la temperatura stazionaria.

7. Risolvere il problema 6 per le condizioni al contorno seguenti: su un estremo si mantiene una temperatura costante mentre l'altro è isolato termicamente.

8. Risolvere il problema del riscaldamento di un filo sottile omogeneo con corrente elettrica costante se la temperatura iniziale, la temperatura al contorno e quella del mezzo circostante sono nulle.

9. Un cilindro di lunghezza l, riempito d'aria sotto la pressione e la temperatura del mezzo circostante, è aperto da un estremo all'istante iniziale, e dall'atmosfera circostante, dove la concentrazione di un gas vale u_0, inizia la diffusione di questo gas nel cilindro. Trovare la quantità di gas diffuso nel cilindro durante il tempo t se la concentrazione iniziale del gas nel cilindro è nulla.

10. Risolvere il problema 9 supponendo che l'estremo sinistro del cilindro sia chiuso da una membrana semipermeabile.

11. Risolvere il problema del raffreddamento di una sbarra omogenea a superficie laterale termoisolata se la sua temperatura iniziale è $u(x, 0) = \varphi(x)$ e se agli estremi si produce uno scambio di calore con un mezzo a temperatura nulla. Considerare il caso particolare $\varphi(x) = u_0$.

12. Risolvere il problema 11 supponendo che la temperatura del mezzo circostante sia U_0.

13. Risolvere il problema 11 supponendo che sulla superficie laterale si produce uno scambio di calore con il mezzo circostante a temperatura:

a) nulla,

b) costante e pari a u_1.

14. Trovare la temperatura stazionaria di una sbarra trascurando lo scambio di calore sulla superficie laterale e supponendo che un estremo della sbarra sia isolato termicamente e che l'altro riceva un flusso di calore variabile con il tempo in maniera armonica.

15. Risolvere il problema 14 partendo dall'ipotesi che un estremo della sbarra abbia temperatura nulla e che la temperatura dell'altro estremo varii con il tempo in maniera armonica.

16. Una sbarra $(0, l)$ è composta di due pezzi omogenei della medesima sezione trasversale che si toccano nel punto $x = x_0$ e godono di caratteristiche

a_1, k_1 e a_2, k_2, rispettivamente. Stabilire la temperatura stazionaria in questa sbarra (onde di calore) se un estremo della sbarra ($x = 0$) ha temperatura nulla mentre la temperatura dell'altro varia in modo sinusoidale con il tempo.

17. L'estremo sinistro della sbarra composta del problema 16 ha temperatura nulla, mentre l'estremo destro si mantiene a temperatura $u(l, t) = u_1$; la temperatura iniziale della sbarra è nulla. Determinare la temperatura $u(x, t)$ della sbarra nel regime regolare (primo termine dello sviluppo).

18. Trovare la temperatura $u(x, t)$ della sbarra la cui temperatura iniziale è nulla e le condizioni al contorno hanno la forma

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad u(l, t) = B,$$

dove A, B ed $\alpha > 0$ sono costanti.

§ 3. Problemi sulla retta infinita

1. Propagazione di calore lungo una retta infinita. Funzione della sorgente per un dominio illimitato. Consideriamo sulla retta infinita il problema con dati iniziali (problema di Cauchy):

trovare una funzione limitata $u(x, t)$, definita nel dominio $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, soddisfacente all'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

e alla condizione iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Se $\varphi(x)$ è una funzione continua, allora la condizione iniziale va intesa nel senso che $u(x, t)$ sia continua per $t = 0$, cioè

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

Come abbiamo visto nel n. 7, § 1, la soluzione dell'equazione della conduzione termica è definita univocamente dalle sue condizioni iniziali qualora sia limitata. Pertanto nella formulazione dei teoremi è introdotta la condizione di limitatezza.

Diamo dapprima lo schema formale di risoluzione del problema posto, basato sulla separazione delle variabili.

Cercheremo una soluzione non banale, limitata, dell'equazione (1), rappresentabile sotto forma di prodotto

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione (3) nell'equazione (1), otteniamo

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

dove λ^2 è il parametro di separazione. Di qui risulta che

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{4}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{5}$$

Risolvendo le equazioni (4) e (5), troviamo soluzioni particolari dell'equazione (1) della forma

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \tag{6}$$

che verificano la condizione di limitatezza. Qui λ è numero reale qualsiasi ($-\infty < \lambda < \infty$); pertanto consideriamo l'equazione (6) con il segno « positivo » e costruiamo la funzione

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda. \tag{7}$$

Se le derivate dell'equazione (1) si possono calcolare mediante derivazione sotto il segno di integrale (7), allora la funzione (7) verificherà, evidentemente, l'equazione (1) come sovrapposizione di soluzioni particolari di questa equazione.

Chiedendo che sia soddisfatta la condizione iniziale per $t = 0$, avremo

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{8}$$

Ricorriamo ora alla formula della trasformazione inversa dell'integrale di Fourier:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \tag{9}$$

Sostituendo la (9) nella (7) e cambiando l'ordine di integrazione, otteniamo

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda \right) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

L'integrale interno nell'espressione (10) vale *)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{11}$$

*) B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, Mosca, 1965 (ed. russa).

Sostituendo il valore (11) nella formula (10) otteniamo la rappresentazione integrale della soluzione cercata

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{12}$$

dove

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{13}$$

La funzione $G(x, \xi; t)$ definita dalla formula (13) spesso si chiama soluzione fondamentale dell'equazione della conduzione termica.

Con una verifica diretta ci si può convincere che la funzione

$$G(x, \xi; t - t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \tag{13'}$$

rappresenta la temperatura nel punto x all'istante t se all'istante iniziale $t = t_0$ il punto ξ emana la quantità di calore $Q = c\rho$.

La funzione $G(x, \xi, t - t_0)$ verifica l'equazione di conduzione termica rispetto alle variabili (x, t) *) il che si può provare con derivazione diretta.

La quantità di calore che si trova sull'asse x all'istante $t > t_0$ vale

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0)\, dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2 (t - t_0)}} =$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = Q = c\rho,$$

*) Infatti,

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x - \xi}{2[a^2 (t - t_0)]^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2 (t - t_0)]^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2 (t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2 (t - t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2 (x - \xi)^2}{4[a^2 (t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

cioè

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\alpha = \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right).$$

In tal modo, la quantità di calore sulla retta in esame non varia con il tempo. La funzione $G(x, \xi, t-t_0)$ dipende dal tempo

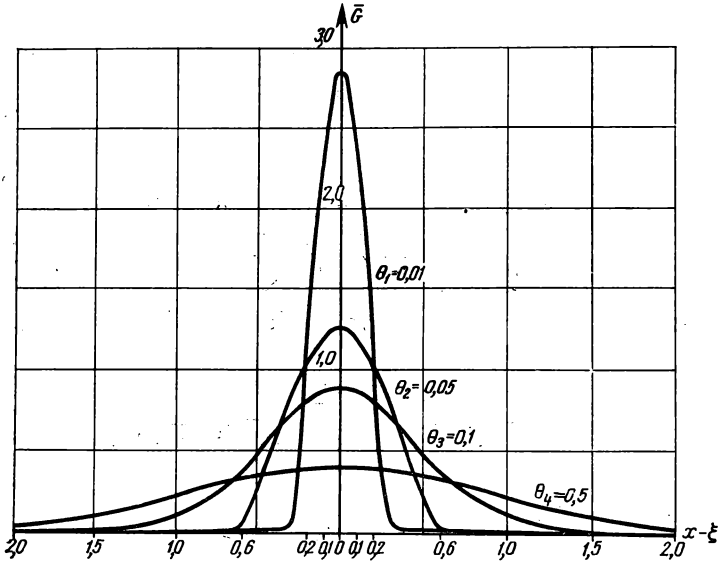


Fig. 40

soltanto attraverso l'argomento $\theta = a^2(t-t_0)$, di modo che si può scrivere questa funzione nella forma

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \qquad (13'')$$

La fig. 40 rappresenta il grafico di G in funzione di x per diversi valori di θ. Quasi tutta l'area limitata da questa curva si trova sopra l'intervallo chiuso

$(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$,

dove ε è un numero piccolo a piacere, purché, $\theta = a^2(t-t_0)$ sia sufficientemente piccolo. Il valore di quest'area moltipli-

cato per $c\rho$ è uguale alla quantità di calore all'istante iniziale. Quindi, per piccoli valori della differenza $t - t_0 > 0$ quasi tutto il calore è concentrato in un piccolo intorno del punto ξ. Da quanto detto sopra risulta che all'istante t_0 tutta la quantità di calore è collocata nel punto ξ.

Considerando la variazione della temperatura in un punto fisso $x = \xi + h$, al passare del tempo per $h = 0$, cioè per $x = \xi$, otteniamo

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Quindi, la temperatura nel punto che emana il calore è indefinitamente grande per θ piccolo.

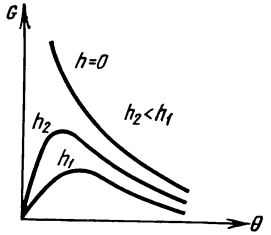


Fig. 41

Se $x \neq \xi$, cioè se $h \neq 0$, la funzione G è rappresentata come prodotto di due fattori

$$G_{x\neq\xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right] e^{-h^2/4\theta}.$$

Il secondo fattore è inferiore a 1: per θ grande esso ≈ 1, per θ piccolo esso ≈ 0. Ne segue che $G_{x\neq\xi} = G_{x=\xi}$ per θ grande; $G_{x\neq\xi} \ll G_{x=\xi}$ per θ piccolo. Più piccolo è h, cioè più vicino è x a ξ, tanto più grande è il secondo fattore. La fig. 41 dà i grafici delle funzioni $G_{x=\xi}$ e $G_{x\neq\xi}$ per $h_2 < h_1$.

È facile vedere che

$$\lim_{\theta\to 0} G_{x\neq\xi} = 0.$$

Sviluppando l'indeterminazione, troviamo

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-h^2/4\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^{-3/2}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{h^2/4\theta}} = 0.$$

La formula (13′) mostra che in ogni punto x la temperatura creata da una sorgente puntuale istantanea, agente all'istante iniziale $t = 0$, è non nulla per istanti piccoli a piacere. Questo fatto si potrebbe interpretare come risultato di una propagazione di calore indefinitamente rapida (velocità infinita). Ma ciò contraddice le rappresentazioni cinetico-molecolari della natura del calore. Questa contraddizione è dovuta al fatto che nel dedurre l'equazione della conduzione termica ci siamo serviti delle rappresentazioni fenomenologiche della propagazione del calore a prescindere dalla natura inerziale del movimento delle molecole.

Precisiamo ora le condizioni di applicabilità della formula (12).

Dimostriamo che la formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (12')$$

detta *integrale di Poisson*, per ogni funzione limitata $|\varphi(\xi)| < M$ rappresenta per $t > 0$ la soluzione dell'equazione di conduzione termica tangente con continuità a $\varphi(x)$ per $t = 0$ in tutti i punti di continuità di questa funzione.

Dimostriamo preliminarmente il seguente lemma (*principio di sovrapposizione generalizzato*).

Se una funzione $U(x, t, \alpha)$ *verifica nelle variabili* (x, t) *l'equazione differenziale lineare*

$$L(U) = 0$$

per ogni valore fissato del parametro α, *allora l'integrale*

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

rappresenta anch'esso una soluzione della stessa equazione $L(u) = 0$ *se le derivate che figurano nell'operatore differenziale lineare* $L(U)$ *si possono calcolare per derivazione sotto il segno di integrale.*

La dimostrazione del lemma non presenta alcuna difficoltà. L'operatore differenziale lineare $L(U)$ è la somma delle derivate della funzione U con alcuni coefficienti dipendenti da x e t. La derivazione della funzione u si può eseguire, per ipotesi, sotto il segno di integrale. I coefficienti si possono scrivere anch'essi sotto il segno di integrale. Ne segue che

$$L(u) = \int L(U(x, t, \alpha))\, \varphi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

vale a dire che la funzione $u(x, t)$ verifica l'equazione $L(u) = 0$.

Ricordiamo le condizioni sufficienti di derivabilità sotto il segno di integrale dipendente da un parametro.

La funzione

$$F(x) = \int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha,$$

con limiti finiti a e b, è derivabile sotto il segno di integrale se $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ è una funzione continua delle variabili x ed α nel dominio di loro variazione (si veda B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, Mosca, 1965, ed. russa).

È facile vedere anche che la funzione

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

con limiti finiti a e b, è derivabile sotto il segno di integrale sotto le stesse condizioni per quanto riguarda la funzione $f(x, \alpha)$ e $\varphi(\alpha)$ è una funzione limitata (e anche assolutamente integrabile) arbitraria. Se i limiti d'integrazione sono infiniti, allora occorre la convergenza uniforme dell'integrale ottenuto in seguito alla derivazione della funzione integranda rispetto al parametro (si veda il libro citato).

Le stesse osservazioni si riferiscono anche agli integrali multipli dipendenti da più parametri.

Nel caso delle equazioni lineari $L(u) = 0$, si ha il principio di sovrapposizione esprimente che la funzione

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x, t),$$

rappresentata sotto forma di somma di un numero finito di soluzioni parziali, è anch'essa soluzione dell'equazione in questione. Se abbiamo una soluzione $u(x, t, \alpha)$ dipendente dal parametro, la somma integrale

$$\sum u(x, t, \alpha_n)\, C_n \quad (C_n = \varphi(\alpha_n)\, \Delta\alpha) \tag{14}$$

è anch'essa soluzione dell'equazione $L(u) = 0$. Il lemma dimostrato, così come il lemma dato alla pag. 94, stabilisce le condizioni sotto le quali il limite della somma (14), pari nel caso considerato a

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

rappresenta anch'esso una soluzione dell'equazione $L(u) = 0$. Da questo punto di vista è naturale chiamare *principio di sovrapposizione generalizzato* il lemma appena dimostrato, così come quello dato alla pag. 94.

Passiamo allo studio dell'integrale (12′). Dimostriamo, prima di tutto, che se la funzione $\varphi(x)$ è limitata, cioè $|\varphi(x)| < M$, allora l'integrale (12′) è convergente e rappresenta una funzione limitata. Infatti,

$$|u(x, t)| < M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi =$$

$$= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = M \quad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

cosicché

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

Dimostriamo anche che l'integrale (12′) verifica l'equazione della conduzione termica per $t > 0$. A tal fine è sufficiente dimostrare che le derivate di questo integrale per $t > 0$ si possono calcolare per derivazione sotto il segno d'integrale.

Nel caso di limiti d'integrazione finiti ciò è legittimo poiché tutte le funzioni derivate

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

sono continue per $t > 0$. Per poter derivare sotto il segno di integrale nel caso di limiti infiniti, è sufficiente che l'integrale ottenuto dopo la derivazione sotto il segno di integrale sia uniformemente convergente. Effettuiamo questa indagine sull'esempio della derivata prima rispetto a x.

Dunque, per la dimostrazione della derivabilità della funzione (12) rispetto a x e dell'uguaglianza

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(G(x, \xi, t)\right) \varphi(\xi)\, d\xi$$

è sufficiente dimostrare la convergenza uniforme dell'integrale a secondo membro; inoltre, per la derivabilità nel punto (x_0, t_0) è sufficiente dimostrare la convergenza uniforme dell'integrale in un dominio di valori delle variabili, contenente i valori in esame (x_0, t_0) ad esempio nel dominio

$$t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2, \qquad |x| \leqslant \bar{x}.$$

Una condizione sufficiente di convergenza uniforme dell'integrale (analoga al criterio di convergenza uniforme della serie) è l'esistenza di una funzione positiva $F(\xi)$ indipendente dai parametri (x, t) la cui maggiorante è

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\right| \leqslant F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x}, \tag{15}$$

e il cui integrale

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\, d\xi < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi)\, d\xi < \infty \tag{15′}$$

è convergente. La grandezza x_1 indica un numero a partire dal quale si verifica la disuguaglianza (15).

Maggioriamo il valore assoluto dell'espressione integranda nella formula di $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\Big| \cdot |\varphi(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} = F(\xi) \quad \text{per} \quad \xi < \bar{x} \tag{16}$$

per $|x| \leqslant \bar{x}$ e $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ qualsiasi. È facile vedere che l'integrale (15′) della funzione $F(\xi)$ è convergente. L'integrale

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\, d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} d\xi =$$

$$= \int_{x_1 - \bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2 t_2}} d\xi_1 \quad (\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

converge poiché sotto il segno di integrale figura un fattore del tipo $(a\xi + b)\, e^{-c\xi^2}$. Di qui concludiamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

È completamente analoga la dimostrazione della possibilità di calcolo di tutte le altre derivate sotto il segno di integrale. Abbiamo dimostrato così che la funzione (12′) verifica l'equazione della conduzione termica.

Precisiamo ora la proprietà fondamentale dell'integrale (12′), dimostriamo cioè che

$$u(x, t) \to \varphi(x_0) \quad \text{per} \quad t \to 0 \quad \text{e} \quad x \to x_0$$

in tutti i punti di continuità della funzione $\varphi(x)$.

Supponiamo dunque che $\varphi(x)$ sia continua in un punto x_0. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

cioè che per qualsiasi $\varepsilon > 0$ si può trovare $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

qualora

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{e} \quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

In virtù della supposta continuità della funzione $\varphi(x)$ nel punto x_0 esiste un $\eta(\varepsilon)$ tale che

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{6}, \tag{17}$$

purché

$$|x-x_0|<\eta.$$

Dividendo in parti l'intervallo d'integrazione, rappresentiamo $u(x, t)$ sotto forma di somma di tre addendi:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\ldots d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_2}^{\infty}\ldots d\xi=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t), \tag{18}$$

dove

$$x_1=x_0-\eta \quad \text{e} \quad x_2=x_0+\eta.$$

L'addendo principale u_2 di questa somma si può rappresentare nella forma

$$u_2(x,t)=\frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d\xi=I_1+I_2.$$

L'integrale I_1 si calcola direttamente

$$I_1=\frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{a^2t}}d\xi=\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

dove

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}, \quad d\alpha=\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}. \tag{19}$$

Appena $|x-x_0|<\eta$, il limite superiore diventa positivo e l'inferiore negativo, e per $t\to 0$ il limite superiore tende a $+\infty$ e il limite inferiore a $-\infty$. Ne segue che

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} I_1=\varphi(x_0).$$

Quindi, si può trovare un δ_1 tale che

$$| I_1 - \varphi(x_0) | < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{20}$$

purché

$$| x - x_0 | < \delta_1 \quad \text{e} \quad | t | < \delta_1.$$

Mostriamo che gli altri integrali, I_2, u_1 e u_3, sono piccoli. Stimiamo prima di tutto l'integrale I_2:

$$| I_2 | \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} | \varphi(\xi) - \varphi(x_0) | \, d\xi.$$

Dalle uguaglianze (18) risulta che per

$$x_1 < \xi < x_2$$

si ha la disuguaglianza

$$| \xi - x_0 | < \eta.$$

Partendo dalla disuguaglianza (17) e tenendo conto che

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1,$$

qualunque siano x' e x'', otteniamo

$$| I_2 | \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{21}$$

dove la nuova variabile α è definita dalla formula (19). Stimiamo ora

$$| u_3(x, t) | = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^3}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \to 0 \quad \text{per} \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0 \end{matrix} \tag{22}$$

e analogamente

$$| u_1(x,\ t) | = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, \varphi(\xi)\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \to 0 \quad \text{per} \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0, \end{matrix} \tag{23}$$

poiché se $x \to x_0$, allora $x_2 - x > 0$ e $x_1 - x < 0$; se $t \to 0$, negli ultimi termini delle (22) e (23) il limite inferiore e quello superiore tendono a $+\infty$ e $-\infty$, rispettivamente. Quindi, si può trovare un δ_2 tale che

$$| u_3(x,\ t) | < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad | u_1(x,\ t) | < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{24}$$

purché

$$| x - x_0 | < \delta_2 \quad \text{e} \quad | t | < \delta_2.$$

Partendo dalle stime (22) e (23), otteniamo

$$| u(x,\ t) - \varphi(x_0) | \leqslant | u_1 + [I_1 - \varphi(x_0)] + I_2 + u_3 | \leqslant$$

$$\leqslant | u_1 | + | I_1 - \varphi(x_0) | + | I_2 | + | u_3 | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{25}$$

purché

$$| x - x_0 | < \delta \quad \text{e} \quad | t | < \delta,$$

dove δ è uguale al più piccolo dei numeri δ_1 e δ_2.

Abbiamo dimostrato così che la funzione

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{12'}$$

è limitata e soddisfa l'equazione della conduzione termica e la condizione iniziale.

Se la condizione iniziale è assegnata per $t = t_0$ anziché per $t = 0$, l'espressione di $u(x,\ t)$ diventa

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t - t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t - t_0)}}\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{12''}$$

L'unicità della soluzione ottenuta per la funzione continua $\varphi(x)$ deriva dal teorema dimostrato nel n. 3 del § 2. Se la funzione iniziale $\varphi(x)$ ha un numero finito di punti di discontinuità, l'integrale (12″) dà una soluzione limitata dell'equazione (1),

continua ovunque, tranne nei punti di discontinuità della funzione $\varphi(x)$ *).

Consideriamo a titolo di esempio il seguente problema: *trovare la soluzione dell'equazione della conduzione termica se la temperatura iniziale* (*per* $t = t_0 = 0$) *ha valori costanti ma distinti per* $x > 0$ *e* $x < 0$, *e precisamente*:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{per} \quad x > 0, \\ T_2 & \text{per} \quad x < 0. \end{cases}$$

Utilizzando la formula (12') otteniamo la soluzione del problema nella forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha, \tag{26}$$

poiché

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

*) Usando il metodo esposto nel n. 3 del § 3, si può vedere che la funzione $u(x, t)$ è definita univocamente sotto le suddette condizioni.

In particolare, se

$T_2 = 0, \quad T_1 = 1,$

allora

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha\right) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

L'andamento della temperatura all'istante dato t è dato dalla curva

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

dove z rappresenta l'ascissa del punto in cui va definita la temperatura se come unità di lunghezza, dipendente da t, si considera il valore $2\sqrt{a^2 t}$. La costruzione di questa curva non presenta difficoltà alcuna poiché l'integrale

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

usualmente detto *integrale degli errori*, si incontra spesso nella teoria delle probabilità e per esso esistono tabelle particolareggiate *).

La formula (26) per T_1 e T_2 qualsiasi può essere scritta nel seguente modo:

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

È evidente di qui che nel punto $x = 0$ la temperatura è sempre costante e uguale alla semisomma dei valori iniziali a sinistra e a destra poiché $\Phi(0) = 0$.

La soluzione dell'equazione omogenea

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0)$$

con le condizioni iniziali

$u(x, 0) = 0$

deve essere rappresentata, evidentemente, dalla formula

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau, \tag{27}$$

*) Si veda, ad esempio, A. A. Markov, *Corso di teoria delle probabilità* (ed. russa) contenente tabelle di questo integrale a sei segni decimali. Si veda anche la tabella meno dettagliata alla fine del presente libro.

come ciò deriva dal significato della funzione $G(x, \xi, t)$ (si veda il n. 4, § 2). Non studieremo in dettaglio questa formula e le condizioni di applicabilità da imporre alla funzione $f(x, t)$.

2. Problemi ai limiti per una retta semilimitata. Come abbiamo già detto al § 1, n. 4, nei casi in cui è importante la distribuzione della temperatura in prossimità di uno degli estremi della sbarra mentre l'influenza dell'altro si considera inessenziale, si suppone che quest'ultimo estremo si trovi all'infinito. Ciò conduce al problema di determinare la soluzione dell'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

sulla retta seminfinita $x > 0$ per $t > 0$, soddisfacente alla condizione iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

e a una condizione al contorno, la quale, a seconda del regime assegnato sulla frontiera, si considera sotto una delle forme seguenti:

$u(0, t) = \mu(t)$ (primo problema ai limiti),

$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t)$ (secondo problema ai limiti)

o

$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) = \theta(t)]$ (terzo problema ai limiti).

Nel seguito ci limiteremo allo studio dettagliato del solo *primo problema ai limiti* che consiste nella ricerca della soluzione dell'equazione della conduzione termica sotto le condizioni aggiuntive

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \tag{28}$$

Affinché le condizioni del problema definiscano un'unica soluzione, è necessario imporre alcune condizioni in più all'infinito. Chiediamo come condizione aggiuntiva che la funzione $u(x, t)$ sia limitata ovunque

$$|u(x, t)| < M \quad \text{per} \quad 0 < x < \infty \quad \text{e} \quad t \geqslant 0,$$

dove M è una costante. Ne segue che la funzione iniziale $\varphi(x)$ deve soddisfare anche la condizione di limitatezza

$$|\varphi(x)| < M.$$

La soluzione del problema in esame si può rappresentare sotto forma di somma

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

dove $u_1(x, t)$ rappresenta l'influenza delle sole condizioni iniziali e $u_2(x, t)$ quella della sola condizione al contorno. Queste funzioni si possono definire come soluzioni dell'equazione (1), soddisfacenti alle condizioni

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0 \tag{28'}$$

e

$$u_2(x, 0) = 0, \qquad u_2(0, t) = \mu(t). \tag{28''}$$

È evidente che la somma di queste funzioni verificherà le condizioni (28). Dimostriamo preliminarmente due lemmi riguardanti la funzione $u(x, t)$ definita dall'integrale di Poisson

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{29}$$

1. *Se* $\psi(x)$ *è una funzione dispari, cioè se*

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

allora la funzione (29)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

si annulla per $x = 0$,

$$u(0, t) = 0.$$

In questo caso è supposto, ovviamente, che l'integrale, che definisce la funzione $u(x, t)$, sia convergente e ciò si verifica se $\psi(x)$ è una funzione limitata. La funzione integranda nell'integrale

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

è dispari rispetto a ξ poiché rappresenta un prodotto di una funzione dispari per una funzione pari. Ma l'integrale di una funzione dispari entro limiti simmetrici rispetto all'origine delle coordinate è nullo; quindi,

$$u(0, t) = 0,$$

come si doveva dimostrare.

2. *Se* $\psi(x)$ *è una funzione pari, cioè se*

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

la derivata della funzione $u(x, t)$ *della formula* (29) *è nulla per* $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

per tutte le variabili $t > 0$.

Infatti,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \psi(\xi)\, d\xi \Big|_{x=0} = 0,$$

poiché per $x = 0$ la funzione integranda è dispari se $\psi(\xi)$ è pari.

Passiamo ora alla costruzione della funzione $u_1(x, t)$ soddisfacente alle condizioni (28′).

Introduciamo la funzione ausiliaria $U(x, t)$ definita sulla retta infinita $-\infty < x < \infty$ e verificante sia l'equazione che le condizioni

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{per} \quad x > 0.$$

In base al lemma si può definire questa funzione mediante la funzione iniziale $\Psi(x)$ coincidente con $\varphi(x)$ per $x > 0$ e rappresentante il prolungamento dispari di $\varphi(x)$ per $x < 0$, cioè

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per} \quad x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{per} \quad x < 0, \end{cases}$$

cosicché

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Psi(\xi)\, d\xi.$$

Considerando i valori della funzione $U(x, t)$ soltanto nel dominio $x \geqslant 0$ che ci interessa, avremo

$$u(x, t) = U(x, t) \quad \text{per} \quad x \geqslant 0.$$

Partendo dalla definizione della funzione $\Psi(x)$, otterremo

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Psi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Psi(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

dove nel primo integrale è stata eseguita la sostituzione $\xi' = -\xi$ e usata l'uguaglianza

$$\Psi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi').$$

Riunendo i due integrali, otteniamo la funzione cercata

$$u_1(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (30)$$

in una forma non contenente funzioni ausiliarie. Osserviamo che per $x = 0$ l'espressione fra parentesi graffa si annulla e $u_1(0,\ t) = 0$.

Partendo dal lemma 2, è facile vedere che la soluzione dell'equazione della conduzione termica con la condizione al contorno omogenea di seconda specie $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0,\ t) = 0$ e la condizione iniziale $\bar{u}_1(x,\ 0) = \varphi(x)$ è rappresentabile nella forma

$$\bar{u}_1(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (30')$$

Applichiamo la formula ottenuta alla risoluzione del problema del raffreddamento di una sbarra uniformemente riscaldata, sulla frontiera della quale si mantiene una temperatura costante che supporremo nulla. Il problema consiste nella ricerca della soluzione dell'equazione della conduzione termica, che soddisfi le condizioni

$$v_1(x,\ t_0) = T, \quad v_1(0,\ t) = 0.$$

Tenendo conto che la condizione iniziale è assegnata per $t = t_0$ anziché per $t = 0$, al posto della formula (30) otteniamo

$$v_1(x,\ t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right\}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \qquad (31)$$

Dividendo l'integrale in due componenti ed introducendo le variabili

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

abbiamo

$$v_1(x,\ t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \qquad (31')$$

dove

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

è l'integrale degli errori.

Passiamo ora alla ricerca della funzione $u_2(x, t)$ rappresentante la seconda parte della soluzione del primo problema ai limiti.

Supponiamo che

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{costante.}$$

La funzione

$$\bar{v}(x, t)=\mu_0\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \tag{32}$$

è la soluzione dell'equazione della conduzione termica soddisfacente alle condizioni

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

Ne segue che la funzione

$$v(x, t)=\mu_0-\bar{v}(x, t)=\mu_0\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right)\right] \tag{33}$$

è quella cercata in quanto verifica la stessa equazione e le condizioni

$$v(x, t_0) = 0 \quad (x > 0) \quad \text{e} \quad v(0, t) = \mu_0 \quad (t > t_0).$$

Rappresentiamo $v(x, t)$ nella forma

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t - t_0),$$

dove

$$U(x, t-t_0)=1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha \tag{34}$$

è soluzione dello stesso problema, così come lo è $v(x, t)$ per $\mu_0 = 1$.

Per definizione, la funzione $U(x, t - t_0)$ ha senso soltanto per $t \geqslant t_0$. Prolunghiamo la definizione di questa funzione ponendo

$$U(x, t - t_0) \equiv 0 \quad \text{per} \quad t < t_0.$$

È evidente che questa definizione concorda col valore della funzione $U(x, t)$ per $t = 0$, e la funzione così definita verificherà l'equazione della conduzione termica per ogni t nel caso $x > 0$. Il valore al contorno di $U(x, t)$ (per $x = 0$) è una funzione a gradini uguale a zero per $t < t_0$ e a 1 per $t > t_0$. La funzione $U(x, t)$

si incontra assai spesso in applicazioni e rappresenta un mezzo ausiliario di ricerca della funzione $u_2(x, t)$.

Consideriamo il secondo problema ausiliario che consiste nella ricerca della soluzione dell'equazione della conduzione termica con le condizioni iniziali e al contorno seguenti:

$$v(x, t_0) = 0, \quad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{per} \quad t_0 < t < t_1, \\ 0 & \text{per} \quad t > t_1. \end{cases}$$

Con una verifica diretta è facile vedere che

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$

In generale, se la funzione di frontiera $\mu(t)$ è assegnata sotto la forma di funzione a gradini

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{per} \quad t_0 < t \leqslant t_1, \\ \mu_1 & \text{per} \quad t_1 < t \leqslant t_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{n-1} & \text{per} \quad t_{n-1} < t \leqslant t_n, \end{cases}$$

allora, ragionando analogamente, troviamo che la soluzione del problema ai limiti con questa funzione $\mu(t)$ può essere scritta nel seguente modo:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i [U(x, t - t_i) - U(x, t - t_{i+1})] + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}). \tag{35}$$

Ricorrendo al teorema degli incrementi finiti, otteniamo

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial t}\Big|_{\tau_i} \Delta\tau + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) \tag{36}$$

per $t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}$.

Passiamo ora al problema della ricerca della soluzione $u(x, t)$ dell'equazione della conduzione termica con condizione iniziale nulla e condizione al contorno

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

dove $\mu(t)$ è una qualsiasi funzione continua a tratti. È facile ottenere la soluzione approssimata del problema nella forma (36) se sostituiamo a $\mu(t)$ una funzione costante a tratti. Passando al limite al diminuire degli intervalli di costanza della funzione ausiliaria, troviamo che il limite della somma (36) sarà uguale a

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t - \tau)\, \mu(\tau)\, d\tau,$$

poiché per $x > 0$

$$\lim_{t-t_{n-1}\to 0} \mu_{n-1} U(x,\ t-t_{n-1}) = 0.$$

È evidente che la soluzione cercata $u_2(x,\ t)$ del secondo problema deve essere uguale a

$$u_2(x,\ t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x,\ t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

Non ci soffermeremo in dettaglio sulla legittimità del passaggio al limite e sulla precisazione delle condizioni di applicabilità di questa formula alla funzione $\mu(\tau)$.

È facile convincersi che

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,\ t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^2 x}{[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} =$$

$$= -2a^2 \frac{\partial G}{\partial x}(x,\ 0,\ t) = 2a^2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\right).$$

In tal modo la soluzione cercata nel caso della funzione $\mu(t)$ arbitraria può essere rappresentata nella forma

$$u_2(x,\ t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau)\,d\tau$$

ossia

$$u_2(x,\ t) = 2a^2 \int_{t_0}^t \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,\ 0,\ t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau\ ^*). \tag{38}$$

È da notare che nel dedurre la formula (38) non siamo ricorsi mai a proprietà speciali dell'equazione della conduzione termica, tranne che alla sua linearità. Non ci siamo serviti mai della formula analitica della funzione $U(x,\ t)$ e siamo partiti soltanto dal fatto che essa soddisfa le condizioni al contorno e iniziali

$U(0,\ t) = 1$ per $t > 0$,
$U(x,\ 0) = 0$ per $x > 0$

ossia

$$U(0,\ t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0, \\ 0 & \text{per } t < 0. \end{cases}$$

*) Questa rappresentazione della soluzione del primo problema ai limiti con condizioni iniziali nulle è data qui per comodità di confronto con la soluzione dello stesso problema, ottenuta al § 4 del capitolo VI con un altro metodo.

È evidente che se dobbiamo risolvere un'equazione differenziale con la condizione al contorno

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

condizioni iniziali nulle e condizioni aggiuntive nulle, qualora ne esistano (per $x = l$, ad esempio), la soluzione di questo problema può essere rappresentata nella forma

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau, \tag{39}$$

dove $U(x, t)$ è la soluzione del problema ai limiti analogo per

$$U(0, t) = 1.$$

Il criterio qui esposto, detto *criterio di Duhamel*, mostra che la difficoltà principale nella risoluzione dei problemi ai limiti è dovuta alla costanza della condizione al contorno. Essendo risolto un problema ai limiti con condizione al contorno costante, la soluzione di un problema ai limiti con condizione al contorno variabile è rappresentabile dalla formula (39). Si ricorre spesso a questo criterio per la risoluzione di numerosi problemi ai limiti dando la soluzione soltanto per la condizione al contorno costante senza specificare che la soluzione del problema ai limiti con $\mu(t)$ variabile è data dalla formula (39).

La somma delle funzioni

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

dà la soluzione del primo problema ai limiti sulla retta seminfinita per un'equazione omogenea.

Usando la formula (27) del n. 1, § 3, e il principio di prolungamento dispari è facile vedere che la soluzione dell'equazione non omogenea

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < \infty,\ t > 0)$$

con condizione iniziale nulla e al contorno nulla ($u(0, t) = 0$) è data dalla formula

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f \times$$

$$\times (\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{40}$$

La somma

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

fornisce la soluzione del primo problema ai limiti

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

§ 4. Problemi senza condizioni iniziali

Se si studia un processo di conduzione termica in un istante sufficientemente lontano da quello iniziale, l'influenza delle condizioni iniziali non incide praticamente sulla distribuzione della temperatura al momento dell'osservazione. In questo caso si pone il problema della ricerca della soluzione dell'equazione della conduzione termica soddisfacente a condizioni al contorno di uno dei tre tipi assegnato ogni $t > -\infty$. Se la sbarra è limitata, vanno assegnate condizioni al contorno nei suoi due estremi. Nel caso di una sbarra seminfinita va assegnata una sola condizione al contorno.

Consideriamo il primo problema ai limiti per la sbarra seminfinita:

trovare la soluzione limitata dell'equazione della conduzione termica nel dominio $x > 0$, *soddisfacente alla condizione*

$$u(0, t) = \mu(t), \tag{1}$$

dove $\mu(t)$ *è una funzione data. Si suppone che le funzioni* $u(x, t)$ *e* $\mu(t)$ *siano limitate ovunque, cioè*

$$|u(x, t)| < M,$$
$$|\mu(t)| < M.$$

Come verrà mostrato più avanti (si veda il testo in carattere minuto), la funzione $u(x, t)$ è definita univocamente. Consideriamo il più frequente caso di condizione al contorno

$$\mu(t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

Questo problema fu studiato già da Fourier e applicato per la prima volta alla determinazione delle variazioni di temperatura del suolo *).

Scriviamo la condizione al contorno nella forma

$$\mu(t) = Ae^{i\omega t}. \tag{2'}$$

Dalla linearità dell'equazione della conduzione termica risulta che le parti reale ed immaginaria di una certa soluzione complessa dell'equazione della conduzione termica verificano separatamente ciascuna la stessa equazione.

*) Si veda l'Appendice I.

Se è trovata una soluzione dell'equazione della conduzione termica soddisfacente alla condizione (2'), la sua parte reale verifica la condizione (2) e la parte immaginaria la condizione $u(0, t) = \mu_1(t) = A \operatorname{sen} \omega t$.

Dunque, consideriamo il problema

$$\left.\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx}, \\ &u(0, t) = Ae^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e cerchiamone la soluzione nella forma

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \tag{4}$$

dove α e β sono costanti da determinare.

Sostituendo l'espressione (4) nell'equazione (3) e nella condizione al contorno, troviamo

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta, \quad \beta = i\omega,$$

da cui

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right].$$

Per $u(x, t)$ abbiamo

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right)}. \tag{5}$$

La parte reale di questa soluzione

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right) \tag{6}$$

verifica l'equazione della conduzione termica con condizione al contorno (2). A seconda del segno la formula (6) definisce non una, bensì due funzioni. Tuttavia, solo la funzione corrispondente al segno negativo verifica la condizione di limitatezza. In tal modo otteniamo la soluzione del problema posto, nella forma

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right). \tag{7}$$

Analogamente si risolve il problema senza condizioni iniziali per un segmento limitato:

$$\left.\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx}, \\ &u(0, t) = A \cos \omega t, \\ &u(l, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Riscrivendo la condizione al contorno sotto la forma

$$\hat{u}(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \quad \hat{u}(l, t) = 0,$$

cercheremo una soluzione rappresentabile nel seguente modo

$$\hat{u}(x, t) = X(x)\, e^{-i\omega t}. \tag{9}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (8), otteniamo per la funzione $X(x)$ l'equazione

$$X'' + \frac{i\omega}{a^2} X = 0 \quad \text{o} \quad X'' + \gamma^2 X = 0,$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,(1+i) \tag{10}$$

e le condizioni aggiuntive

$$X(0) = A, \quad X(l) = 0. \tag{11}$$

Di qui ricaviamo la seguente espressione per la funzione $X(x)$:

$$X(x) = A\,\frac{\operatorname{sen}\gamma(l-x)}{\operatorname{sen}\gamma l} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{12}$$

dove X_1 e X_2 sono la parte reale e immaginaria della funzione $X(x)$. Per le funzioni $\hat{u}(x, t)$ otteniamo l'espressione

$$\hat{u}(x, t) = A\,\frac{\operatorname{sen}\gamma(l-x)}{\operatorname{sen}\gamma l}\, e^{-i\omega t}. \tag{13}$$

Separando la parte reale della funzione $\hat{u}(x, t)$, troviamo la seguente forma della soluzione del problema senza condizioni iniziali:

$$u(x, t) = X_1(x)\cos\omega t + X_2(x)\operatorname{sen}\omega t. \tag{14}$$

Non diamo qui l'espressione esplicita per X_1 e X_2, sebbene ciò non presenti difficoltà alcuna.

Se la funzione alla frontiera rappresenta una combinazione di armoniche di frequenze distinte, la soluzione di questo problema può essere ottenuta come sovrapposizione di soluzioni corrispondenti ad armoniche separate.

Dimostriamo ora l'unicità del problema senza condizioni iniziali per la retta semilimitata. Partiremo dalla formula

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} u(0, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} u(\xi, t_0)\, d\xi = I_1 + I_2$$

$$(t \geqslant t_0), \tag{15}$$

che rappresenta ogni soluzione limitata dell'equazione della conduzione termica mediante il suo valore iniziale $u(x, t_0)$ con la condizione al contorno $u(0, t) = \mu(t)$ nel dominio $x \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$.

Mostriamo che

$$\lim_{t_0 \to -\infty} I_2(x, t) = 0, \tag{16}$$

alla sola condizione che

$$| u(x, t) | < M$$

per ogni t. Infatti,

$$| I_2 | < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_1^2} d\alpha_1 - \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_2^2} d\alpha_2 \right\} =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

dove

$$\alpha_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

Di qui segue l'uguaglianza (16) poiché x e t sono fissate e $t_0 \to -\infty$. Se nella formula (15) fissiamo x e t e facciamo tendere $t_0 \to -\infty$, allora $u(x, t)$ sarà uguale al limite del solo primo termine e avremo la formula

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \tag{17}$$

la quale dimostra che il problema considerato non può avere due soluzioni diverse. Si può anche dimostrare che per ogni funzione continua a tratti, limitata, $\mu(t)$ la formula (17) dà soluzione del problema posto.

Analogamente può essere studiato il problema senza condizioni iniziali per un intervallo limitato ($0 \leqslant x \leqslant l$). Questo problema senza condizione di limitatezza ha soluzione non univoca poiché la funzione

$$u_n(x, t) = Ce^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x$$

rappresenta per ogni n una soluzione di questo problema con valori al contorno nulli. Tuttavia soluzioni di questo tipo per $t \to -\infty$ non sono limitate per cui è facile dimostrare l'unicità della soluzione limitata di questo problema.

Problemi al capitolo III

1. Definire la funzione di sorgente di calore puntuale istantanea per:

a) una sbarra semilimitata con condizioni al contorno di prima e di seconda specie e in assenza di scambio di calore sulla superficie laterale;

b) una sbarra illimitata in presenza di scambio di calore sulla superficie laterale;

c) una sbarra semilimitata in presenza di scambio di calore sulla superficie laterale e condizioni al contorno dei primi due tipi.

2. Definire la funzione di influenza di una sorgente di calore puntuale istantanea per una sbarra semilimitata a superficie laterale isolata termicamente nel caso del terzo problema ai limiti (condizione al contorno della forma $\frac{\partial u}{\partial x} - hu\,(0,\ t) = f\,(t)$).

3. Risolvere l'equazione della conduzione termica per i casi a), b) e c) del problema 1 se:

1) nel punto $x = \xi_0$ agisce una sorgente di calore $Q = Q\,(t)$, in particolare, $Q = Q_0 =$ costante;

2) è assegnata la distribuzione iniziale della temperatura $u\,(x, 0) = \varphi\,(x)$ in particolare

$$\varphi\,(x) = \begin{cases} u_0 & \text{per } 0 < x < l, \\ 0 & \text{all'esterno dell'intervallo } (0,\ l); \end{cases}$$

3) le sorgenti di calore sono distribuite con densità $f\,(x,\ t)$ su tutta la sbarra, mentre la temperatura iniziale è nulla; considerare, in particolare, il caso $f = q_0 =$ costante (sorgenti stazionarie).

4. Una sbarra semilimitata con superficie laterale isolata termicamente è stata riscaldata uniformemente alla temperatura

$$u\,(x,\ 0) = u_0 = \text{costante} \quad (x > 0).$$

L'estremo della sbarra, a partire dall'istante $t = 0$, si mantiene alla temperatura nulla

$$u\,(0,\ t) = 0 \quad (t > 0).$$

Trovare la temperatura della sbarra $u\,(x,\ t)$ e, utilizzando le tabelle dell'integrale degli errori

$$\Phi\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

costruire i grafici rispetto a x nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$ della funzione $u\,(x,\ t)$ per $t = l^2/16a^2$, $t = l^2/2a^2$, $t = l^2/a^2$.

Suggerimento. È comodo introdurre le variabili adimensionali

$$x' = x/l, \quad \theta = a^2t/l^2, \quad v = u/u_0.$$

5. L'estremo di un cilindro semilimitato, all'istante iniziale $t = 0$, viene aperto nell'atmosfera in cui la concentrazione di un gas è u_0.

Trovare la concentrazione di gas $u\,(x,\ t)$ nel cilindro per $t > 0$ e $x > 0$ se la concentrazione iniziale $u\,(x,\ t) = 0$. Usando le tabelle dell'integrale degli errori, stabilire il lasso di tempo in cui nello stato a distanza l dall'estremo del cilindro la concentrazione di gas arriva al 95% della concentrazione esterna. Trovare la legge secondo la quale si muove il fronte di concentrazione costante.

6. All'estremo di una sbarra semilimitata, la cui temperatura iniziale è nulla, si trasmette un flusso di calore $ku_x\,(0,\ t) = q\,(t)$. Trovare la temperatura $u\,(x,\ t)$ della sbarra se:

a) la sbarra è isolata termicamente ai fianchi;

b) sulla superficie laterale si ha scambio di calore (secondo la legge di Newton) con un mezzo a temperatura nulla.

Considerare il caso particolare $q = q_0 =$ costante.

7. L'estremo di una sbarra semilimitata è mantenuto a temperatura costante u_0; sulla superficie laterale della sbarra si ha scambio di calore con

un mezzo a temperatura costante u_1. La temperatura iniziale della sbarra è nulla. Trovare la temperatura $u(x, t)$ della sbarra.

8. Risolvere i problemi 6a, 6b supponendo $u(x, 0) = u_0 = \text{costante}$.

9. Trovare la temperatura stabilitasi lungo una sbarra semilimitata con superficie laterale isolata termicamente all'estremo della quale:

a) è assegnata la temperatura $u(0, t) = A \cos \omega t$;

b) è assegnato il flusso di calore $Q(t) = B \operatorname{sen} \omega t$;

c) si ha scambio di calore secondo la legge di Newton con un mezzo la cui temperatura varia secondo la legge $v(t) = C \operatorname{sen} \omega t$.

10. Applicando il metodo di riflessione, costruire la funzione di influenza di una sorgente puntuale istantanea per una sbarra limitata con superficie laterale isolata termicamente per le condizioni al contorno di prima e seconda specie.

11. Una sbarra infinita consta di due sbarre omogenee accostate nel punto $x = 0$ e aventi come caratteristiche a_1, k_1 e a_2, k_2, rispettivamente. La temperatura iniziale è

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{per } x < 0, \\ T_2 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Trovare la temperatura $u(x, t)$ della sbarra nel caso in cui la superficie laterale sia isolata termicamente.

APPENDICI AL CAPITOLO III

I. *Onde termiche*

Il problema della propagazione di onde termiche nel suolo fornisce uno dei primi esempi di applicazione della teoria matematica della conduzione termica, sviluppata da Fourier, allo studio dei fenomeni naturali.

La temperatura sulla superficie terrestre ha, come è noto, una ben precisa periodicità giornaliera e annuale. Ricordiamo il problema della propagazione delle oscillazioni periodiche della temperatura nel suolo che consideriamo quale semispazio omogeneo $0 \leqslant x \leqslant \infty$. È il problema caratteristico senza condizioni iniziali poiché per ripetizione multipla dell'andamento della temperatura sulla superficie l'influenza della temperatura iniziale sarà inferiore all'influenza di altri fattori che noi trascuriamo (carattere non omogeneo del suolo, ad esempio). Quindi abbiamo il seguente problema *):

trovare la soluzione limitata dell'equazione della conduzione termica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leqslant x < \infty, \ -\infty < t), \tag{1}$$

soddisfacente alla condizione

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

*) H. Carlslaw, ***Teoria della conduzione termica***, capitolo III.

Questo problema è stato esaminato nel capitolo III. La sua soluzione ha la forma (si veda la formula (7), § 4, capitolo III)

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x - \omega t\right). \qquad (3)$$

In base alla soluzione ottenuta si può caratterizzare nel seguente modo il processo di propagazione dell'onda termica nel suolo. Se la temperatura della superficie varia periodicamente per lungo tempo, anche nel suolo si producono oscillazioni di temperatura con lo stesso periodo e, inoltre:

1. L'ampiezza delle oscillazioni decresce con la profondità

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x},$$

vale a dire se le profondità crescono in progressione aritmetica, le ampiezze decrescono in progressione geometrica (prima legge di Fourier).

2. Le oscillazioni della temperatura nel suolo sono accompagnate da sfasamento. Il tempo di ritardo δ delle temperature massime (minime) nel suolo, rispetto agli istanti corrispondenti sulla superficie, è proporzionale alla profondità

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x$$

(seconda legge di Fourier).

3. La profondità di penetrazione del calore nel suolo dipende dal periodo di oscillazione della temperatura sulla superficie. La variazione relativa dell'ampiezza di temperatura vale

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}.$$

Questa formula mostra che quanto più piccolo è il periodo tanto più piccola è la profondità di penetrazione della temperatura. Per oscillazioni della temperatura di periodo T_1 e T_2 le profondità x_1 e x_2 nelle quali si produce una variazione relativa medesima della temperatura sono legate dalla relazione

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}x_1$$

(terza legge di Fourier). Così, ad esempio, dal confronto fra le oscillazioni giornaliere e annuali per cui $T_2 = 365\ T_1$ risulta

$$x_2 = \sqrt{365}\,x_1 = 19{,}1x_1,$$

vale a dire la profondità di penetrazione di oscillazioni annuali con la stessa ampiezza sulla superficie sarebbe superiore di 19,1

volte alla profondità di penetrazione delle oscillazioni giornaliere.

A titolo di esempio diamo i risultati delle osservazioni delle oscillazioni annuali di temperatura alla stazione meteorologica Goš nel bacino del fiume Amur *):

Profondità (m)	1	2	3	4
Ampiezza (°C)	11,5	6,8	4,2	2,6

Questi dati mostrano che l'ampiezza delle oscillazioni annuali alla profondità di 4 m diminuisce del 13,3% del suo valore sulla superficie, pari a 19,5°. Questi dati consentono di stabilire il coefficiente di conduzione termica del suolo partendo da

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\, x, \quad a^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \frac{A(x)}{A}},$$

da cui si ottiene che questo coefficiente vale

$a^2 = 4 \cdot 10^{-3}$ cm^2/s.

Il ritardo della temperatura massima a profondità di 4 m raggiunge i 4 mesi.

Si deve, tuttavia, tener presente che la teoria qui esposta si riferisce alla propagazione di calore in suolo secco o nella roccia. La presenza di umidità rende più complicati i fenomeni termici nel suolo e per congelamento si produce emanazione di calore latente trascurato da questa teoria.

La conduzione termica è una delle caratteristiche del corpo che sono indispensabili per lo studio delle sue proprietà e per i calcoli tecnici più disparati. Sullo studio della propagazione delle onde termiche nelle sbarre è basato uno dei metodi sperimentali che permette di definire le conduzioni termiche **).

Supponiamo che all'estremo di una sbarra sufficientemente lunga si mantenga una temperatura periodica $\mu(t)$. Rappresentiamo questa funzione sotto forma di serie di Fourier

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{T} t \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right],$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},$$

*) M. I. Sumgin, S. P. Kačurin, N. I. Tolstichin, V. F. Tumel, *Studio generale dei processi di congelamento del suolo*, capitolo V, edizione dell'Accademia delle scienze dell'URSS, 1940.

**) Manuale pratico speciale di fisica, vol. I, Gostechizdat, Mosca, 1945, problema 35 (ed. russa).

dove T è il periodo; considerando le onde termiche corrispondenti a ciascun termine, troviamo che la temperatura $u\,(x,\,t)$ per x qualsiasi sarà una funzione periodica e la sua n-esima armonica vale

$$u_n\,(x,\,t) = a_n\,(x)\cos\frac{2\pi n}{T}\,t + b_n\,(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{T}\,t =$$

$$= A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}\,x}\cos\left[\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}\,x - \frac{2\pi n}{T}\,t + \frac{2\pi n}{T}\,\delta_n^0\right]$$

ossia

$$\frac{\sqrt{a_n^2\,(x_1) + b_n^2\,(x_1)}}{\sqrt{a_n^2\,(x_2) + b_n^2\,(x_2)}} = e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}\,(x_1 - x_2)}.$$

Come mostra questa formula, se la temperatura è misurata in due punti qualsiasi, x_1 e x_2 ad esempio, durante un periodo completo, allora, determinando i coefficienti $a_n\,(x_1)$, $b_n\,(x_1)$, $a_n\,(x_2)$ e $b_n\,(x_2)$ mediante l'analisi armonica, si può trovare il coefficiente di conduzione termica della sbarra a^2.

Oscillazioni termiche periodiche nella sbarra si possono provocare nel seguente modo. Collochiamo uno degli estremi della sbarra in una stufa elettrica e ad intervalli di tempo uguali inseriamo e togliamo la corrente elettrica. In seguito a questo riscaldamento periodico, dopo un certo tempo, nella sbarra si stabiliranno oscillazioni termiche periodiche; misurando mediante una termocoppia le temperature $u\,(x_1,\,t)$ e $u\,(x_2,\,t)$ in due punti x_1 e x_2 qualsiasi durante un periodo completo di variazione del regime al contorno ed applicando ad u_1 e u_2 l'operazione suindicata, si può definire a^2, il coefficiente di conduzione termica del materiale di cui è fabbricata la sbarra. È naturale che per poter applicare la suddetta teoria la sbarra deve essere isolata termicamente di lato e, inoltre, si deve prendere sotto controllo la temperatura all'altro estremo della sbarra per avere la possibilità di ricorrere alla teoria delle onde termiche in una sbarra seminfinita.

Per poter applicare la teoria delle onde termiche in una sbarra seminfinita bisogna essere sicuri che la temperatura all'estremo libero sia costante, il che può essere controllato con una termocoppia aggiuntiva.

II. *Influenza del decadimento radioattivo sulla temperatura della crosta terrestre*

Per giudicare lo stato della temperatura interna della Terra possediamo pochi dati, ottenibili in base alle osservazioni sulla superficie terrestre. I dati fondamentali sul campo termico della

crosta terrestre sono i seguenti. Le variazioni giornaliere e annuali della temperatura si producono in uno strato superficiale relativamente sottile (dell'ordine di 10-20 m per le variazioni annuali). Al disotto di questo strato la temperatura varia molto lentamente con il tempo.

Le osservazioni nelle miniere e nei pozzi, relative a 2-3 km della crosta terrestre, mostrano che la temperatura con la profondità aumenta in media di 3° C ogni 100 m.

I primi tentativi, intrapresi alla fine del secolo scorso, per dare un'interpretazione teorica del gradiente geotermico osservato urtarono contro difficoltà insuperabili *). Questi tentativi partivano dalla rappresentazione del raffreddamento della Terra arroventata nel passato. La temperatura iniziale che caratterizza questo processo di raffreddamento deve essere dell'ordine di $T_0 = 1200°$ C (temperatura di fusione delle rocce), mentre la temperatura superficiale è dell'ordine di 0° C e non potè deviare notevolmente (oltre di 100°) da questa grandezza per tutto il periodo di esistenza della vita sulla Terra. La teoria quantitativa elementare del raffreddamento della Terra consente di risolvere l'equazione della conduzione termica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

nel semispazio $0 < z < \infty$ con le condizioni iniziali e al contorno seguenti:

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = 0.$$

La soluzione di questo problema considerato al § 3 del presente capitolo è data dalla formula

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Il gradiente di questa funzione per $z = 0$ vale

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}}.$$

Sostituendovi i noti valori del gradiente geotermico $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm, $T_0 = 1200°$ C e il valore $a^2 = 0{,}006$ cm²/s corrispondente alla media del coefficiente di conduzione termica definito sperimentalmente per graniti e basalti, otteniamo la durata del processo di raffreddamento $t = 0{,}85 \cdot 10^{15}$ s = = 27.000.000 anni. Ma questa età della Terra contraddice i dati

*) H. Carslaw citato nella nota alla pag. 252.

geologici. Il carattere approssimato della teoria considerata (curvatura della Terra trascurata, variabilità del coefficiente di conduzione termica, valore approssimato di T_0) non può cambiare, ovviamente, il valore ottenuto per l'età della Terra, il quale secondo i dati moderni conta all'incirca $2 \cdot 10^9$ anni.

Lo schema fisico del regime termico della Terra è stato sostanzialmente riveduto dopo la scoperta del *decadimento radioattivo*. Gli elementi radioattivi disseminati nella crosta terrestre per decadimento ne causano riscaldamento in modo che l'equazione della conduzione termica deve avere la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \left(f = \frac{A}{c\rho}\right),$$

dove A è la densità volumetrica delle sorgenti di calore. In base a numerose misure della radioattività delle rocce e della loro emissione di calore è stato stabilito il valore

$$A = 1{,}3 \cdot 10^{-12} \text{ cal/cm}^3\text{s}$$

il quale tiene conto del calore emanato dall'uranio, il torio e il potassio assieme a prodotti del loro decadimento.

Supponiamo che la densità delle sorgenti radioattive all'interno del globo terrestre sia costante e pari ad A, definito per strati superiori della crosta. In questo caso la quantità di calore emanata da tutto il globo nell'unità di tempo vale

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

Supponiamo, inoltre, che il calore radioattivo non riscaldi la Terra. In questo caso il flusso di calore attraverso l'unità di superficie è

$$q = k \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} \geqslant \frac{Q}{4\pi R^2},$$

dove k e $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}$ sono il coefficiente di conduzione termica e il gradiente geotermico in prossimità della superficie terrestre.

Di qui ricaviamo il seguente valore di $\frac{\partial u}{\partial z}$ per $z = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} \geqslant \frac{AR}{3k} \cong 6{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ grad/cm},$$

dove $R = 6{,}3 \cdot 10^3$ km è il raggio della Terra e $k = 0{,}004$ la media del coefficiente di conduzione termica delle rocce sedimentarie.

Quindi, il gradiente geotermico calcolato partendo dall'ipotesi che la distribuzione di elementi radioattivi sia costante e che la

Terra non si riscaldi per decadimento radioattivo supera di due ordini il valore osservabile del coefficiente geotermico

$\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm.

Rinunciamo all'ipotesi di costanza della distribuzione di elementi radioattivi e supponiamo che gli elementi radioattivi siano in uno strato di altezza H sulla superficie terrestre. Trascurando la curvatura della Terra, otteniamo la seguente equazione che definisce la temperatura stazionaria:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & \text{per} \quad 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0 & \text{per} \quad z > H \end{cases}$$

con le condizioni

$u(0) = 0,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z \to \infty} = 0.$$

È evidente che la soluzione del problema posto vale

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k}\left(Hz - \frac{z^2}{2}\right), & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ \frac{A}{k}\frac{H^2}{2}, & z \geqslant H, \end{cases}$$

poiché questa funzione è continua assieme con la derivata prima per $z = H$ e verifica le condizioni del problema.

Determinando il valore del gradiente di questa funzione per $z = 0$ uguale a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{AH}{k}$$

e confrontandolo con il valore osservabile $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm, troviamo

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6 \text{ cm} = 10 \text{ km}.$$

Vediamo quale è influenza della suddetta ipotesi di stazionarietà della temperatura sul valore del gradiente geotermico. Consideriamo a tale scopo la soluzione dell'equazione della conduzione termica

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

con condizioni iniziali nulle e condizioni al contorno

$w(z, 0) = 0,$

$w(0, t) = 0.$

Come abbiamo visto al § 3, la soluzione di questo problema è rappresentata dall'integrale

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \zeta; t-\tau) f(\zeta)\, d\tau\, d\zeta,$$

dove G è una funzione di sorgente per la retta seminfinita, che vale

$$G(z, \zeta; t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\}.$$

Calcoliamo il valore del gradiente per $z = 0$ tenendo conto del valore della funzione f:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho\, 2\sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\zeta}{\sqrt{[a^2(t-\tau)]^3}}\, e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\zeta\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \int_0^{\frac{H^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\alpha}\, d\alpha\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2\theta}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}}\right] d\theta, \quad \text{dove } \theta = t - \tau.$$

Quindi,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\sqrt{t}}{a} - \frac{H}{a^2} \int_0^\infty e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\},$$

dove

$$\sigma = \frac{H}{2\sqrt{a^2\theta}}, \quad \sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{a^2}{H} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\theta}}.$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma}\Big|_{\sigma_0}^\infty - 2\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma = \frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0} - 2\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma,$$

da cui

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho a^2} \left\{ \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 t}}\right] + H \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma \right\}. \quad (1)$$

Osserviamo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{A}{k} H,$$

poiché $c\rho a^2 = k$, il limite del primo termine fra parentesi graffa è nullo e il limite del secondo termine è pari a H.

Calcoliamo lo scarto $\frac{\partial w}{\partial z}$ dal suo valore limite per

$t = 2 \cdot 10^9$ anni $= 6 \cdot 10^{16}$ s.

Il valore σ_0 è piccolo, e cioè

$$\sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}} = \frac{10^6}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{16}}} = \frac{1}{2 \cdot 19} \cong 0{,}025.$$

Sviluppando in serie le funzioni che figurano nella formula (1), otteniamo

$$\frac{A}{k} H - \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{A}{k} H \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\pi}\sigma_0} [\sigma_0^2 + \ldots] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_0 \right\} \cong \frac{A}{k} H \cdot 0{,}014,$$

vale a dire $\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}$ differisce dell'1,4% dal suo valore limite.

Sarebbe anche facile calcolare la funzione $w(z, t)$ per $z > 0$ per vedere che $w(z, t)$ per $z \geqslant H$ è ben lungi dal suo valore limite per t, pari all'età della Terra *) (sebbene, come abbiamo visto, il gradiente in prossimità della superficie praticamente sia uguale al suo valore limite).

I ragionamenti sopra citati hanno, ovviamente, carattere approssimato; tuttavia, tenendo conto che la velocità del decadimento radioattivo è sufficientemente stabile e non cambia sotto influsso di temperature e pressioni ammissibili, dobbiamo concludere che la concentrazione di elementi radioattivi deve decrescere rapidamente con la profondità se le nostre considerazioni sono basate sul valore di A stabilito mediante numerose misure per gli strati superiori della crosta terrestre. Finora non esiste un'interpretazione fisica che consenta di stabilire la legge di diminuzione della concentrazione di elementi radioattivi con la profondità.

---

*) A. N. Tichonov, *Circa l'influenza del decadimento radioattivo sulla temperatura della crosta terrestre*, Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS, 1937, pagg. 431-459 (ed. russa).

III. *Metodo della similitudine nella teoria della conduzione termica*

Il *metodo della similitudine* è assai utile per la risoluzione di alcuni problemi della conduzione termica. A titolo di esempio ne consideriamo due.

1. Funzione di sorgente per la retta infinita. Come è facile vedere, l'equazione della conduzione termica resta immutata per trasformazione di variabili

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t, \tag{1}$$

cioè se l'unità di lunghezza cambia di k volte, allora quella di tempo deve essere cambiata di k^2 volte.

Dapprima cercheremo la soluzione dell'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{per} \quad x > 0, \\ 0 & \text{per} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Rispetto al suddetto cambiamento di unità la condizione iniziale (3) resta immutata; perciò la funzione $u(x, t)$ deve verificare l'uguaglianza

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \tag{4}$$

quali che siano x, t e k.

Ponendo

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \tag{5}$$

otteniamo

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

Quindi, u dipende unicamente dall'argomento

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$

Calcolando le derivate di u nella formula (6)

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

sostituendone nell'equazione della conduzione termica (2) e dividendo per $u_0/4t$, otteniamo

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \tag{8}$$

con le condizioni aggiuntive

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \tag{9}$$

corrispondenti alla condizione iniziale per la funzione u.

Integrando l'equazione (8) avremo

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Qui il limite inferiore d'integrazione è scelto in modo tale che sia soddisfatta la prima condizione (9). Per soddisfare la seconda condizione (9) si deve porre

$C_1 = 1/\sqrt{\pi}$.

In tal modo

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right], \tag{10}$$

dove

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(integrale degli errori). Se il valore iniziale è della forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{per} \quad x > \bar{x}, \\ 0 & \text{per} \quad x < \bar{x}, \end{cases} \tag{11}$$

allora

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi \frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}}\right]. \tag{12}$$

Passiamo ora alla risoluzione del secondo problema ausiliario dove i valori iniziali sono assegnati nella forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x_2 < x, \\ u_0 & \text{per} \quad x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{per} \quad x < x_1. \end{cases} \tag{13}$$

In questo caso

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right].$$

La temperatura iniziale u_0 corrisponde alla quantità di calore $Q = c\rho\,(x_2 - x_1)\,u_0$.

Se

$Q = c\rho$,

allora

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \tag{14}$$

La funzione di influenza della sorgente concentrata nel punto rappresenta, evidentemente, il limite della funzione $u(x, t)$ per $x_2 - x_1 \to 0$.

Il passaggio al limite nella formula (14) dà

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]_{\xi=x_1}, \tag{15}$$

poiché al secondo membro della formula (14) figura il rapporto incrementale il cui limite è la derivata nella formula (15).

Derivando, troviamo

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\,e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2t}}, \tag{16}$$

vale a dire $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ è la funzione della sorgente puntuale istantanea.

2. Problemi ai limiti per l'equazione della conduzione termica quasi-lineare. Consideriamo l'equazione della conduzione termica quasi-lineare

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} \tag{17}$$

con coefficiente di conduzione termica dipendente dalla temperatura.

Troviamo la soluzione di questa equazione soddisfacente alle condizioni al contorno e iniziale

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \tag{18}$$

In questo caso neanche la trasformazione (1) cambia l'equazione (17) e le condizioni aggiuntive (18). Ne segue che

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{19}$$

Partendo da questa espressione, otteniamo per f l'equazione

$$\frac{d}{dz}\left[k(f)\frac{df}{dz}\right] = -2c\rho z\frac{df}{dz} \tag{20}$$

con le condizioni aggiuntive

$$f(0) = u_1, \quad f(\infty) = u_2. \tag{21}$$

La funzione f, nei casi in cui non si riesca a definirla analiticamente, può essere trovata per integrazione numerica.

L'equazione (20), sotto ipotesi assai generiche circa le funzioni k e $c\rho$, ha un'unica soluzione soddisfacente alle condizioni (21). Tuttavia, non ci soffermeremo sulla dimostrazione di questo fatto.

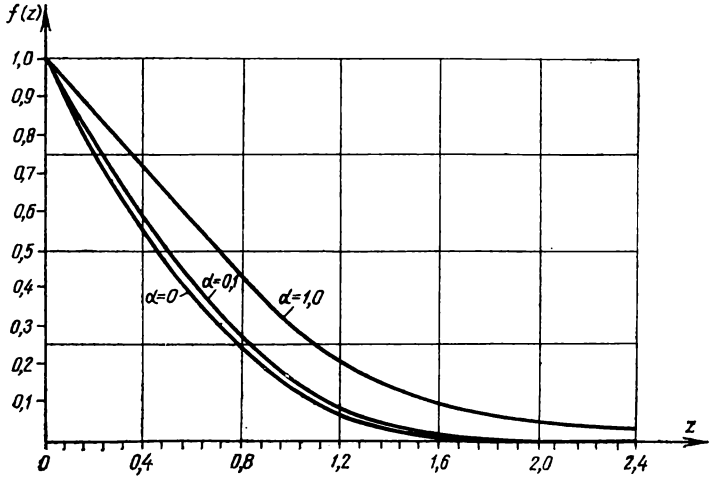


Fig. 42

A titolo di esempio consideriamo l'equazione (17) nella quale $k(u) = k_0 + k_1 u$ è una funzione lineare e $c\rho$ una grandezza costante. Cambiando le dimensioni del tempo e dei valori di u, otteniamo per la funzione così trasformata l'equazione $\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 + \alpha u\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial u}{\partial t}$ con le condizioni iniziali e al contorno $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 1$. Ponendo

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}},$$

otteniamo per f l'equazione

$$\frac{d}{dz}\left[(1+\alpha f)\frac{df}{dz}\right] = -2z\frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \tag{22}$$

Se il coefficiente di conduzione termica $k(u)$ è una potenza della temperatura, $k(u) = k_0 u^\sigma$, $k_0 =$ costante > 0, $\sigma > 0$ e se in luogo della (18) sono assegnate le condizioni $u(0, t) = u_0 t^n$, $n > 0$, $u(x, 0) = 0$, allora l'equazione (17) ha per $c\rho = 1$ una soluzione della forma $u(x, t) = t^n f(z)$, dove $z = x/ct^m$, $m = (1 + n\sigma)/2$, $c =$ costante > 0. In particolare, per $n = \sigma$ otteniamo soluzioni del tipo « onda di temperatura » propagantesi a velocità finita c : $u(x, t) = u_0 t^n \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ per $x \leqslant ct$, $u(x, t) = 0$ per $x \geqslant ct$ (si veda l'Appendice I alla pag. 90). La fig. 42 rappresenta risultati dell'integrazione numerica dell'equazione (22) per diversi valori di α.

IV. *Problema della transizione di fase*

Al variare della temperatura del corpo il suo stato fisico può cambiare, in particolare per il passaggio della temperatura per il punto di fusione, ossia transizione dalla fase liquida a quella solida (o transizione inversa). Sulla superficie della transizione di fase si mantiene sempre temperatura costante. Al muoversi della superficie della transizione di fase si emana un calore latente di solidificazione (di fusione). Formuliamo le condizioni complementari che devono essere soddisfatte sulla superficie di solidificazione *).

Consideriamo un'onda piana in cui il piano $x = \xi(t)$ serve da superficie di separazione. Durante il tempo t, $t + \Delta t$ la frontiera $x = \xi$ si sposta dal punto $\xi = x_1$ fino al punto $\xi = x_2 = x_1 + \Delta\xi$. In questo caso si solidifica la massa $\rho\Delta\xi$ (o si fonde se $\Delta\xi < 0$) e si libera una quantità di calore corrispondente.

Affinché si mantenga il bilancio termico, questa quantità di calore deve essere uguale alla differenza fra le quantità di calore passate per le frontiere $\xi = x_1$ e $\xi = x_2$, vale a dire deve essere verificata la condizione

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x_2}\right] \Delta t = \lambda\rho\Delta\xi,$$

dove k_1 e k_2 sono i coefficienti di conduzione termica della prima e della seconda fase e λ è il calore di fusione latente.

Passando al limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo una condizione complementare sulla frontiera di separazione nella forma seguente:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}.$$

*) F. Franck, R. von Mises, *Equazioni differenziali ed integrali della fisica matematica*, capitolo XIII.

Questa condizione si verifica sia per il processo di solidificazione $\left(\text{allorché } \Delta\xi > 0 \text{ e } \frac{d\xi}{dt} > 0\right)$ che per il processo di fusione $\left(\Delta\xi < 0 \right.$ e $\left. \frac{d\xi}{dt} < 0\right)$; la direzione del processo è determinata dal segno al primo membro dell'uguaglianza.

Consideriamo il processo di congelamento dell'acqua in cui la temperatura della transizione di fase è uguale a zero. La massa di acqua sia $x \geqslant 0$, delimitata da un lato dal piano $x = 0$. All'istante iniziale $t = 0$ l'acqua ha temperatura costante $c > 0$. Se sulla superficie $x = 0$ si mantiene sempre una temperatura costante $c_1 < 0$, la frontiera di congelamento $x = \xi$ si approfondirà con il tempo nel liquido.

Il problema della distribuzione della temperatura in presenza di transizione di fase e di movimento della frontiera di separazione delle fasi (all'interno dell'acqua che gela, ad esempio) si riduce alla risoluzione delle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{per} \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{per} \quad \xi < x < \infty \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

con le condizioni aggiuntive

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \quad \text{per} \quad x = 0, \\ u_2 &= c \quad \text{per} \quad t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

e con le condizioni sulla frontiera di congelamento

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{per} \quad x = \xi, \tag{3}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}, \tag{4}$$

dove k_1, a_1^2 e k_2, a_2^2 sono i coefficienti di conduzione di calore e di temperatura della fase solida e liquida, rispettivamente. Il problema (1)-(4) si chiama spesso problema di Stephan, problema della transizione di fase o problema del congelamento.

Cercheremo la soluzione del problema nella forma

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

dove A_1, B_1, A_2 e B_2 sono costanti per il momento indeterminate e Φ è l'integrale degli errori

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Soddisfatte le condizioni (2) e (3) otteniamo dalla (2)

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

e dalla (3)

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0.$$

Le ultime condizioni devono essere verificate per ogni t. Ciò è possibile se è verificata la relazione

$$\xi = \alpha\sqrt{t}, \tag{5}$$

dove α è una costante. La relazione (5) definisce la legge del movimento della frontiera di congelamento.

Per le costanti A_1, B_1, A_2, B_2 ed α otteniamo le seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Per determinare la costante α si deve ricorrere alla relazione (4)

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7}$$

La soluzione di questa equazione trascendente fornisce il valore di α. L'esistenza di almeno una soluzione per $c_1 < 0$, $c > 0$ deriva già dal fatto che al variare di α da 0 a ∞ il primo membro dell'equazione varia da $-\infty$ a $+\infty$ *) e il secondo membro da 0 a $-\infty$. Nel caso in cui c rappresenta la temperatura di fusione

*) Per una rappresentazione asintotica della funzione $1 - \Phi(z)$ per $z \to \infty$ si veda la pag. 730.

($c = 0$) le espressioni (6) e (7) che servono alla definizione dei coefficienti acquistano la forma più semplice seguente:

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \tag{6'}$$

e

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7'}$$

Ponendo $\alpha/2a_1 = \beta$, possiamo riscrivere l'equazione (7') anche nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

dove la costante D è data dall'espressione

$$D = \frac{\lambda\rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Ricorrendo alla curva rappresentativa della funzione $\varphi(\beta') = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,\Phi(\beta)}$ data dalla fig. 43, è facile definire graficamente il valore di α.

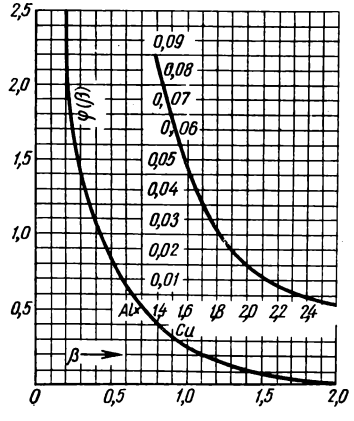


Fig. 43

La soluzione del problema del congelamento può essere ottenuta anche con il metodo della similitudine esposto all'Appendice III al presente capitolo. Il problema del congelamento rappresenta in un certo senso il caso limite dei problemi ai limiti non lineari considerati all'Appendice III. Infatti, i coefficienti di conduzione termica e di calore specifico nel problema del congelamento sono funzioni costanti a tratti e, inoltre, per $u = 0$ il calore specifico diventa infinito. Questo caso si ottiene come limite per $\varepsilon \to 0$ quando il calore latente non si libera istantaneamente, bensì in un certo intervallo $-\varepsilon, +\varepsilon$ e

quando deve essere soddisfatta la condizione

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} c(u)\,du = \lambda.$$

Tuttavia si può risolvere direttamente questo problema con il metodo della similitudine. È facile provare che tutte le condizioni del problema restano invariate se la dimensione della lunghezza viene aumentata di k volte e quella del tempo di k^2 volte. Ciò significa che la soluzione del problema non dipende dall'argomento $\frac{x}{\sqrt{t}}$, cioè che

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Ne segue, in particolare, che il movimento dell'isoterma nulla verrà descritto dall'equazione $\xi = \alpha\sqrt{t}$, dove α esprime il valore dell'argomento per cui $f(\alpha) = 0$. Per determinare la funzione f disponiamo delle condizioni seguenti:

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad \text{per} \quad 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad \text{per} \quad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda\rho \frac{\alpha}{2}.$$

Pertanto la funzione $f(z)$ ha la forma seguente:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{z}{2a_1}\right), & \text{se} \quad 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{z}{2a_2}\right), & \text{se} \quad \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

Per determinare le costanti A_1, B_1, A_2 e B_2 dobbiamo ricorrere alle condizioni (2) e (3) dalle quali derivano le formule (6). Per determinare α si ottiene la condizione (7). In tal modo la parte analitica della soluzione ottenuta con ambedue i metodi è la stessa.

Dalle considerazioni qui esposte risulta che il problema del congelamento si può risolvere anche nei casi in cui il calore latente non si libera a temperatura fissata, bensì in un intervallo di temperatura. Con lo stesso metodo si può risolvere il problema se esiste non una ma più temperature critiche, ciò che si ha per trasformazioni delle fasi passando da una struttura cristallina a un'altra, ad esempio per ricristallizzazione dell'acciaio. Per la

soluzione dei problemi delle transizioni di fase il più efficace è il metodo delle differenze finite, applicabile al caso di due e tre variabili spaziali in presenza di più transizioni di fase (si veda l'Appendice I, § 4).

V. *Equazione di Einstein-Kolmogorov*

Le particelle microscopiche che si trovano in un mezzo allo stato libero sono animate da moto irregolare, detto moto browniano. Esprimiamo con la funzione

$$W(M,\ t;\ M_0,\ t_0)\cdot\Delta V \tag{1}$$

la probabilità per la particella uscita dal punto M_0 all'istante t_0 di trovarsi all'istante t in un piccolo intorno ΔV del punto M.

La probabilità è intesa qui nel seguente senso: se in un piccolo intervallo di tempo $t_0 + \Delta t$ dal punto M_0 esce un numero N sufficientemente grande di particelle (la cui interazione è trascurabilmente piccola), la concentrazione di queste particelle per $\Delta t \to 0$ nel punto M all'istante t vale $W(M,\ t;\ M_0,\ t_0)$ qualora per unità di massa si consideri tutta la massa delle particelle uscenti dal punto M_0.

Un fenomeno simile si osserva nella diffusione di gas in un mezzo (l'atmosfera, ad esempio). Una $W(M,\ t;\ M_0,\ t_0)$ rappresenta la funzione di sorgente puntuale corrispondente alla massa unitaria.

È evidente che

$$\int W(M,\ t;\ M_0,\ t_0)\,dV_M = 1 \quad (t > t_0) \tag{2}$$

e che, se la concentrazione di particelle iniziale ad un istante t_0 vale $\varphi(M)$, allora la concentrazione $u(M,\ t)$ di queste particelle all'istante t sarà

$$u(M,\ t) = \int W(M,\ t;\ P,\ t_0)\,\varphi(P)\,dV_P, \tag{3}$$

dove l'integrale va calcolato in tutto lo spazio.

Dall'ultima uguaglianza deriva l'equazione *)

$$W(M,\ t;\ M_0,\ t_0) = \int W(M,\ t;\ P,\ \theta)\,W(P,\ \theta;\ M_0,\ t_0)\,dV_P$$

$$(t_0 < \theta < t), \tag{4}$$

*) M. A. Leontovič, *Fisica statistica*, capitolo VI, Gostechizdat, Mosca, 1944 (ed. russa); A. N. Kolmogorov, *Metodi analitici della teoria delle probabilità*, Successi delle scienze matematiche, fasc. V, 1938 (ed. russa).

che si verifica per ogni $t_0 < \theta < t$. Quest'ultima equazione si dice *equazione di Einstein-Kolmogorov.*

Mostriamo che sotto certe condizioni imposte alla funzione $W(M, t; M_0, t_0)$ la soluzione dell'equazione di Einstein-Kolmogorov verifica un'equazione alle derivate parziali di tipo parabolico. Consideriamo il caso in cui la posizione del punto M è caratterizzata da una sola coordinata x. Supponiamo che la funzione $W(x, t; x_0, t_0)$ soddisfi le condizioni seguenti:

1°.

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{x-\xi}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int (x-\xi)\, W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx = A(\xi, t). \qquad (5)$$

Se durante il tempo τ la particella passa dalla posizione ξ alla x, allora $\frac{\overline{x-\xi}}{\tau}$ è la velocità media della particella. Quindi, la prima condizione chiede che esista una velocità finita del moto ordinato della particella.

2°.

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{(x-\xi)^2}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int (x-\xi)^2\, W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx = 2B(\xi, t). \qquad (6)$$

La grandezza $(x-\xi)^2$ è indipendente dalla direzione in cui il punto x si sposta rispetto al punto ξ. La media del quadrato dello spostamento durante il tempo τ

$$\overline{(x-\xi)^2} = \int (x-\xi)^2\, W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx$$

è considerata di solito come misura del moto non ordinato in questo lasso di tempo. La condizione 2° chiede che la media del quadrato dipenda linearmente dal tempo per τ piccolo.

3°.

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{|x-\xi|^3}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int |x-\xi|^3 \cdot W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx = 0. \qquad (7)$$

La $W(x, t+\tau; \xi, t)$ è funzione di una sorgente puntuale che deve decrescere rapidamente per τ piccolo se $|x-\xi| \to \infty$, e crescere quando il valore $|x-\xi|$ è piccolo.

Per ottenere l'equazione differenziale di Einstein-Kolmogorov, moltiplichiamo i due membri dell'equazione (4) per una funzione qualsiasi $\psi(x)$ che si annulla assieme alla sua derivata sulle frontiere del dominio di integrazione, e integriamo in tutto il dominio

$$\int W(x, t+\tau; x_0, t_0)\, \psi(x)\, dx =$$

$$= \int W(\xi, t; x_0, t_0)\, d\xi \int W(x, t+\tau; \xi, t)\, \psi(x)\, dx.$$

Sviluppando la funzione $\psi(x)$ a primo membro in serie di Taylor in $x-\xi$:

$$\psi(x)=\psi(\xi)+\psi'(\xi)(x-\xi)+\frac{\psi''(\xi)}{2}(x-\xi)^2\frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x-\xi)^3,$$

dove ξ^* è il valore medio compreso fra x e ξ, e dividendo per τ, avremo dopo semplici trasformazioni

$$\int\psi(x)\frac{W(x,\ t+\tau;\ x_0,\ t_0)-W(x,\ t;\ x_0,\ t_0)}{\tau}dx=$$

$$=\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\left[\psi'(\xi)\overline{\frac{x-\xi}{\tau}}+\psi''(\xi)\overline{\frac{(x-\xi)^2}{2\tau}}\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{3!\,\tau}\int\int\psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3\,W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,d\xi\,dx.$$

Supponendo che $\psi'''(x)$ sia limitata, cioè

$$|\psi'''(x)|<A,$$

e tenendo conto che

$$\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,d\xi=1,$$

avremo

$$\left|\frac{1}{\tau}\int\int\psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3\,W(\xi,\ t;\ x_0,t_0)\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,d\xi\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\tau}\int|x-\xi|^3\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,dx=\overline{\frac{A|x-\xi|^3}{\tau}}.$$

Dalla condizione 3° risulta che questa espressione per $\tau\to 0$ tende a zero. Perciò, passando al limite per $\tau\to 0$ e tenendo conto delle condizioni 1° e 2°, avremo

$$\int\psi(x)\frac{\partial W(x,\ t;\ x_0,\ t_0)}{\partial t}dx=\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,[\psi'(\xi)\,A(\xi,\ t)+$$

$$+\psi''(\xi)\,B(\xi,\ t)]\,d\xi.$$

Dopo aver integrato per parti e tenuto conto che la funzione ψ si annulla assieme alla sua derivata sulla frontiera del dominio di integrazione, otteniamo

$$\int\psi(x)\left[\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial(AW)}{\partial x}-\frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2}\right]dx=0.$$

Poiché questa relazione deve essere verificata per una funzione $\psi(x)$ arbitraria, otteniamo per la funzione di probabilità $W(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$ l'*equazione differenziale di Einstein-Kolmogorov*

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial(AW)}{\partial x}+\frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

L'equazione ottenuta è di tipo parabolico, simile all'equazione della conduzione termica e può essere scritta nella forma

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x}(BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \tag{9}$$

dove

$$\alpha = -A + B_x, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

Si vede dall'equazione (9) che la grandezza B ha significato fisico di coefficiente di diffusione. Se il processo in esame è omogeneo nello spazio e nel tempo, cioè se la funzione W dipende unicamente dalle differenze $\xi = x - x_0$ e $\theta = t - t_0$, i coefficienti A e B sono indipendenti da x e t e sono costanti. In questo caso l'equazione (8) è un'equazione a coefficienti costanti

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A\frac{\partial W}{\partial x} + B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Se la funzione W dipende unicamente da $|x - \xi|$, cioè se gli spostamenti a destra e a sinistra di uguali distanze dal punto ξ sono equiprobabili, è evidente che A deve essere nullo. Ciò segue analiticamente dalla formula (5) in quanto la funzione integranda è dispari.

In questo caso l'equazione (8) non è altro che l'equazione elementare della conduzione termica

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{11}$$

VI. *La funzione* δ

1. Definizione di funzione δ. Accanto a grandezze distribuite in modo continuo (massa, carica, sorgenti di calore, impulso meccanico ecc.) spesso si ha a che fare con grandezze concentrate (massa puntuale, carica puntuale, sorgente di calore puntuale, impulso concentrato ecc.). Non si deve dimenticare che queste nozioni sono « immagini limite » e possono essere caratterizzate mediante la nozione di « funzione generalizzata » *).

Tenendo presente il significato fisico del problema, consideriamo il potenziale in un punto M (si veda il capitolo IV, § 5) di massa unitaria, concentrato all'interno di un volume T nell'intorno di un punto M_0. Supponiamo che sia data una successione di funzioni $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$) ciascuna delle quali è nulla all'esterno di una sfera $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ di raggio ε_n avente come centro il punto M_0, dove

*) Per dettaglio si veda I. M. Gel'fand e G. E. Šilov, *Funzioni generalizzate ed azioni su di esse*, Fizmatgiz, Mosca, 1959.

$\varepsilon_n \to 0$ per $n \to \infty$, e per le quali, a partire da un certo n, si ha

$$\int\int\int_T \rho_n(P)\, d\tau_P = \int\int\int_{S_{\varepsilon_n}^{M_0}} \rho_n(P)\, d\tau_P = 1. \tag{1}$$

Considerando la successione di funzioni

$$u_n = \int\int\int_T \frac{\rho_n}{r}\, d\tau,$$

che rappresentano i potenziali delle masse distribuite con densità ρ_n, e passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0M}}. \tag{2}$$

Questo risultato dipende, evidentemente, da come abbiamo scelto la successione $\{\rho_n\}$. Sebbene la successione $\{u_n\}$ sia convergente a $1/r$, tuttavia essa non ha limite nella classe considerata delle funzioni derivabili a tratti. L'« immagine limite » corrispondente alla successione $\{\rho_n\}$ si chiama funzione $\delta(M, M_0)$.

La proprietà fondamentale che definisce la funzione δ è la seguente relazione operatoria formale:

$$\int\int\int_T \delta(M_0, M) f(M)\, d\tau_M = \begin{cases} f(M_0) & \text{se} \quad M_0 \in T, \\ 0 & \text{se} \quad M_0 \notin T, \end{cases} \tag{3}$$

dove $f(M)$ è una funzione continua qualsiasi del punto M. Tenendo conto che per $n \to \infty$ le funzioni ρ_n tendono uniformemente a zero in ogni dominio non contenente il punto M_0 e crescono indefinitamente nell'intorno $S_{\varepsilon n}^{M_0}$ del punto M_0, talvolta la funzione δ può essere definita formalmente dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} &\delta(M, M_0) = 0 \quad \text{per} \quad M \neq M_0, \\ &\delta(M, M_0) = \infty \quad \text{per} \quad M = M_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e

$$\int\int\int_T \delta(M, M_0)\, d\tau_M = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad M_0 \in T, \\ 0 & \text{per} \quad M_0 \notin T. \end{cases} \tag{5}$$

L'uguaglianza (5) è una conseguenza evidente della formula (3) per $f = 1$.

Considerando successioni di funzioni, in numerosi problemi, si ha a che fare con diverse definizioni di convergenza.

Si dice che la successione di funzioni

$$u_n(x)\} = u_1(x), \quad u_2(x), \ \ldots, \ u_n(x), \ \ldots \tag{6}$$

converge uniformemente nell'intervallo (a, b) se per ogni $\varepsilon > 0$ si può indicare un N tale che per $n, m > N$ e per ogni x di (a, b) sia soddisfatta la condizione

$$| u_n(x) - u_m(x) | < \varepsilon \quad \text{per} \quad n, m > N.$$

Si dice che la successione (6) converge in media nell'intervallo (a, b) se per ogni $\varepsilon > 0$ si può indicare un N tale che per $n, m > N$ si abbia

$$\int_a^b | u_n(x) - u_m(x) |^2 dx < \varepsilon.$$

Si dice che la successione (6) converge debolmente nell'intervallo (a, b) se per ogni funzione continua f esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

Per studiare le successioni convergenti, si introducono solitamente *elementi limite* delle successioni. Consideriamo la classe delle funzioni continue nell'intervallo (a, b). Nel caso di convergenza uniforme l'elemento limite appartiene alla stessa classe di funzioni, ma ciò non sempre si verifica nel caso di convergenza in media e debole.

Se l'elemento limite non appartiene alla classe di funzioni considerata, allora si introducono altri elementi limite per estendere la classe iniziale. In questo caso, con estensione si intende l'insieme degli elementi iniziali e di quelli limite. La nozione di estensione si incontra nella teoria dei numeri reali quando i numeri irrazionali si introducono come elementi limite definiti da una classe di successioni equivalenti.

Parlando di elementi limite nel senso della convergenza debole, diremo che due successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ hanno un medesimo elemento limite se queste successioni sono equivalenti, cioè se la successione $\{u_n - v_n\}$ converge debolmente a zero:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

Una successione di funzioni non negative $\{\delta_n\}$ si dice successione localmente normalizzata del punto x_0 se la funzione δ_n è nulla all'esterno dell'intervallo $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$, dove $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to \infty$ e

$$\int_a^b \delta_n(x) dx = 1.$$

È evidente che la successione $\{\delta_n\}$ è convergente debolmente. L'elemento limite della successione $\{\delta_n\}$ si dice di solito *funzione* δ del punto x_0.

Nel caso in cui l'elemento u, limite della successione $\{u_n\}$ nel senso della convergenza debole, non rientri nella classe delle funzioni u_n, allora l'integrale del prodotto di una funzione $f(x)$ per l'elemento limite u è definito come limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, u_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, u\, dx.$$

È ovvio che per la funzione δ del punto x_0 si verifica l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x_0,\ x)\, dx = f(x_0),$$

che spesso serve come definizione della funzione δ.

2. Sviluppo della funzione δ in serie di Fourier. Si può definire la funzione δ come immagine limite di altre successioni, equivalenti nel senso della convergenza debole alla precedente successione $\delta_n(x)$ di funzioni localmente normalizzate del punto x_0.

Consideriamo la successione di funzioni

$$\bar{\delta}_n(x_0,\ x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{n} \left(\cos\frac{m\pi}{l} x_0 \cdot \cos\frac{m\pi}{l} x + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\frac{m\pi}{l} x_0 \operatorname{sen}\frac{m\pi}{l} x \right) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{n} \cos\frac{m\pi}{l}(x - x_0) \qquad (7)$$

o, in forma complessa,

$$\bar{\delta}_n(x,\ x_0) = \frac{1}{2l} \sum_{-n}^{n} e^{im\frac{\pi}{l}(x-x_0)}, \qquad (7')$$

definita nell'intervallo $(-l,\ l)$.

È evidente che per ogni funzione $g(x)$ sviluppabile in serie di Fourier si verifica l'uguaglianza limite seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-l}^{l} \bar{\delta}_n(x_0,\ x)\, g(x)\, dx = g(x_0), \qquad (8)$$

la quale mostra che nella classe delle funzioni $\{g(x)\}$ sviluppabili in serie di Fourier la suddetta successione $\delta_n(x_0,\ x)$ è equivalente,

nel senso della convergenza debole, alla successione $\bar{\delta}_n(x_0, x)$, cioè che

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{m\pi}{l}(x_0 - x), \tag{9}$$

purché questa uguaglianza sia intesa dal punto di vista della convergenza debole.

Da questo stesso punto di vista si ha l'uguaglianza

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(x_0), \tag{10}$$

dove $\{\varphi_n(x)\}$ è un sistema ortonormale completo di funzioni definito in un intervallo (a, b), e si verifica l'uguaglianza

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0 - x)}\,dk = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos k\,(x_0 - x)\,dk. \tag{11}$$

Mostriamo che per il calcolo degli integrali contenenti la funzione δ si può usare la serie (9) integrando termine a termine la funzione integranda.

Consideriamo una funzione $g(x)$ sviluppabile in serie di Fourier e l'integrale

$$\int_{-l}^{l} g(x)\,\delta(x_0, x)\,dx.$$

Sostituendovi a $\delta(x_0, x)$ la sua espressione data dalla formula (9), integriamo termine a termine la serie che figura sotto il segno d'integrale. Come risultato otteniamo

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{g}_m \cos\frac{\pi m}{l}x + \bar{\bar{g}}_m \operatorname{sen}\frac{\pi m}{l}x\right), \tag{11'}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\,dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\cos\frac{\pi m}{l}x_0\,dx_0, \\ \bar{\bar{g}}_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\operatorname{sen}\frac{\pi m}{l}x_0\,dx_0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dal confronto della formula (11) con l'uguaglianza

$$\int_{-l}^{l} \delta(x, x_0)\, g(x)\, dx = g(x_0) \quad (-l < x_0 < l)$$

risulta che la suddetta integrazione termine a termine della serie per la funzione δ conduce a un risultato corretto.

Quindi, nella classe delle funzioni sviluppabili in serie di Fourier la successione di somme parziali

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^{k} e^{i \frac{\pi n}{l} (x - x')}$$

è equivalente alla successione localmente normalizzata $\{\delta_n\}$.

Altre rappresentazioni della funzione δ sono basate anch'esse sull'uso di alcune successioni funzionali equivalenti, nel senso della convergenza debole, alla successione $\{\delta_n\}$.

3. Applicazione della funzione δ alla costruzione della funzione di sorgente. Consideriamo il problema seguente:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{13}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{14}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{15}$$

Alla funzione data $\varphi(x)$ corrisponde l'unica soluzione del problema

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)].$$

Supponiamo che l'operatore $\mathcal{L}$ sia rappresentabile nella forma

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

dove $G(x, \xi, t)$ è il nucleo dell'operatore $\mathcal{L}$.

Per definire il nucleo $G(x, \xi, t)$ poniamo

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{14'}$$

Sostituendo nella formula (16) $\varphi(x)$ con la funzione δ, otteniamo

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \tag{17}$$

cioè $G(x, x_0, t)$ è soluzione del problema (13) con la condizione iniziale (14').

Rappresentiamo la funzione δ sotto forma di serie di Fourier

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Il nucleo G si deve cercare, evidentemente, sotto forma di somma

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x, \tag{18}$$

in cui ogni termine deve verificare l'equazione della conduzione termica. Ne segue che

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Dalla condizione iniziale ricaviamo immediatamente

$$B_n = \frac{2}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x_0.$$

In tal modo, abbiamo ricavato formalmente per il nucleo G l'espressione

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x_0, \tag{19}$$

coincidente con la rappresentazione della funzione di sorgente che è stata studiata al § 3. La soluzione del problema (13)-(15) è data dalla formula (16) in cui $G(x, x_0, t)$ è una funzione definita dalla formula (19).

Allo stesso modo si può trovare l'espressione della funzione di sorgente sulla retta infinita. In questo caso la funzione G verrà definita dalle condizioni

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{20}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{21}$$

Partendo dallo sviluppo della funzione δ in integrale di Fourier

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (x - x_0)\, d\lambda,$$

cercheremo $G(x, x_0, t)$ nella forma

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_\lambda(t) \cos \lambda (x - x_0)\, d\lambda. \tag{22}$$

Dall'equazione (20) ricaviamo

$$A_\lambda(t) = A_\lambda^{(0)} e^{-a^2 \lambda^2 t}. \tag{23}$$

Ponendo $t = 0$ e confrontando le formule (23) e (21), otteniamo $A_\lambda^{(0)} = 1$.

Quindi,

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (x - x_0)\, d\lambda.$$

Il calcolo di questo integrale dà

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

Ne segue che la soluzione del problema della propagazione della temperatura iniziale sulla retta infinita deve essere espressa dalla formula

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{24}$$

La precisazione dei limiti di applicabilità delle formule dedotte con il metodo della funzione δ richiede uno studio speciale.

A titolo di esempio consideriamo ora l'equazione non omogenea

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}, \tag{25}$$

dove $F(x, t)$ è la densità delle sorgenti di calore distribuite. Se nel punto $x = \xi$ si trova all'istante $t = t_0$ una sorgente di calore istantanea di potenza Q_0, allora

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi)\, \delta(t - t_0). \tag{26}$$

Risolviamo l'equazione non omogenea

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho}\, \delta(x - \xi)\, \delta(t - t_0) \quad (t_0 > 0) \tag{27}$$

con la condizione iniziale nulla

$u(x, 0) = 0$.

Tenendo presente la rappresentazione integrale

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (x - \xi)\, d\lambda,$$

cercheremo la funzione $u(x, t)$ nella forma

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_\lambda(t) \cos \lambda (x - \xi)\, d\lambda.$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione (27) otteniamo per $u_\lambda(t)$ l'equazione

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2\lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho}\,\delta(t - t_0)$$

con la condizione iniziale

$$u_\lambda(0) = 0.$$

Come è noto, la soluzione dell'equazione non omogenea

$$\dot{u} + \alpha^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

ha la forma

$$u(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau. \tag{28}$$

Nel caso considerato

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} \delta(\tau - t_0)\, d\tau =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t < t_0, \\ \dfrac{Q_0}{c\rho}\, e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} & \text{per} \quad t > t_0. \end{cases} \tag{29}$$

Quindi

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{c\rho}\,\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} \cos\lambda(x - \xi)\, d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho}\, G(x, \xi, t - t_0),$$

dove

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

è una funzione di sorgente puntuale istantanea.

Nella fisica teorica spesso si ricorre a un metodo simile di costruzione della funzione di sorgente *).

*) Per un'esposizione più dettagliata della teoria della funzione δ e per numerosi esempi della sua applicazione si veda il libro di D. D. Ivanenko e A. A. Sokolov, *Teoria classica dei campi*, capitolo I, Gostechizdat, Mosca, 1951 (ed. russa).

Capitolo IV

EQUAZIONI DI TIPO ELLITTICO

Nello studio dei processi stazionari di natura fisica più disparata (oscillazioni, conduzione termica, diffusione ecc.) si ha a che fare, di solito, con equazioni di tipo ellittico. La più frequente equazione di questo tipo è l'*equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0.$$

La funzione u si dice *armonica* nel dominio T se è continua in questo dominio assieme alle sue derivate fino al secondo ordine e verifica l'equazione di Laplace.

L'indagine delle proprietà delle funzioni armoniche ha consentito di elaborare metodi matematici diversi, efficaci anche in applicazione ad equazioni dei tipi iperbolico e parabolico.

§ 1. Problemi che conducono all'equazione di Laplace

1. Campo termico stazionario. Impostazione dei problemi ai limiti. Consideriamo un campo termico stazionario. È stato mostrato nel capitolo III che la temperatura di un campo termico non stazionario verifica l'equazione differenziale della conduzione termica

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right).$$

Se il processo è stazionario, si stabilisce una distribuzione di temperatura $u\ (x, y, z)$ che resta invariabile con il tempo e, quindi, verifica l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

In presenza di sorgenti di calore abbiamo l'equazione

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \tag{2}$$

dove F è la densità di sorgenti di calore e k il coefficiente di conduzione termica. L'equazione di Laplace non omogenea (2) spesso si chiama *equazione di Poisson.*

Consideriamo un volume T delimitato dalla superficie Σ. Il problema della distribuzione stazionaria di temperatura $u(x, y, z)$ all'interno del corpo T è formulato nel seguente modo:

trovare la funzione $u(x, y, z)$ *che verifichi all'interno di* T *l'equazione*

$$\Delta u = -f(x, y, z) \tag{2}$$

e una condizione al contorno che può essere scelta fra i tipi seguenti:

I. $u = f_1$ su Σ (primo problema ai limiti),

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ su Σ (secondo problema ai limiti),

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$, su Σ (terzo problema ai limiti),

dove f_1, f_2, f_3, h *sono funzioni date e* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *è la derivata alla normale esterna alla superficie* Σ *).

Il significato fisico di queste condizioni al contorno è immediato (si veda il capitolo III, § 1). Il primo problema ai limiti per l'equazione di Laplace spesso si chiama *problema di Dirichlet* e il secondo *problema di Neumann.*

Se la soluzione si cerca nel dominio T_0, interno (o esterno) nei confronti della superficie Σ, il problema corrispondente si dice problema ai limiti interno (o esterno).

2. Corrente potenziale di un liquido. Potenziale di corrente stazionaria e di campo elettrostatico. Come secondo esempio consideriamo la corrente potenziale di un liquido senza sorgenti. Supponiamo che all'interno di un volume T delimitato dalla frontiera Σ passi la corrente stazionaria di un liquido incompressibile (densità ρ = costante), caratterizzata dalla velocità $v(x, y, z)$. Se la corrente del liquido non è rotazionale, la velocità v è un vettore potenziale, cioè

$$v = -\text{grad}\, \varphi, \tag{3}$$

dove φ è una funzione scalare detta *potenziale di velocità.* Se non esistono sorgenti, allora

$$\text{div}\, v = 0. \tag{4}$$

---

*) È evidente che la distribuzione stazionaria della temperatura può stabilirsi alla sola condizione di uguaglianza a zero del flusso di calore totale attraverso la frontiera del dominio. Ne segue che la funzione f_2 deve soddisfare alla condizione complementare seguente:

$$\iint_{\Sigma} f_2 \, d\sigma = 0.$$

Sostituendovi l'espressione (3) per v, otteniamo

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

ossia

$$\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

vale a dire il potenziale di velocità verifica l'equazione di Laplace.

Supponiamo che in un mezzo omogeneo passi una corrente stazionaria di densità volumetrica $\boldsymbol{j}(x, y, z)$. Se nel mezzo non esistono sorgenti di corrente volumetriche, allora

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{6}$$

Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ è determinato mediante la densità di corrente in base alla legge di Ohm

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\lambda}, \tag{7}$$

dove λ è la conduttività del mezzo. Siccome il processo è stazionario, il campo elettrico è irrotazionale o *potenziale* *), cioè esiste una funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ tale che

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (\boldsymbol{j} = -\lambda \operatorname{grad} \varphi). \tag{8}$$

Di qui in base alle formule (6) e (7) concludiamo

$$\Delta\varphi = 0, \tag{9}$$

vale a dire il potenziale del campo elettrico di una corrente stazionaria verifica l'equazione di Laplace.

Consideriamo un campo elettrico di carica stazionaria. Dalla stazionarietà del processo risulta

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{10}$$

cioè il campo è potenziale e

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Sia $\rho(x, y, z)$ la densità volumetrica di carica nel mezzo caratterizzato dalla costante dielettrica $\varepsilon = 1$. Partendo dalla legge fondamentale dell'elettrodinamica

$$\iint_S E_n \, dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T \rho \, d\tau, \tag{11}$$

dove T è un volume, S la superficie che lo delimita, $\sum e_i$ la somma di tutte le cariche all'interno di T, e usando il teorema di Ostrogradskij

$$\iint_S E_n \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{E} \, d\tau, \tag{12}$$

*) Dalla seconda equazione di Maxwell $\frac{\mu}{c} \dot{\boldsymbol{H}} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ segue $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$.

otteniamo

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

Sostituendovi l'espressione (8) per $\boldsymbol{E}$, avremo

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{13}$$

vale a dire il potenziale elettrico φ verifica l'equazione di Poisson. Se non esistono cariche volumetriche ($\rho = 0$), il potenziale φ deve verificare l'equazione di Laplace

$$\Delta\varphi = 0.$$

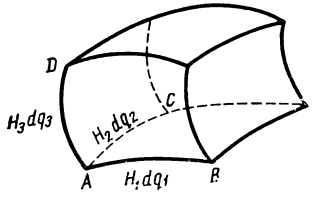


Fig. 44

I problemi ai limiti fondamentali per i processi considerati si riferiscono ai suddetti tre tipi. Non ci soffermeremo qui su altri problemi ai limiti, caratteristici dei processi fisici più diversi. Alcuni di questi problemi saranno dati nelle Appendici.

3. Equazione di Laplace in un sistema di coordinate curvilineo. Deduciamo l'espressione dell'operatore di Laplace in un sistema di coordinate curvilineo ortogonale. Nello spazio siano introdotte, in luogo delle coordinate cartesiane x, y, z, le coordinate curvilinee q_1, q_2, q_3 mediante le relazioni

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \tag{14}$$

risolvendo le quali relativamente a x, y, z si può scrivere

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{15}$$

Ponendo $q_1 = C_1$, $q_2 = C_2$ e $q_3 = C_3$, dove C_1, C_2, C_3 sono costanti, otteniamo tre famiglie di superfici coordinate:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2$$

e

$$f_3(x, y, z) = C_3. \tag{16}$$

Consideriamo nelle nuove coordinate un elemento di volume delimitato da tre coppie di superfici coordinate (fig. 44). Lungo lo spigolo AB abbiamo q_2 = costante e q_3 = costante, lungo AD q_1 = costante e q_2 = costante, lungo AC q_1 = costante e q_3 = = costante. I coseni direttori della tangente agli spigoli AB, AC e AD sono proporzionali rispettivamente a

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}, \ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}, \ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

La condizione di ortogonalità degli spigoli avrà la forma

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k). \tag{17}$$

Calcoliamo l'elemento di lunghezza nelle nuove coordinate

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} dq_3\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} dq_3\right)^2. \qquad (18)$$

Sviluppando la parentesi e tenendo conto delle condizioni di ortogonalità (17), otteniamo

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \qquad (19)$$

dove

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Lungo ciascuno degli spigoli del volume elementare varia una sola coordinata, pertanto le lunghezze di questi spigoli, secondo la formula (19), sono

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3, \qquad (21)$$

cosicché l'elemento di volume vale

$$dv = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \qquad (22)$$

Consideriamo ora un campo vettoriale $A(x, y, z)$. Calcoliamo div A definita dalla nota formula dell'analisi vettoriale

$$\operatorname{div} A = \lim_{v_M \to 0} \frac{\int\int_S A_n \, dS}{v_M}, \qquad (23)$$

dove S è la superficie delimitante un volume v_M contenente il punto in esame M. Applichiamo questa formula all'elemento di volume dv rappresentato nella fig. 44.

Partendo dal teorema della media, si può rappresentare la differenza di flusso del vettore A attraverso le facce opposte, ad esempio attraverso quelle destra e sinistra, nella forma

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3 \mid_{q_1 + dq_1} - A_1 ds_2 ds_3 \mid_{q_1}.$$

Tenendo conto della formula (21), otteniamo

$$Q_1 = [H_2 H_3 A_1 \mid_{q_1 + dq_1} - H_2 H_3 A_1 \mid_{q_1}] \, dq_2 \, dq_3 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3. \qquad (24)$$

Analogamente si calcolano le differenze di flusso attraverso le facce opposte

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 A_2)\, dq_1\, dq_2\, dq_3, \tag{25}$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 A_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \tag{26}$$

Sostituendo nella formula (23) il valore $\int\limits_S \int A_n ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e usando la formula (22), otteniamo l'espressione della divergenza nelle coordinate ortogonali curvilinee

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 A_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 A_3)\right]. \tag{27}$$

Supponiamo che il campo A sia potenziale, cioè che

$$A = \operatorname{grad} u. \tag{28}$$

Allora

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}. \tag{29}$$

Sostituendo nella (27) le espressioni (29) per A_1, A_2 e A_3, otteniamo l'espressione per l'operatore di Laplace

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u =$$
$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{30}$$

Quindi, l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ nelle coordinate curvilinee ortogonali q_1, q_2, q_3 si scrive come segue:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] = 0. \tag{31}$$

Consideriamo due casi particolari.

1. *Coordinate sferiche.* In questo caso $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ e le formule di trasformazione (15) diventano

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Calcoliamo ds^2:

$$ds^2 = (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi\, dr + r \cos \theta \cos \varphi\, d\theta - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi)^2 +$$
$$+ (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi\, dr + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi\, d\theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi\, d\varphi)^2 +$$
$$+ (\cos \theta\, dr - r \operatorname{sen} \theta\, d\theta)^2;$$

dopo aver sviluppato la parentesi e semplificato troviamo

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\varphi^2,$$

cioè

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \operatorname{sen} \theta.$$

Sostituendo i valori di H_1, H_2, H_3 nella formula (31) otteniamo l'equazione di Laplace nelle coordinate sferiche

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right]=0$$

o, infine, 1268 1

$$\Delta_{r,\,\theta,\,\varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (32$$

2. *Coordinate cilindriche.* In questo caso $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, ossia

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z,$$

cosicché

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

L'equazione di Laplace nelle coordinate cilindriche assume la forma

$$\Delta_{\rho,\,\varphi,\,z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+0. \qquad (33)$$

Se la funzione cercata u è indipendente da z, l'equazione (33) si rende più semplice

$$\Delta_{\rho,\,\varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (34)$$

4. Alcune soluzioni particolari dell'equazione di Laplace. Di grande interesse sono le soluzioni dell'equazione di Laplace che godono di simmetria sferica o cilindrica, dipendenti cioè da una sola variabile r o ρ.

Una soluzione dell'equazione di Laplace che gode di simmetria sferica sarà definita dall'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right)=0.$$

Integrando questa equazione troviamo

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie. Ponendo, ad esempio, $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, otteniamo la funzione

$$U_0 = \frac{1}{r}, \tag{35}$$

che spesso si dice *soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace nello spazio.*

Ponendo analogamente

$$u = U(\rho)$$

e usando le equazioni (33) e (34), troviamo una soluzione a simmetria cilindrica o circolare (nel caso di due variabili indipendenti) della forma

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Considerando $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$, avremo

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \tag{36}$$

La funzione $U_0(\rho)$ spesso si dice *soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace nel piano* (per due variabili indipendenti).

La funzione $U_0 = \frac{1}{r}$ verifica l'equazione $\Delta u = 0$ ovunque, tranne che nel punto $r = 0$ in cui diventa infinita. Essa coincide, a meno di un fattore di proporzionalità, con il campo della carica puntuale e collocata all'origine delle coordinate; il potenziale di questo campo vale

$$u = \frac{e}{r}.$$

Analogamente la funzione $\ln \frac{1}{\rho}$ verifica l'equazione di Laplace ovunque, tranne che nel punto $\rho = 0$ in cui diventa infinita (positiva) e coincide, a meno di un fattore, con il campo del circuito carico (per dettaglio si veda il § 5, n. 2) il cui potenziale vale

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

dove e_1 è la densità di carica calcolata per unità di lunghezza. Queste funzioni rivestono grande importanza nella teoria delle funzioni armoniche.

5. Funzioni armoniche e funzioni analitiche di variabile complessa. Il metodo più generale per la soluzione dei problemi bidimensionali dell'equazione di Laplace è quello basato sulle funzioni di variabile complessa.

Sia

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

una funzione di variabile complessa $z = x + iy$, dove u e v sono due funzioni reali delle variabili x e y. Interesse rilevante presentano le cosiddette funzioni analitiche per le quali esiste la derivata

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

L'incremento $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ può, evidentemente, tendere a zero in più modi. In generale, ogni volta che Δz tende a zero in un modo o in un altro si ottiene un valore del limite. Tuttavia, se la funzione $w = f(z)$ è analitica il limite $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ non dipende dal cammino scelto.

Le condizioni necessarie e sufficienti di analiticità sono le cosiddette *condizioni di Cauchy-Riemann*

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

che si possono ottenere, ad esempio, nel seguente modo.

Sia $w = u + iv = f(z)$ una funzione analitica. Calcolando le derivate

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz},$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i\frac{dw}{dz}$$

e chiedendo che siano uguali i valori di $\frac{dw}{dz}$ definibili da queste relazioni, otteniamo

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

da cui derivano le condizioni di Cauchy-Riemann. Non ci soffermeremo sulla dimostrazione della sufficienza di queste condizioni.

Nella teoria delle funzioni di variabile complessa si può dimostrare che una funzione, analitica in un dominio G del piano $z = x + iy$, ha in questo dominio le derivate di tutti gli ordini e si sviluppa in serie di potenze. In particolare, per una tale funzione $u(x, y)$ e $v(x, y)$ hanno le derivate continue del secondo ordine rispetto a x e y.

Derivando la prima uguaglianza della formula (37) rispetto a x e la seconda rispetto a y, otteniamo

$$u_{xx} + y_{yy} = 0 \quad \text{oppure} \quad \Delta_2 v = 0.$$

Allo stesso modo, cambiando l'ordine di derivazione, abbiamo

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{oppure} \quad \Delta_2 u = 0.$$

Quindi, le parti reale ed immaginaria di una funzione analitica verificano l'equazione di Laplace. Si suole dire che u e v soddisfacenti alla condizione di Cauchy-Riemann sono funzioni armoniche coniugate.

Consideriamo la trasformazione

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \quad u = u(x, y), \\ y &= y(u, v), \quad v = v(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

che porta in modo biunivoco un dominio G del piano (x, y) nel dominio G' del piano (u, v) in modo che a ciascun punto del dominio G corrisponde un determinato punto del dominio G' e, viceversa, a ciascun punto del dominio G' corrisponde un determinato punto del dominio G.

Sia

$$U = U(x, y)$$

una funzione reale doppiamente derivabile e definita all'interno del dominio G.

Vediamo come varia sotto questa trasformazione l'operatore di Laplace della funzione $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \widetilde{U}(u, v)$.

Calcoliamo le funzioni derivate

$$U_x = \widetilde{U}_u u_x + \widetilde{U}_v v_x, \quad U_y = \widetilde{U}_u u_y + \widetilde{U}_v v_y,$$

$$U_{xx} = \widetilde{U}_{uu} u_x^2 + \widetilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\widetilde{U}_{uv} u_x v_x + \widetilde{U}_u u_{xx} + \widetilde{U}_v v_{xx},$$

$$U_{yy} = \widetilde{U}_{uu} u_y^2 + \widetilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\widetilde{U}_{uv} u_y v_y + \widetilde{U}_u u_{yy} + \widetilde{U}_v v_{yy},$$

dalle quali ricaviamo

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \widetilde{U}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \widetilde{U}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \\ &+ 2\widetilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \widetilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \widetilde{U}_v(v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned} \tag{39}$$

Se u e v sono due funzioni armoniche coniugate, la trasformazione (38) è equivalente a quella realizzata dalla funzione analitica

$$w = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \tag{40}$$

Allora, in virtù delle condizioni di Cauchy-Riemann (37), per le funzioni u e v si devono verificare le relazioni

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

La formula (39) diventa

$$U_{xx} + U_{yy} = (\widetilde{U}_{uu} + \widetilde{U}_{vv}) |f'(z)|^2 \tag{41}$$

ossia

$$\Delta_{uv}\widetilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2}\,\Delta_{x,\,y}U. \tag{41'}$$

Ne segue che per la trasformazione (40) la funzione $U(x, y)$ armonica nel dominio G si trasforma nella funzione $\widetilde{U} = U(u, v)$ che è armonica nel dominio G' alla sola condizione che sia $|f'(z)|^2 \neq \neq 0$.

6. Trasformazione per raggi vettori reciproci. Nello studio delle funzioni armoniche spesso si ricorre alla trasformazione per raggi vettori reciproci. Si chiama trasformazione per raggi vettori reciproci in una sfera di raggio a una trasformazione tale che a ogni punto M fa corrispondere un punto M' giacente sulla stessa semiretta uscente dall'origine delle coordinate del punto M, il cui raggio vettore r' è legato al raggio vettore r del punto M dalla relazione

$$r'r = a^2 \quad \text{oppure} \quad r' = \frac{a^2}{r}. \tag{42}$$

Nel seguito supporremo $a = 1$, ciò che è sempre facile ottenere cambiando l'unità di lunghezza.

Mostriamo che una funzione armonica di due variabili indipendenti $u(\rho, \varphi)$ con una trasformazione per raggi vettori reciproci diventa una funzione armonica

$$v(\rho', \varphi) = u(\rho, \varphi), \quad \text{dove} \quad \rho = \frac{1}{\rho'}. \tag{43}$$

Infatti, la funzione $u(\rho, \varphi)$ e, quindi, la funzione $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ come funzioni delle variabili ρ e φ verificano le equazioni

$$\rho^2\Delta_{\rho,\,\varphi}u = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

e

$$\rho^2\Delta_{\rho,\,\varphi}v = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Passando alle variabili ρ' e φ, otteniamo

$$\rho\frac{\partial v}{\partial\rho} = \rho\frac{\partial v}{\partial\rho'}\cdot\frac{\partial\rho'}{\partial\rho} = -\rho'\frac{\partial v}{\partial\rho'},$$

da cui segue che $v(\rho', \varphi)$ verifica l'equazione $\Delta_{\rho,\,\varphi}v = 0$ poiché

$$\rho'^2\Delta_{\rho',\,\varphi}v = \rho'\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho'\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Passando al caso di tre variabili indipendenti, mostriamo che la funzione

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{dove} \quad r = \frac{1}{r'} \tag{44}$$

verifica l'equazione di Laplace $\Delta_{r',\,\theta,\,\varphi} v = 0$ se $u\,(r,\,\theta,\,\varphi)$ è una funzione armonica delle sue variabili, $\Delta_{r',\,\theta,\,\varphi} u = 0$.

La trasformazione (44) spesso si dice trasformazione di Kelvin.

È facile vedere con una derivazione diretta che il primo termine dell'operatore di Laplace (32) acquista la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \tag{45}$$

in modo che

$$r\Delta_{r,\,\theta,\,\varphi} u = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

ossia

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right] = 0.$$

Osservando che

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'}\cdot\frac{\partial r'}{\partial r} = -r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},$$

troviamo che v verifica l'equazione $\Delta_{r',\,\theta,\,\varphi} v = 0$, cosicché

$$r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right) + r'^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

ossia

$$r'^4\Delta_{r',\,\theta,\,\varphi} v = 0.$$

§ 2. Proprietà generali delle funzioni armoniche

In questo paragrafo si dà una rappresentazione integrale delle funzioni armoniche, la quale è l'apparato fondamentale di studio delle proprietà generali delle funzioni armoniche. Una delle conseguenze importanti della formula integrale è il principio del valore massimo che adopereremo più di una volta nel seguito, sia per la dimostrazione del teorema di unicità che per la soluzione dei problemi ai limiti. Anche qui si dà l'impostazione matematica dei problemi ai limiti interni ed esterni per l'equazione di Laplace e si dimostra l'unicità e la stabilità della soluzione di questi problemi.

1. Formule di Green. Rappresentazione integrale della soluzione. Nello studio delle equazioni di tipo ellittico spesso ricorreremo alle formule di Green che sono una conseguenza diretta della formula di Ostrogradskij.

Nel caso più semplice la formula di Ostrogradskij diventa *)

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma R\cos\gamma\,d\sigma, \tag{1}$$

*) B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, Mosca, 1965 (ed. russa).

dove T è un volume delimitato da una superficie sufficientemente liscia Σ, $R(x, y, z)$ una funzione arbitraria che è continua all'interno di $T + \Sigma$ e avente derivate continue all'interno del volume T, γ l'angolo formato dall'asse z e dalla normale esterna alla superficie Σ. È facile convincersi della validità di questa formula integrando rispetto a z.

Di solito, la formula di Ostrogradskij si scrive come segue:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau =$$

$$= \iint_\Sigma \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\}\, d\sigma, \tag{2}$$

dove $d\tau = dx\, dy\, dz$ è l'elemento di volume, $\alpha = (\widehat{nx})$, $\beta = (\widehat{ny})$, $\gamma = (\widehat{nz})$ sono gli angoli formati dalla normale esterna n alla superficie Σ con gli assi coordinati e P, Q, R sono funzioni derivabili qualsiasi *).

Se consideriamo P, Q, R come componenti di un vettore $A = Pi + Qj + Rk$, possiamo scrivere la formula di Ostrogradskij (2) nella forma

$$\iiint_T \operatorname{div} A\, d\tau = \iint_\Sigma A_n\, d\sigma, \tag{2'}$$

dove

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

e

$$A_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

è la componente del vettore A lungo la normale esterna.

Passiamo ora alla deduzione delle formule di Green.

Supponiamo che $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ siano due funzioni continue assieme alle loro derivate prime all'interno di $T + \Sigma$ e aventi le derivate seconde continue all'interno di T.

Ponendo

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

*) Nel seguito supporremo che la formula di Ostrogradskij sia applicabile ai domini con i quali avremo a che fare. Tali sono, ad esempio, le superfici a curvatura continua a tratti e le superfici di Ljapunov (si veda il § 5).

e applicando la formula di Ostrogradskij (2'), otteniamo la cosiddetta *prima formula di Green*

$$\iiint_T u\Delta v\, d\tau = \iint_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma -$$

$$- \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau, \tag{3}$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è l'operatore di Laplace e $\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial z}$ è la derivata lungo la normale esterna.

Se teniamo conto della relazione

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},$$

si può rappresentare la formula di Green nella forma

$$\iiint_T u\Delta v\, d\tau = - \iiint_T \nabla u \nabla v\, d\tau + \iint_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma. \tag{3'}$$

Permutando le funzioni u e v avremo

$$\iiint_T v\Delta u\, d\tau = - \iiint_T \nabla v \nabla u\, d\tau + \iint_\Sigma v \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \tag{4}$$

Sottraendo dall'uguaglianza (3') l'uguaglianza (4) otteniamo la *seconda formula di Green*

$$\iiint_T (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \iint_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \tag{5}$$

Il dominio T può essere delimitato da più superfici. In questo caso le formule di Green sono sempre applicabili e gli integrali di superficie vanno calcolati rispetto a tutte le superfici che delimitano il dominio T.

Per le funzioni $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ di due variabili sussistono funzioni di Green analoghe. La seconda funzione di Green in un dominio S di frontiera C diventa

$$\iint_S (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u)\, dS = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

dove $dS = dx\, dy$, ds è l'elemento d'arco lungo la frontiera C, $\Delta_2 v = v_{xx} + v_{yy}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ è la derivata lungo la normale esterna n al contorno C.

Come abbiamo già visto (§ 1, n. 4), la funzione $U_0(M) = \frac{1}{R}$, dove $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ è la distanza fra i punti $M(x, y, z)$ e $M_0(x_0, y_0, z_0)$, verifica l'equazione di Laplace per $M \neq M_0$.

Sia $u(M)$ una funzione armonica continua con le derivate prime nel dominio $T + \Sigma$ e avente le derivate seconde in T.

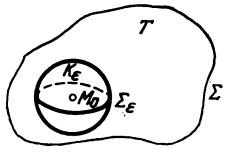


Fig. 45

Consideriamo la funzione $v = 1/R_{MM_0}$, dove M_0 è un punto interno del dominio T. Poiché questa funzione ha all'interno di T una discontinuità nel punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, è impossibile applicare direttamente la seconda formula di Green alle funzioni u e v nel dominio T. Tuttavia la funzione $v = 1/R_{MM_0}$ è limitata nel dominio $T - K_\varepsilon$ di frontiera $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$, dove K_ε è una sfera di raggio ε avente come centro il punto M_0 e come superficie Σ_ε (fig. 45).

Applicando la seconda formula di Green (5) alle funzioni u e $v = 1/R$ nel dominio $T - K_\varepsilon$, otteniamo

$$\iiint\limits_{T-K_\varepsilon} \left(u\Delta\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta u\right) d\tau =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma -$$

$$- \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R}\,\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (6)$$

A secondo membro di questa uguaglianza i due ultimi integrali dipendono da ε. Calcolando la derivata lungo la normale esterna al dominio $T - K_\varepsilon$ su Σ_ε, troviamo

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = -\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

da cui

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\, 4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \qquad (7)$$

dove u^* è la media della funzione $u(M)$ sulla superficie Σ_ε. Trasformiamo il terzo integrale

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \quad (8)$$

dove $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ è la media della derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ sulla sfera Σ_ε. Sostituendo le espressioni (7) e (8) nella formula (6) e tenendo conto che $\Delta(1/R) = 0$ in $T - K_\varepsilon$, avremo

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*. \quad (9)$$

Ora facciamo tendere a zero il raggio ε. Allora otteniamo:

1) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^* = u(M_0)$ poiché $u(M)$ è una funzione continua e u^* è la sua media sulla sfera di raggio ε e centro nel punto M_0;

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$ poiché dalla continuità delle derivate prime della funzione $u(M)$ all'interno di T deriva immediatamente la limitatezza della derivata normale

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

nell'intorno del punto M_0;

3) per definizione dell'integrale improprio

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \Delta u\right) d\tau = \iiint_{T} \left(-\frac{1}{R} \Delta u\right) d\tau.$$

In seguito al suddetto passaggio al limite $\varepsilon \to 0$ otteniamo la *formula integrale fondamentale di Green*

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P - \iiint_{T} \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}} d\tau, \quad (10)$$

dove $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ è un punto di coordinate ξ, η, ζ giacente sulla superficie Σ.

Se il punto M_0 si trova all'esterno del dominio T, allora $v = 1/R_{MP}$ è continua e armonica in tutti i punti del dominio T. Pertanto avremo zero al primo membro della formula (10).

Consideriamo il caso il cui M_0 appartiene alla superficie Σ. Supponiamo che Σ abbia in M_0 un piano tangente a coefficienti

angolari continui. La sfera Σ_ε di raggio ε e centro nel punto M_0 interseca la superficie Σ e la separa in due parti Σ_1 e Σ_2 delle quali la prima, Σ_1, giace all'interno della sfera K_ε. Applichiamo la formula di Green (5) alle funzioni u e $v = 1/R$ nel dominio $T - T_1$, dove T_1 è delimitato da Σ_1 e da una parte della sfera Σ'_ε giacente all'interno di T. Lo schema generale dei ragionamenti che ci hanno condotto alla formula (9) resta immutato. Si deve soltanto tener presente che l'integrale su $\Sigma_1 + \Sigma'_\varepsilon$ tende a $2\pi u\,(M_0)$ e portare la correzione corrispondente alle formule (7), (8) e (8′). Come risultato otteniamo una espressione ricavabile dalla formula (10) sostituendo 4π con 2π.

Riunendo tutti i casi considerati, scriviamo la formula fondamentale di Green come segue:

$$\Omega \cdot u\,(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u\,(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] d\sigma_P - \iiint\limits_{T} \frac{\Delta u\,(P)}{R_{M_0P}}\, d\tau_P, \tag{10′}$$

dove Ω assume i tre valori seguenti:

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{se il punto } M_0 \text{ giace all'interno di } T, \\ 2\pi, & \text{se il punto } M_0 \text{ giace sulla frontiera } \Sigma, \\ 0, & \text{se il punto } M_0 \text{ giace all'esterno di } T. \end{cases}$$

È da notare che se il punto M_0 è un vertice conico della superficie Σ, allora $\Omega = \alpha$, dove α è la grandezza dell'angolo solido formato dalle tangenti alla superficie Σ nel punto M_0.

Per la funzione armonica $\Delta u = 0$ anche la formula (10) diventa

$$u\,(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u\,(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] d\sigma_P \tag{11}$$

(M_0 giace all'interno di T).

Quindi, il valore di una funzione armonica in ogni punto interno del dominio in questione si esprime mediante i valori di questa funzione e della sua derivata normale sulla superficie del dominio. In questo caso la funzione u e le sue derivate prime sono supposte continue fino alla frontiera. Osserviamo subito che ciascuno degli integrali

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu\,(P) \frac{1}{R_{MP}}\, d\sigma_P \quad \text{e} \quad \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu\,(P)\, d\sigma_P, \tag{12}$$

dove μ e ν sono funzioni continue, è una funzione armonica all'esterno della superficie Σ. Infatti, essendo la funzione integranda continua con tutte le sue derivate all'esterno della superficie Σ, le funzioni derivate (12) di qualsiasi ordine si possono calcolare

per derivazione sotto il segno d'integrale. Siccome, inoltre, le funzioni

$$\frac{1}{R_{MP}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\beta_P + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\gamma_P$$

verificano l'equazione di Laplace rispetto alle variabili $M\ (x, y, z)$ allora, in virtù del principio di sovrapposizione (si veda il lemma alla pag. 226), le funzioni (12) verificano anch'esse l'equazione di Laplace rispetto alle variabili x, y, z.

Ne deriva una conseguenza importante: ogni funzione armonica all'interno del dominio di armonicità è derivabile indefinitamente *). È da notare anche che una funzione armonica è analitica (si sviluppa in serie di potenze) in ogni punto M_0 del dominio T. È facile provare ciò mediante considerazioni basate sulla stessa rappresentazione integrale (11).

Formule analoghe sussistono anche per le funzioni armoniche di due variabili indipendenti. Sia S un dominio del piano (x, y) delimitato da un contorno C e n la direzione della normale a questo contorno, esterna rispetto al dominio S.

Ponendo nella seconda formula di Green $v = \ln(1/R_{M_0P})$, dove $R_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ è la distanza $P\ (x, y)$ dal punto fisso $M_0\ (x_0, y_0)$, e ripetendo le stesse considerazioni che abbiamo applicato al caso tridimensionale, otteniamo la formula fondamentale di Green nel piano

$$\Omega u(M_0) = \int_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] ds_P -$$

$$- \iint_S \Delta u(P) \ln\frac{1}{R_{M_0P}}\, ds_P,$$

dove

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi \text{ se } M_0 \text{ giace all'interno di } S, \\ \pi \text{ se } M_0 \text{ giace sulla frontiera } C, \\ 0 \text{ se } M_0 \text{ giace all'esterno di } S. \end{cases}$$

Se $u\ (M)$ è una funzione armonica all'interno di S e M_0 giace all'interno di S, allora

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] ds_P.$$

*) Se per una funzione u, armonica all'interno di T, non è soddisfatta la condizione di continuità assieme alla derivata prima sulla superficie Σ, il teorema, cionondimeno, resta valido, come si può provare circondando il punto M con un dominio giacente assieme alla sua frontiera all'interno di T.

2. Alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche. Stabiliamo alcune proprietà importantissime delle funzioni armoniche.

1. *Se v è una funzione armonica in un dominio T delimitato dalla superficie Σ, allora*

$$\int\int_S \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0, \tag{13}$$

dove S è una superficie chiusa qualsiasi appartenente tutta al dominio T.

Infatti, sostituendo nella prima formula di Green (3′) una funzione armonica qualsiasi v ($\Delta v = 0$) e la funzione $u \equiv 1$, otteniamo immediatamente la formula (13) dalla quale deriva che il secondo problema ai limiti $\left(\Delta u = 0 \text{ in } T,\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \mid_\Sigma\right)$ può avere soluzione sotto la sola condizione

$$\int\int_\Sigma f\, d\sigma = 0.$$

Questa proprietà delle funzioni armoniche si può interpretare come condizione di assenza di sorgenti all'interno del dominio T.

2. *Se la funzione $u(M)$ è armonica in un dominio T e M_0 è un punto interno di questo dominio T, sussiste la formula*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\int_{\Sigma_a} u\, d\sigma, \tag{14}$$

dove Σ_a è una sfera di raggio a e centro nel punto M_0, appartenente tutta al dominio T (teorema della media).

Questo teorema afferma che il valore della funzione armonica in un punto M_0 è uguale alla media di questa funzione in qualsiasi sfera Σ_a di centro in M_0 se questa sfera Σ_a non esce dal dominio di armonicità della funzione $u(M)$.

Applichiamo la formula (11) alla sfera K_a con centro nel punto M_0 e superficie Σ_a:

$$4\pi u(M_0) = -\int\int_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma.$$

Tenendo conto che

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \quad \text{su} \quad \Sigma_a \quad \text{e} \quad \int\int_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(la direzione della normale esterna alla superficie Σ_a coincide con

quella del raggio), otteniamo immediatamente la formula (14) *).

Scrivendo la (14) nella forma

$$4\pi\rho^2 u\,(M_0) = \int\int_{\Sigma_\rho} u\,(P)\,d\sigma_P$$

e integrando su ρ da 0 ad a, otteniamo

$$u\,(M_0) = \frac{1}{V_a}\int\int\int_{K_a} u\,d\tau_P, \qquad V_a = \frac{4\pi}{3}a^3,$$

vale a dire $u\,(M_0)$ è la media rispetto al volume della sfera K_a avente come frontiera Σ_a.

Nel caso di due variabili indipendenti è valido un teorema della media analogo:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a}\int_{C_a} u\,ds, \tag{15}$$

dove C_a è una circonferenza di raggio a con centro nel punto M_0, appartenente al dominio di armonicità della funzione u.

3. *Se una funzione $u\,(M)$, definita e continua in un dominio chiuso $T + \Sigma$, verifica l'equazione $\Delta u = 0$ all'interno di T, il massimo e il minimo della funzione $u\,(M)$ si ottengono sulla superficie Σ (principio del valore massimo).*

Supponiamo che la funzione $u(M)$ abbia il massimo in un punto interno M_0 del dominio T cosicché $u_0 = u\,(M_0) \geqslant u\,(M)$, dove M è un punto qualsiasi del dominio T. Circondiamo il punto M_0 con una sfera Σ_ρ di raggio ρ giacente tutta all'interno del dominio T. Poiché, per ipotesi, $u\,(M_0)$ è il massimo della funzione $u\,(M)$ in $T + \Sigma$, allora $u\,|_\Sigma \leqslant u\,(M_0)$. Ricorrendo alla formula della media (14) e sostituendo $u\,(M)$ ovunque sotto il segno di integrale con il valore $u\,(M_0)$, otteniamo

$$u\,(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\int\int_{\Sigma_\rho} u\,(M)\,d\sigma_M \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2}\int\int_{\Sigma_\rho} u\,(M_0)\,d\sigma = u\,(M_0). \tag{16}$$

---

*) Per dimostrare questo teorema abbiamo usato l'uguaglianza (13) che suppone l'esistenza delle derivate sulla superficie della sfera. Se la funzione $u\,(M)$, continua nel dominio chiuso $T + \Sigma$, verifica l'equazione $\Delta u = 0$ per i soli punti interni di T, la precedente conclusione relativa alla sfera Σ_{a_0} tangente a Σ sarebbe infondata. Tuttavia il teorema è valido per ogni $a < a_0$ e, passando al limite per $a \to a_0$, otteniamo

$$u\,(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2}\int\int_{\Sigma_{a_0}} u\,(M)\,d\sigma.$$

Se supponiamo che almeno in un punto M della sfera Σ_ρ si abbia $u(M) < u(M_0)$, è evidente che al posto del segno $\leqslant$ avremo il segno $<$, ciò che implica una contraddizione. Quindi, su tutta la superficie Σ_ρ si ha $u(M) \equiv u(M_0)$.

Se ρ_0^m è la distanza minima fra M_0 e la superficie Σ, allora $u(M) \equiv u(M_0)$ per tutti i punti giacenti all'interno di $\Sigma_{\rho_0^m}$. Ne segue che nei punti M^* appartenenti alla parte comune di $\Sigma_{\rho_0^m}$ e Σ si ha $u(M^*) = u(M_0)$ per continuità. Ciò dimostra il teorema poiché abbiamo visto che il massimo $u(M_0)$ si ottiene nei punti sulla frontiera M^*.

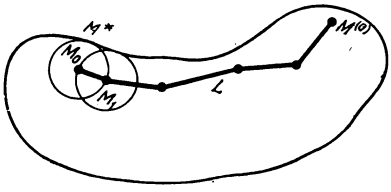


Fig. 46

È facile capire che se il dominio T è connesso e se il massimo si ottiene almeno in un punto interno M_0, allora $u(M) \equiv u(M_0)$ in tutto il dominio. Sia $M^{(0)}$ un altro punto qualsiasi del dominio T. Congiungiamo il punto $M^{(0)}$ con il punto M_0 con la spezzata L (fig. 46) la cui lunghezza indichiamo con l. M_1 sia l'ultimo punto d'uscita della spezzata L da $\Sigma_{\rho_0^m}$. In questo punto $u(M_1) = u(M_0)$. Considerando questo punto come centro tracciamo la sfera $\Sigma_{\rho_0^m}$ di raggio ρ_1^m tangente a Σ e supponiamo che M_2 sia l'ultimo punto d'uscita di L da $\Sigma_{\rho_1^m}$; in questo punto $u(M_2) = u(M_0)$. Prolungando questa operazione, otteniamo che dopo non più di $p = l/\rho^{(m)}$ passi, dove $\rho^{(m)}$ è la distanza minima di L da Σ, una di queste sfere comprenderà il punto $M^{(0)}$ da cui deriva che $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. Essendo $M^{(0)}$ arbitrario e $u(M)$ continua nel dominio chiuso $T + \Sigma$, concludiamo che $u(M) \equiv u(M_0)$ ovunque, compresi i punti giacenti sulla frontiera. In tal modo, fra tutte le funzioni armoniche la sola costante può avere il suo massimo nei punti interni del dominio.

Un teorema analogo si può dimostrare per il minimo.

Corollario 1. Se due funzioni u ed U sono continue nel dominio $T + \Sigma$, armoniche in T e se

$u \leqslant U$ su Σ,

allora

$u \leqslant U$ ovunque all'interno di T.

Infatti, la funzione $U - u$ è continua in $T + \Sigma$, armonica in T e

$U - u \geqslant 0$ in Σ.

In virtù del principio del valore massimo abbiamo che

$U - u \geqslant 0$ ovunque all'interno di T,

da cui deriva quanto affermato.

Corollario 2. Se due funzioni u ed U sono continue nel dominio $T + \Sigma$, armoniche in T e se

$| u | \leqslant U$ in Σ,

allora

$| u | \leqslant U$ ovunque all'interno di T.

Dalle ipotesi del teorema segue che tre funzioni armoniche $-U$, u ed U soddisfano alle condizioni

$-U \leqslant u \leqslant U$ in Σ.

Applicando due volte il corollario 1 otteniamo

$-U \leqslant u \leqslant U$ ovunque all'interno di T

ossia

$| u | \leqslant U$ all'interno di T.

Corollario 3. Una funzione $u(M)$ armonica in T e continua in $T + \Sigma$ verifica la disuguaglianza $| u | \leqslant \max | u | |_{\Sigma}$ ovunque in $T + \Sigma$. Per la dimostrazione poniamo $U = \max | u ||_{\Sigma}$ e applichiamo il corollario 2.

Sebbene l'esposizione si riferisse al caso tridimensionale, tutti i risultati si estendono, però, al caso di funzioni armoniche in un qualsiasi numero di variabili.

3. Unicità e stabilità del primo problema ai limiti. Supponiamo che sia dato un dominio T limitato da una superficie chiusa Σ sulla quale è assegnata una funzione f. Nel caso elementare in cui la funzione al contorno f è continua, il primo problema ai limiti interno (problema interno di Dirichlet) per l'equazione di Laplace si pone nel seguente modo.

Si chiede di definire una funzione u che:

a) *è definita e continua nel dominio chiuso* $T + \Sigma$, *compresa la frontiera*;

b) *verifica all'interno del dominio* T *l'equazione* $\Delta u = 0$;

c) *assume sul contorno* Σ *i valori assegnati di* f.

La condizione a) suppone l'armonicità della funzione all'interno del dominio T. Ma la condizione di armonicità sulla frontiera è superflua in quanto implicherebbe limitazioni complementari da imporre sui valori al contorno.

La condizione di continuità di u nel dominio chiuso (o un'altra condizione che illustri il fatto che la funzione u assume sul contorno valori assegnati) è necessaria per l'unicità. Se rinunciamo a questa condizione si può considerare come soluzione del pro-

blema qualsiasi funzione *uguale alla costante C all'interno di T e alla funzione f assegnata in* Σ, poiché questa verifica le condizioni b) e c).

Dimostriamo il teorema di unicità:

il primo problema ai limiti interno per l'equazione di Laplace non può avere due soluzioni distinte.

Supponiamo che esistano due funzioni distinte u_1 e u_2 che siano soluzioni del problema, cioè siano funzioni continue nel dominio chiuso $T + \Sigma$, verifichino l'equazione di Laplace all'interno del dominio e assumano un medesimo valore f sulla superficie Σ. La differenza di queste funzioni $u = u_1 - u_2$ gode delle proprietà seguenti:

a) $\Delta u = 0$ all'interno del dominio T;

b) u è continua nel dominio chiuso $T + \Sigma$;

c) $u \mid_{\Sigma} = 0$.

Quindi, la funzione $u\ (M)$ è continua ed armonica nel dominio T e nulla sulla frontiera. Come è noto, ogni funzione continua in un dominio chiuso assume un massimo. Proviamo che $u \equiv 0$. Se la funzione $u \not\equiv 0$ e se almeno in un punto $u > 0$, essa deve avere il massimo positivo all'interno del dominio, ciò che è impossibile. Allo stesso modo si dimostra che la funzione u non può avere valori negativi in nessun punto interno di T. Ne segue

$u \equiv 0$.

Passiamo ora alla dimostrazione della *dipendenza continua della soluzione del primo problema ai limiti dai dati al contorno.* Ricordiamo che il problema si dice fisicamente definito se a una piccola variazione delle condizioni che determinano la soluzione del problema (cioè delle condizioni al contorno nel caso considerato) corrisponde una piccola variazione della soluzione stessa.

u_1 e u_2 siano due funzioni continue in $T + \Sigma$ ed armoniche all'interno di T per le quali $| u_1 - u_2 | \leqslant \varepsilon$ su Σ. Allora la stessa disuguaglianza si verifica all'interno di T.

Questa affermazione deriva immediatamente dal corollario 2 di pag. 303 per il fatto che $U \equiv \varepsilon$ è una funzione armonica.

Abbiamo dimostrato così la dipendenza continua della soluzione dalle condizioni al contorno e l'unicità del primo problema interno.

4. Problemi con condizioni al contorno discontinue. Spesso si ha a che fare con il primo problema ai limiti con condizioni al contorno discontinue. Una funzione continua nel dominio chiuso non può essere soluzione di questo problema. Pertanto è necessario precisare l'impostazione del primo problema ai limiti in applicazione al caso in questione.

Supponiamo che sia data una funzione continua a tratti $f\ (P)$ sulla curva C che delimita il dominio S nel piano (x, y). Si chiede di definire una funzione $u\ (M)$: 1) armonica all'interno del domi-

nio S; 2) tangente continuamente ai valori al contorno nei punti di continuità di quest'ultimi; 3) limitata nel dominio chiuso $S + C$.

Osserviamo che la condizione complementare di limitatezza si riferisce di fatto agli intorni dei punti di discontinuità della funzione $f(P)$.

Dimostriamo il seguente teorema:

la soluzione del primo problema ai limiti con valori al contorno continui a tratti è unica.

u_1 e u_2 siano due soluzioni del problema posto. La differenza $v = u_1 - u_2$:

1) è una funzione armonica all'interno di S;

2) è tangente con continuità ai valori al contorno nulli sulla frontiera, tranne che nei punti di discontinuità di $f(P)$ in cui essa può avere una discontinuità;

3) è limitata in $S + C$: $|v| < A$.

Costruiamo la funzione armonica

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{D}{r_i},$$

dove ε è un numero positivo qualsiasi, D il diametro del dominio, r_i la distanza fra il punto considerato M e l'i-esimo punto di discontinuità P_i. La funzione $U(M)$ è positiva poiché tutti i suoi addendi sono superiori a zero.

In ciascuno dei punti di discontinuità P_i costruiamo un cerchio K_i di raggio δ tale che ogni addendo

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

sulla circonferenza corrispondente C_i superi A, cioè che $\varepsilon \ln \frac{D}{\delta} \geqslant A$. La funzione v è continua nel dominio chiuso $S - \sum_{i=1}^{n} K_i = S'$ e $|v| \leqslant U$ sulla frontiera di questo dominio.

Perciò, in virtù del principio di massimo, U è una funzione maggiorante di v:

$$|v(M)| \leqslant U(M).$$

Fissando un punto qualsiasi M nel dominio S e facendo tendere ε a zero, otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0;$$

quindi,

$$v(M) = 0,$$

poiché v non dipende da ε, ossia

$$u_1 \equiv u_2,$$

come dovevasi dimostrare.

5. Punti singolari isolati. Consideriamo i punti singolari di una funzione armonica. Sia P un punto singolare isolato giacente all'interno del dominio di armonicità della funzione u. Sono possibili i due casi seguenti:

a) la funzione armonica è limitata nell'intorno del punto P;

b) la funzione armonica non è limitata nell'intorno del punto P. Abbiamo già avuto a che fare con punti singolari di seconda specie ($\ln(1/r)$, ad esempio). Il teorema seguente mostra che il primo tipo di punti singolari non può verificarsi.

Se una funzione limitata $u(M)$ è armonica nell'interno del dominio S, tranne che nel punto P, si può definire il valore $u(P)$ in modo tale che la funzione $u(M)$ sia armonica ovunque all'interno di S.

Consideriamo un cerchio K_α di raggio α e centro nel punto P, che appartiene interamente al dominio S, e studiamo all'interno di questo cerchio una funzione armonica v coincidente con la funzione u sulla circonferenza C_α del cerchio K_α *).

Costruiamo la differenza

$$w = u - v$$

la quale

1) è armonica ovunque nell'interno di K_α, tranne che nel punto P in cui w non è definita;

2) è tangente con continuità ai valori al contorno nulli sulla circonferenza C_α;

3) è limitata nel dominio chiuso $K_\alpha + C_\alpha$ ($|w| < A$).

Costruiamo, così come per la dimostrazione del teorema precedente (n. 4), una funzione armonica non negativa

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{\alpha}{r},$$

dove ε è un numero positivo qualsiasi, α il raggio del cerchio K_α e r la distanza fra il punto in esame M e il punto di discontinuità P.

Costruiamo un cerchio K_δ di centro nel punto P e raggio δ in modo tale che sulla circonferenza il valore U superi A, e consideriamo il dominio $K_\alpha - K_\delta$. La funzione w è continua nel dominio chiuso $\delta \leqslant r \leqslant \alpha$, e sulla frontiera di questo dominio si veri-

*) L'esistenza di tale funzione verrà stabilita nel § 3, dove la sua costruzione non è basata sul teorema che qui dimostriamo.

fica la disuguaglianza $|w| \leqslant U$. In virtù del principio del valore massimo, la funzione non negativa U è maggiorante per la funzione w

$$|w| \leqslant U(M) \quad \text{per} \quad \delta \leqslant r \leqslant \alpha.$$

Fissando nel dominio K_α un punto qualsiasi M non coincidente con P e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0,$$

cioè ovunque, tranne, eventualmente, nel punto P, si ha

$$w = 0.$$

In tal modo la funzione u coincide con la funzione v ovunque nel dominio S, ad eccezione del punto P. Ponendo $u(P) = v(P)$, otteniamo una funzione $u \equiv v$ che è armonica ovunque nell'interno del dominio S. Il teorema è così dimostrato.

Il teorema si dimostra analogamente nel caso tridimensionale in cui si può considerare quale maggiorante la funzione $U(M) = \varepsilon\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Nel dimostrare il teorema precedente abbiamo supposto che la funzione u fosse limitata nell'intorno del punto P. Tuttavia le stesse considerazioni restano valide supponendo che la funzione u nell'intorno del punto P verifichi la disuguaglianza

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \tag{17}$$

dove $\varepsilon(r)$ è una funzione arbitraria tendente a zero per $r \to 0$, cioè che nell'intorno del punto P la funzione $u(M)$ cresca più lentamente che $\log(1/r_{PM})$.

Dunque, *se $u(M)$ è una funzione armonica nell'interno del dominio S, tranne che nel punto P nel cui intorno essa cresce più lentamente che* $\log(1/r_{MP})$ *quando $M \to P$, allora questa funzione è limitata nell'intorno del punto P e si può definire il valore $u(P)$ in modo tale che u sia una funzione armonica in tutto il dominio S.*

Analogamente nel caso di tre variabili indipendenti: *se una funzione armonica $u(M)$ cresce nell'intorno di un punto singolare isolato P più lentamente che $1/r$,*

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \begin{pmatrix} \varepsilon(r) \to 0 \\ r \to 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

essa è limitata nell'intorno di questo punto e si può definire il valore $u(P)$ in modo tale che la funzione $u(M)$ sia armonica anche nel punto stesso P.

6. Regolarità di una funzione armonica di tre variabili all'infinito. Una funzione armonica di tre variabili $u(x, y, z)$ si dice regolare all'infinito se

$$|u| < \frac{A}{r} \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2} \tag{19}$$

per $r \geqslant r_0$ sufficientemente grande.

Dimostriamo che se la funzione $u(x, y, z)$ è armonica all'esterno di una superficie chiusa Σ e tende uniformemente a zero all'infinito, allora è regolare all'infinito.

La condizione di convergenza uniforme a zero all'infinito significa che esiste una funzione $\varepsilon^*(r)$ tale che

$$|u(M)| < \varepsilon^*(r) \quad (\varepsilon^*(r) \to 0 \quad \text{per} \quad r \to \infty), \tag{20}$$

dove r è il raggio vettore del punto M.

Eseguendo la trasformazione di Kelvin

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi),$$

dove

$$r' = \frac{1}{r},$$

otteniamo che la funzione v è armonica ovunque nell'interno della superficie Σ' nella quale si trasforma la superficie Σ per trasformazione per raggi vettori reciproci, ad eccezione dell'origine delle coordinate in cui la funzione ha un punto singolare isolato.

Dalla condizione (20) segue che nell'intorno dell'origine delle coordinate, per la funzione v si verifica la disuguaglianza

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{1}{r'} = \varepsilon(r')\frac{1}{r'},$$

dove

$$\varepsilon(r') = \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right) \to 0 \quad \text{per} \quad r' \to 0.$$

In base all'ultimo teorema del n. 5 la funzione $v(r', \theta, \varphi)$ è limitata ed armonica per $r' \leqslant r_0'$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant A \quad \text{per} \quad r' \leqslant r_0', \tag{21}$$

da cui segue che

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leqslant \frac{A}{r} \quad \text{per} \quad r \geqslant r_0 = \frac{1}{r_0'}.$$

In virtù dell'armonicità della funzione v per $r' = 0$ si può scrivere

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} \cdot v(x', y', z')\right) =$$

$$= -\frac{x}{r^3} \cdot v + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x}\right], \tag{22}$$

dove

$$x' = \frac{x}{r} r', \quad y' = \frac{y}{r} r', \quad z' = \frac{z}{r} r'.$$

Di qui, calcolando le derivate $\frac{\partial x'}{\partial x}$, $\frac{\partial y'}{\partial x}$, $\frac{\partial z'}{\partial x}$ e tenendo conto della limitatezza delle derivate prime della funzione v nell'intorno del punto $r' = 0$, otteniamo

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leqslant \frac{A}{r^2} \quad \text{per} \quad r \to \infty.$$

Analogamente si stimano le derivate $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$.

7. Problemi ai limiti esterni. Unicità della soluzione per problemi bi- e tridimensionali. L'impostazione dei problemi ai limiti esterni è diversa per il caso di tre o di due variabili indipendenti.

Consideriamo dapprima il caso di tre variabili. Sia T il dominio esterno a una superficie chiusa Σ.

Il *primo problema ai limiti esterno* (problema esterno di Dirichlet) consiste in quanto segue:

si chiede di trovare una funzione $u(x, y, z)$ *soddisfacente alle condizioni seguenti*:

1) $\Delta u = 0$ *nel dominio infinito* T;

2) u *ovunque continua, compresa la superficie* Σ;

3) $u|_\Sigma = f(x, y, z)$, *essendo* f *una funzione data sulla superficie* Σ;

4) $u(M)$ *tende uniformemente a zero all'infinito*: $u(M) \to 0$ *per* $M \to \infty$.

L'ultima condizione è di importanza primaria per l'unicità della soluzione, ci se ne convince facilmente su un esempio semplice. Supponiamo che si debba risolvere il primo problema ai limiti esterno per una sfera S_R di raggio R con la condizione al contorno costante

$$u|_{S_R} = \text{costante} = f_0.$$

Omettendo la condizione 4) vediamo che come soluzione del problema possono servire le funzioni $u_1 = f_0$ e $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$, così come una funzione qualsiasi

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad \text{dove} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Dimostriamo che

il primo problema ai limiti esterno per le funzioni armoniche di tre variabili indipendenti ha un'unica soluzione. Supponendo l'esistenza di due soluzioni u_1 e u_2 soddisfacenti alle condizioni 1)-4), vediamo che la loro differenza $u = u_1 - u_2$ è una soluzione

del problema con condizioni al contorno nulle. Poiché la condizione 4) è soddisfatta anche per la funzione u, per un $\varepsilon > 0$ arbitrario si può trovare R^* tale che

$$|u(M)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad r \geqslant R^*.$$

Se il punto $\bar{M}$ giace all'interno del dominio T' (fig. 47) compreso fra la superficie Σ e la sfera S_r ($r \geqslant R^*$), allora anche $(\bar{M}) < \varepsilon$, come deriva dal principio del valore massimo applicato al dominio T'. Essendo ε arbitrario, concludiamo che $u \equiv 0$ nel dominio T', così come in tutto il dominio T, ciò che dimostra l'unicità della soluzione del primo problema ai limiti esterno nello spazio.

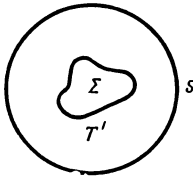


Fig. 47

Il *primo problema ai limiti esterno nel piano* si pone nel seguente modo:

si chiede di definire una funzione soddisfacente alle condizioni:

1) $\Delta u = 0$ *in un dominio infinito considerato* Σ, *delimitato dal contorno* C;

2) *la funzione* u *è ovunque continua compreso il contorno* C;

3) $u|_C = f(x, y)$, *dove* f *è una funzione assegnata su* C;

4) $u(M)$ *è limitata all'infinito, vale a dire che esiste un numero* N *tale che* $|u(M)| \leqslant N$.

La condizione di annullamento all'infinito anche qui risulta sufficiente per dimostrare che due soluzioni distinte non possono esistere, ma essa è troppo forte in modo che il problema può essere in generale non risolto.

Dimostriamo che

il primo problema ai limiti esterno per le funzioni di due variabili ha un'unica soluzione.

Supponendo l'esistenza di due soluzioni distinte u_1, u_2 e considerando la differenza $u = u_1 - u_2$ come soluzione del primo problema ai limiti con condizioni al contorno nulle, in virtù della condizione 4) avremo

$$|u| \leqslant N = N_1 + N_2,$$

dove N_1 e N_2 sono tali che $|u_1| \leqslant N_1$ e $|u_2| \leqslant N_2$. Indichiamo con Σ_1 un dominio giacente all'interno di C come complemento al dominio Σ, cosicché $\Sigma + \Sigma_1$ rappresenta tutto il piano. Consideriamo il punto M_0 interno a Σ_1 e una circonferenza di raggio R e centro nel punto M_0, giacente all'interno di Σ_1 (fig. 48). La funzione armonica $\ln(1/R_{MM_0})$ non ha singolarità nel dominio Σ; la funzione $\ln(R_{MM_0}/R)$ è positiva in tutto il dominio Σ, compreso il contorno C. C_{R_1} sia una circonferenza di raggio R_1 e centro M_0 comprendente interamente il contorno C e Σ', ossia il domi-

nio delimitato dalle curve C e C_{R_1}. La funzione u_{R_1} definita dall'uguaglianza

$$u_{R_1} = N \frac{\ln (R_{MM_0}/R)}{\ln (R_1/R)}, \tag{23}$$

è una funzione armonica uguale a N sulla circonferenza di raggio R_1 e positiva su C; dal principio del valore massimo segue che u_{R_1} è maggiorante per il modulo della funzione $u\ (M)$ nel dominio Σ:

$$|\ u\ (M)\ | < u_{R_1}\ (M).$$

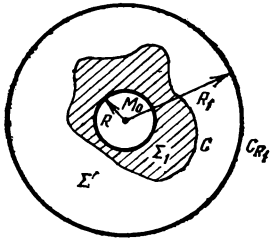


Fig. 48

Fissiamo il punto M e facciamo crescere indefinitamente R_1. È evidente che $u_{R_1}\ (M) \to 0$ per $R_1 \to \infty$. Ne segue

$$u\ (M) = 0.$$

Quindi, essendo M arbitrario, abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione del problema posto. Si può anche dimostrare l'unicità della soluzione di questo problema mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci che trasformano il dominio esterno al contorno C in quello interno al contorno C' in cui si trasforma il contorno C.

In questo caso un punto indefinitamente lontano si trasforma in un punto singolare isolato nel cui intorno la funzione v è limitata. Dal teorema del n. 5 deriva l'armonicità della funzione v nell'origine delle coordinate e, quindi, anche l'unicità della soluzione.

Dalle considerazioni suddette segue che una funzione armonica di due variabili $u\ (M)$, limitata all'infinito, tende a un limite per M tendente all'infinito.

La distinzione fra le impostazioni del primo problema ai limiti esterno per due e tre variabili si può precisare sull'esempio fisico seguente. Supponiamo che sia data una sfera di raggio R sulla superficie della quale si mantiene una temperatura costante u_0, si chiede di definire la distribuzione stazionaria di temperatura nello spazio esterno. La funzione $u = u_0\ (R/r)$ rappresenta la soluzione di questo problema, la quale si annulla all'infinito.

Consideriamo ora il problema bidimensionale e supponiamo che sulla circonferenza di raggio R sia assegnata la condizione al contorno costante

$$u\ |_\Sigma = f_0 = \text{costante}.$$

Allora $u \equiv f_0$ è l'unica soluzione limitata del problema e non esiste nessuna soluzione che si annulla all'infinito. Abbiamo avuto già a che vedere con l'andamento diverso delle funzioni armoniche

di due e tre variabili indipendenti all'infinito (il comportamento di $1/r$ e $\ln 1/r$ all'infinito, per esempio).

Per i domini spaziali e piani illimitati sussiste il principio del valore massimo.

È facile convincersene mediante considerazioni analoghe a quelle applicate alla dimostrazione dei teoremi di unicità. Ne deriva, a sua volta, la dipendenza continua della soluzione dalle condizioni al contorno.

8. **Secondo problema ai limiti. Teorema di unicità.** Chiameremo soluzione del secondo problema ai limiti una funzione u continua nel domito $T + \Sigma$ e soddisfacente sulla superficie Σ alla condizione

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f_1(M).$$

Dimostriamo che *la soluzione del secondo problema ai limiti interno (problema interno di Neumann) è definita a meno di una costante qualsiasi.*

Per la dimostrazione supponiamo inoltre che la funzione u abbia le derivate prime continue nel dominio $T + \Sigma$ *).

u_1 e u_2 siano due funzioni derivabili con continuità in $T + \Sigma$, le quali verificano l'equazione $\Delta u = 0$ in T e la condizione $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M)$ su Σ. Per la funzione $u = u_1 - u_2$ avremo

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Ponendo nella prima formula di Green (3) $v = u$ e tenendo conto delle relazioni $\Delta u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$, otteniamo

$$\iiint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

Di qui, in virtù della continuità della funzione u e delle sue derivate prime, segue

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0, \quad \text{cioè} \quad u \equiv \text{costante},$$

come dovevasi dimostrare.

Il metodo di dimostrazione esposto è applicabile anche al caso di un dominio illimitato per funzioni soddisfacenti alle condizioni di regolarità all'infinito.

---

*) L'ipotesi circa la continuità delle derivate prime in $T + \Sigma$ è avanzata qui per rendere più facile la dimostrazione. La dimostrazione dell'unicità sotto ipotesi più generali è stata data da M. V. Keldyš e M. A. Lavrentjev (Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS, vol. XVI, 1937); si veda anche V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. IV, Editori Riuniti, 1979.

Mostriamo che nel caso di un dominio illimitato, esterno a una superficie chiusa, la formula di Green (3) è applicabile alle funzioni regolari all'infinito.

Consideriamo il dominio T, esterno a una superficie chiusa. Tracciamo una sfera Σ_R di raggio R così grande che Σ_R compren-

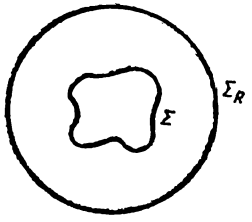


Fig. 49

da Σ. Indichiamo con T_R il dominio delimitato da Σ e Σ_R (fig. 49). Applicando nel dominio T_R la formula di Green a due funzioni u e v, regolari all'infinito, otteniamo

$$\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = -\iiint_{T_R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\tau+$$

$$+\iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma+\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (24)$$

Stimiamo l'integrale su Σ_R usando la proprietà di regolarità delle funzioni u e v:

$$\left|\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma\right| = \left|\iint_{\Sigma_R} u\,(v_x\cos\alpha+v_y\cos\beta+\right.$$

$$\left.+v_z\cos\gamma)\,d\sigma\right| \leqslant \left|\iint_{\Sigma_R}\frac{A}{R}\cdot\frac{3A}{R^2}d\sigma\right| \leqslant \frac{3A^2}{R^3}\,4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Si vede di qui che

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

L'integrale su T_R che figura a secondo membro della formula (24) tende all'integrale esteso a tutto il dominio T per $R\to\infty$. Questo integrale esiste poiché l'espressione integranda, in virtù della regolarità delle funzioni u e v, si annulla all'infinito come $1/R^4$. Quindi esiste il limite

$$\lim_{R\to\infty}\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = \iiint_{T} u\,\Delta v\,d\tau.$$

Come risultato otteniamo la formula

$$\iiint_T u\,\Delta v\,d\tau = -\iiint_T \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \tag{25}$$

Abbiamo stabilito così l'applicabilità della prima e, quindi, della seconda formula di Green alle funzioni regolari all'infinito per i domini illimitati.

Mostriamo ora che *il secondo problema ai limiti esterno (problema esterno di Neumann) ammette un'unica soluzione regolare all'infinito.*

Ponendo nella formula (25) $v = u = u_1 - u_2$ e tenendo conto che $\Delta u = 0$ e $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$, otteniamo

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,d\tau = 0.$$

Di qui, in virtù della continuità delle derivate della funzione u, segue

$u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ e $u \equiv$ costante.

Siccome $u = 0$ all'infinito, allora

$u \equiv 0$, cioè $u_1 \equiv u_2$,

come dovevasi dimostrare.

È naturale la questione: è possibile dimostrare con lo stesso metodo l'unicità del primo problema ai limiti?

u_1 e u_2 siano due soluzioni distinte del primo problema ai limiti (interno). Applichiamo la formula (3) alle funzioni $u = u_1 - u_2$ e $v = u$ nel dominio T limitato dalla superficie Σ:

$$\iiint_T u\,\Delta u\,d\tau = -\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma.$$

Di qui, tenendo conto delle condizioni

$\Delta u = 0$, $u \mid_\Sigma = 0$,

otteniamo

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,d\tau = 0$$

e, di conseguenza,

$u_x = u_y = u_z = 0$ e $u =$ costante.

Sulla superficie Σ la funzione u è nulla, perciò possiamo affermare che

$u \equiv 0$ e $u_1 \equiv u_2$.

Tuttavia questa dimostrazione non è corretta in quanto nel corso della dimostrazione abbiamo supposto l'esistenza di derivate della funzione cercata sulla superficie Σ, ciò che non è previsto dall'impostazione stessa del problema. La dimostrazione dell'unicità basata sul principio del valore massimo è esente da questo difetto.

§ 3. Risoluzione dei problemi ai limiti per domini elementari con il metodo di separazione delle variabili

La soluzione dei problemi ai limiti per le equazioni di Laplace può essere trovata con il metodo di separazione delle variabili nel caso di alcuni domini elementari (cerchio, rettangolo, sfera, cilindro ecc.). In questo caso si ottengono problemi agli autovalori (problemi di Sturm-Liouville) che conducono a classi diverse di funzioni speciali. In questo paragrafo studieremo i problemi di Dirichlet (interno ed esterno) per la cui risoluzione servono unicamente funzioni trigonometriche. Nel seguito, studiando le funzioni speciali, considereremo problemi di Dirichlet per sfera e cilindro.

1. Primo problema ai limiti per un cerchio. Risolviamo il primo problema ai limiti per un cerchio:

trovare una funzione u che verifichi l'equazione

$$\Delta u = 0 \quad \textit{all'interno del cerchio} \tag{1}$$

con la condizione al contorno

$$u = f \quad \textit{sulla frontiera del cerchio,} \tag{2}$$

dove f è una funzione data.

Supponiamo dapprima che la funzione f sia continua e derivabile e che la soluzione $u(M)$ sia continua nel dominio chiuso; nel seguito faremo a meno della condizione di derivabilità e persino di continuità della funzione f (cfr. n. 4, § 2). Accanto al problema ai limiti interno studieremo anche quello esterno (si veda il § 2, n. 7).

Introduciamo il sistema di coordinate polari (ρ, φ) avente come origine il centro del cerchio. L'equazione (1) nelle coordinate polari diventa

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{3}$$

(si veda la formula (34) del § 1). Risolveremo il problema con il metodo di separazione delle variabili, cercando cioè una soluzione dell'equazione (1) sotto la forma

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$$

Sostituendo la forma presunta della soluzione nell'equazione (3), avremo

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

dove λ = costante. Di qui ricaviamo due equazioni

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \not\equiv 0, \tag{4}$$

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0, \quad R \not\equiv 0. \tag{5}$$

La prima di queste equazioni dà

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda}\,\varphi + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\,\varphi.$$

Osserviamo che al variare dell'angolo φ di 2π la funzione monodroma $u(\rho, \varphi)$ deve tornare al valore iniziale

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi) \quad \text{(condizione di periodicità)}.$$

Ne segue che $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, vale a dire $\Phi(\varphi)$ è una funzione periodica dell'angolo φ di periodo 2π. Ciò è possibile alla sola condizione che $\sqrt{\lambda} = n$, dove n è un intero, e

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi.$$

Cercheremo la funzione $R(\rho)$ sotto la forma $R(\rho) = \rho^{\mu}$. Sostituendo nell'equazione (5) e dividendo per ρ^{μ}, troviamo

$$n^2 = \mu^2 \quad \text{oppure} \quad \mu = \pm n \quad (n > 0).$$

Di conseguenza,

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

dove C e D sono due costanti.

Per risolvere il problema interno occorre porre $R = C\rho^n$ ($\mu = n$), cosicché se $D \neq 0$ la funzione $u = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ diventa infinita per $\rho = 0$ e non è più armonica all'interno del cerchio. Per risolvere il problema esterno, al contrario, si deve porre $R = D\rho^{-n}$ ($\mu = -n$), poiché la soluzione del problema esterno può essere limitata all'infinito.

Dunque, abbiamo trovato le seguenti soluzioni parziali del problema in esame *):

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \quad \text{per} \quad \rho \leqslant a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \quad \text{per} \quad \rho \geqslant a.$$

Le somme di queste soluzioni sono

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \text{ per il problema interno,}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \text{ per il problema esterno}$$

e per una convergenza sufficientemente buona saranno anch'esse funzioni armoniche.

Per determinare i coefficienti A_n e B_n usiamo la condizione al contorno

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) = f. \tag{6}$$

Considerando f come funzione data dell'angolo φ, sviluppiamola in serie di Fourier

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \operatorname{sen} n\varphi), \tag{7}$$

dove

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi\, d\psi \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \operatorname{sen} n\psi\, d\psi \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

*) L'espressione dell'operatore di Laplace nel sistema di coordinate polari (3) per $\rho = 0$ non ha senso. Dimostriamo che $\Delta u_n = 0$ anche per $\rho = 0$. Ma per dimostrarlo non possiamo più ricorrere al sistema di coordinate polari.

Passiamo al sistema di coordinate cartesiane; le soluzioni parziali

$\rho^n \cos n\varphi$ e $\rho^n \operatorname{sen} n\varphi$,

essendo le parti reale ed immaginaria della funzione

$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n$,

sono polinomi in x e y. È evidente che un polinomio soddisfacente all'equazione $\Delta u = 0$ per $\rho > 0$, in virtù della continuità delle derivate seconde, verifica la stessa equazione per $\rho = 0$.

Confrontando le serie (6) a (7), avremo

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \quad \text{per il problema interno,}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \quad \text{per il problema esterno.}$$

Abbiamo ottenuto così una soluzione formale del primo problema interno per il cerchio sotto forma di serie

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \operatorname{sen} n\varphi), \tag{8}$$

e una soluzione del problema esterno nella forma

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \operatorname{sen} n\varphi). \tag{9}$$

Per convincersi che le funzioni ottenute rappresentano effettivamente le soluzioni cercate, bisogna convincersi dell'applicabilità del principio di sovrapposizione per cui si deve dimostrare la convergenza delle serie, la possibilità di derivarle termine a termine e dimostrare anche la continuità di queste funzioni sulla frontiera del cerchio. Le due serie si possono rappresentare con la sola formula

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \operatorname{sen} n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

dove

$$t = \begin{cases} \dfrac{\rho}{a} \leqslant 1 & \text{per} \quad \rho \leqslant a \text{ (problema interno),} \\ \dfrac{a}{\rho} \leqslant 1 & \text{per} \quad \rho \geqslant a \text{ (problema esterno),} \end{cases}$$

α_n, β_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(\varphi)$.

Dimostriamo che le serie (8) e (9) si possono derivare un qualsiasi numero di volte per $t < 1$. Sia

$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \operatorname{sen} n\varphi)$.

Calcoliamo la k-esima derivata della funzione u_n rispetto a φ:

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Di qui stimiamo

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k}\right| \leqslant t^n n^k 2M,$$

dove M indica il massimo modulo dei coefficienti di Fourier α_n e β_n:

$$|\alpha_n| < M, \quad |\beta_n| < M. \tag{10}$$

Fissiamo alcuni valori $\rho_0 < a$ (per il problema interno) o $\rho_1 = a^2/\rho_0 > a$ (per il problema esterno); allora $t_0 = \rho_0/a < 1$. Considerando la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \quad (t \leqslant t_0),$$

vediamo che essa converge uniformemente per $t \leqslant t_0 < 1$ quale che sia k. Pertanto le serie (8) e (9) si possono derivare rispetto a φ in ogni punto interno (esterno) al cerchio per un numero qualsiasi di volte. Si dimostra analogamente che si possono derivare rispetto alla variabile ρ le serie (8) e (9) un numero qualsiasi di volte all'interno (all'esterno) del cerchio di raggio $\rho_0 < a$ ($\rho_1 > a$).

Essendo arbitrario ρ_0, concludiamo che le serie (8) e (9) sono derivabili termine a termine in ogni punto interno (esterno) al cerchio. Dalla possibilità di derivare termine a termine segue l'applicabilità del principio di sovrapposizione. Abbiamo dimostrato quindi che le funzioni (8) e (9) verificano l'equazione $\Delta u = 0$ *).

Per questa dimostrazione ci siamo serviti della sola proprietà della funzione $f(\varphi)$ di avere i coefficienti di Fourier limitati (formula (10)). Ciò è vero per ogni funzione limitata (e persino per ogni funzione assolutamente integrabile). In tal modo, le serie (8) e (9) corrispondenti a ogni funzione limitata definiscono funzioni che verificano l'equazione

$$\Delta u = 0 \quad \text{per} \quad t < 1.$$

Ci serviremo più avanti di questa osservazione per generalizzare i risultati ottenuti nel presente numero.

Passiamo ora alla dimostrazione della continuità di una funzione in un dominio chiuso ($t \leqslant 1$). È ovvio che ciò è impossibile senza informazioni più dettagliate riguardanti la funzione $f(\varphi)$.

Dalle continuità e derivabilità supposte della funzione $f(\varphi)$ segue la sviluppabilità in serie di Fourier, come anche la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \tag{11}$$

*) Questa equazione si verifica anche per $\rho = 0$; infatti, esprimendo le derivate rispetto alle coordinate cartesiane in funzione delle derivate rispetto alle coordinate polari, è facile vedere che, per $t \leqslant t_0$, le funzioni (8) e (9) si possono derivare a piacere rispetto a x e y. Ne segue, in virtù della nota alla pag. 317, che

$$\Delta u = 0 \quad \text{per} \quad \rho = 0.$$

D'altra parte, abbiamo

$$| t^n\alpha_n \cos n\varphi | \leqslant | \alpha_n |, \quad | t^n\beta_n \operatorname{sen} n\varphi | \leqslant | \beta_n |.$$

Pertanto le serie (8) e (9) sono uniformemente convergenti per $t \leqslant 1$ e, quindi, le funzioni da esse rappresentate sono continue sulla frontiera del cerchio. Si vede dalla formula (11) che la funzione (9) ottenuta per il problema esterno è limitata all'infinito.

Abbiamo stabilito quindi che le serie (8) e (9) soddisfanno a tutte le condizioni dei problemi in esame.

2. Integrale di Poisson. Riduciamo ora le espressioni (8) e (9) a una forma più semplice. Per fissare le idee, consideriamo il problema interno e per quello esterno scriveremo il risultato per analogia.

Sostituendo le espressioni dei coefficienti di Fourier nella formula (8) e scambiando l'ordine di sommatoria e di integrazione, avremo

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} n\psi \operatorname{sen} n\varphi) \right\} d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \qquad (12)$$

Effettuiamo le trasformazioni identiche seguenti:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(te^{i(\varphi-\psi)})^n + (te^{-i(\varphi-\psi)})^n] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1 - te^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1 - te^{-i(\varphi-\psi)}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\varphi - \psi) + t^2} \quad \left(t = \frac{\rho}{a} < 1\right).$$

Sostituendo i risultati ottenuti nell'uguaglianza (12), otteniamo

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi. \qquad (13)$$

La formula così ottenuta, che dà la soluzione del primo problema ai limiti all'interno del cerchio, si chiama *integrale di Poisson*, e l'espressione integranda

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

si dice *nucleo di Poisson*. È da notare che $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$ per $\rho < a$ poiché $2a\rho < a^2 + \rho^2$ se $\rho \neq a$.

Abbiamo dedotto l'integrale di Poisson partendo dall'ipotesi $\rho < a$; per $\rho = a$ la rappresentazione (13) perde senso. Tuttavia

$$\lim_{\substack{\rho \to a \\ \varphi \to \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0),$$

poiché la serie dalla quale è stato dedotto l'integrale di Poisson è una funzione continua in un dominio chiuso.

La funzione definita dalla formula

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & \text{per } \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{per } \rho = a, \end{cases} \quad (13')$$

verifica l'equazione $\Delta u = 0$ per $\rho < a$ ed è continua nel dominio chiuso, compresa la circonferenza $\rho = a$.

È evidente che la soluzione del problema ai limiti esterno ha la forma

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & \text{per } \rho > a, \\ f(\varphi) & \text{per } \rho = a. \end{cases} \quad (14)$$

Fin dall'inizio abbiamo supposto che la funzione $f(\varphi)$ sia continua e derivabile; partendo da questa ipotesi, abbiamo dimostrato che la soluzione del problema si può rappresentare sotto forma di serie infinita. Nel seguito, mediante le trasformazioni identiche siamo passati dalla serie all'integrale di Poisson.

Dimostriamo ora che *l'integrale di Poisson dà la soluzione del primo problema ai limiti anche nel caso in cui la funzione* $f(\varphi)$ *è soltanto continua.*

L'integrale di Poisson rappresenta la soluzione dell'equazione di Laplace per una funzione limitata qualsiasi $f(\varphi)$ nel caso in cui $\rho < a$ $(t < 1)$. Infatti, per $\rho < a$ $(t < 1)$ l'integrale di Poisson è identico alla serie (8) e, in virtù dell'osservazione di pag. 319, verifica l'equazione $\Delta u = 0$ qualunque sia la funzione limitata $f(\varphi)$.

Quindi, ci resta da dimostrare che la funzione u nel caso considerato è tangente con continuità ai valori al contorno. Consideriamo una successione di funzioni derivabili continue

$$f_1(\varphi), \quad f_2(\varphi), \quad \ldots, \quad f_k(\varphi), \quad \ldots,$$

che converge iniformemente alla funzione $f(\varphi)$ *):

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

Alla successione di funzioni di frontiera corrisponderà una successione di funzioni armoniche $u_k(\rho, \varphi)$ definite dalla formula (13) o dalla (8). La convergenza uniforme della successione $\{f_k(\varphi)\}$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare $k_0(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \text{ per } k > k_0(\varepsilon), \quad l > 0.$$

Per le funzioni $u_k(r, \varphi)$ rappresentanti le soluzioni del primo problema ai limiti avremo, in virtù del principio del valore massimo:

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$

per $\rho \leqslant \rho_0$ se $k > k_0(\varepsilon)$, $l > 0$.

Quindi, la successione $\{u_k\}$ converge uniformemente a una funzione $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$. La funzione limite $u(\rho, \varphi)$ è continua nel dominio chiuso poiché tutte le funzioni u_k rappresentabili dall'integrale

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} f_k(\psi)\, d\psi,$$

sono continue nel dominio chiuso. È evidente che

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k\to\infty} u_k(\rho, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2} f(\psi)\, d\psi & \text{per} \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{per} \quad \rho = a, \end{cases}$$

poiché la successione $\{f_k\}$ converge uniformemente a f e, perciò, il passaggio al limite sotto il segno d'integrale è legittimo.

In tal modo, la funzione

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi)\, d\psi,$$

*) Non ci soffermeremo su come ottenerla. Questa successione può essere costruita in diversi modi.

qualunque sia la funzione continua $f(\varphi)$, è una soluzione dell'equazione di Laplace che tende con continuità sulla frontiera del cerchio ai valori dati.

3. Caso di valori al contorno discontinui. Dimostriamo che le formule (13′) e (14) danno la soluzione del problema ai limiti per una funzione continua a tratti qualsiasi $f(\varphi)$, cioè che questa soluzione è limitata in tutto il dominio e tende con continuità ai valori al contorno nei punti di continuità della funzione $f(\varphi)$, rappresentando così l'unica soluzione che gode di questa proprietà (cfr. § 2, n. 4). Sia φ_0 punto di continuità della funzione $f(\varphi)$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si trova $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon,$$

se

$$|\rho - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{e} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon).$$

Essendo la funzione $f(\varphi)$ continua, esiste $\delta_0(\varepsilon)$ tale che

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{se} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon).$$

Consideriamo le funzioni continue e derivabili ausiliarie $\overline{f(\varphi)}$ e $\underline{f(\varphi)}$ che soddisfanno alle condizioni seguenti:

$$\overline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon),$$

$$\overline{f(\varphi)} \geqslant f(\varphi) \qquad \text{per } |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon)$$

e

$$\underline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon),$$

$$\underline{f(\varphi)} \leqslant f(\varphi) \qquad \text{per} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon),$$

e per il resto sono arbitrarie. Se per $\overline{f}$ e $\underline{f}$ definiamo mediante la formula (13) le funzioni $\overline{u}(\rho, \varphi)$ e $\underline{u}(\rho, \varphi)$, quest'ultime saranno funzioni armoniche tendenti con continuità a $\overline{f}(\varphi)$ e $\underline{f}(\varphi)$.

Poiché il nucleo di Poisson è positivo, abbiamo

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \overline{u}(\rho, \varphi),$$

in quanto

$$\underline{f}(\varphi) \leqslant f(\varphi) \leqslant \overline{f}(\varphi).$$

Dalla continuità delle funzioni $\overline{u}(\rho, \varphi)$ ed $\underline{u}(\rho, \varphi)$ sulla frontiera per $\varphi = \varphi_0$ segue l'esistenza di $\delta_1(\varepsilon)$ tale che

$$|\overline{u}(\rho, \varphi) - \overline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } |\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon)$$

e

$$|\underline{u}(\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } |\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon).$$

Da queste disuguaglianze ricaviamo

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(\rho, \varphi) &\leqslant \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon = \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{per} \quad \begin{aligned} &|\rho - a| < \delta(\varepsilon), \\ &|\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

dove $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

Confrontando le disuguaglianze ottenute troviamo

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi) \leqslant f(\varphi_0) + \varepsilon$$

ossia

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon \text{ per } \begin{aligned} &|a - \rho| < \delta(\varepsilon), \\ &|\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

ciò che dimostra la continuità di $u(\rho, \varphi)$ nel punto (a, φ_0).

La limitatezza della funzione $u(\rho, \varphi)$ è dovuta al fatto che, essendo positivo il nucleo di Poisson, si ha

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi)}\, d\psi = M,$$

se $|f(\varphi)| < M$. L'integrale, invece, vale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)\, d\psi}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} \equiv 1,$$

poiché in virtù di quanto dimostrato prima il primo membro rappresenta una funzione armonica tendente con continuità ai valori al contorno $f \equiv 1$, e questa funzione è uguale identicamente a 1. Analogamente, $u(\rho, \varphi) > M_1$ se $f > M_1$, ciò che dimostra la limitatezza del modulo della funzione $u(\rho, \varphi)$.

§ 4. Funzione di sorgente

Il metodo della funzione di sorgente fornisce un apparato comodo per la rappresentazione analitica della soluzione dei problemi ai limiti.

Nel presente paragrafo verranno date la definizione e le proprietà fondamentali della funzione di sorgente per l'equazione di Laplace e saranno costruite anche funzioni di sorgente per alcuni domini elementari (cerchio, sfera, semispazio). Questa costruzione sarà eseguita con il metodo delle immagini elettrostatiche.

1. Funzione di sorgente per l'equazione $\Delta u = 0$ e sue proprietà fondamentali. Per ogni funzione u, continua con le sue derivate prime nel dominio chiuso T delimitato da una superficie suffi-

cientemente liscia Σ, e avente derivate seconde all'interno di T, esiste, come è stato mostrato nel § 2, n. 1, la rappresentazione integrale seguente:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] d\sigma_P -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_{T} \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M. \tag{1}$$

Se la funzione $u(M)$ è armonica, il suo integrale volumetrico è nullo; se, invece, $u(M)$ verifica l'equazione di Poisson, l'integrale volumetrico rappresenta una funzione data.

$v(M)$ sia una funzione armonica, continua con le sue derivate prime in $T + \Sigma$ e non avente singolarità in nessun punto. La seconda formula di Green

$$\iiint_{T} (u \Delta v - v \Delta u) \, d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

dà

$$0 = \iint_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint_{T} v \Delta u \, d\tau. \tag{2}$$

Sommando le espressioni (2) e (1), otteniamo

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma - \iiint_{T} \Delta u \cdot G \, d\tau, \tag{3}$$

dove

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \tag{3'}$$

è una funzione di due punti: $M_0(x, y, z)$ e $M(\xi, \eta, \zeta)$. Il punto M_0 è fissato, e perciò x, y, z fungono da parametri.

La formula (3) contiene $u|_{\Sigma}$ e $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$. Fra l'altro, per la risoluzione del primo problema ai limiti è assegnato il solo valore $u|_{\Sigma}$ e per il secondo problema ai limiti il valore $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}$. La funzione v viene considerata tale che $G|_{\Sigma} = 0$ per il primo problema ai limiti $\left(\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \right.$ per il secondo problema ai limiti$\left.\right)$. Definiamo la funzione $G(M, P)$ mediante le condizioni seguenti:

1. $G(M, P)$ quale funzione del punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ per il punto fissato $M(x, y, z)$ verifica l'equazione di Laplace

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M$$

in tutti i punti P del dominio T, ad eccezione del punto $P = M$.

2. $G(M, P)$ nel caso di coincidenza degli argomenti ($M = P$) diventa infinita ed è rappresentabile sotto la forma (3'), dove $v = v(M, P)$ è una funzione armonica ovunque in T.

3. $G(M, P)$ si annulla sulla frontiera:

$$G(M, P) = 0, \quad \text{se} \quad P \in \Sigma.$$

Si può soddisfare questa condizione chiedendo che

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R}.$$

La funzione G definita in questo modo si chiama *funzione di sorgente puntuale del primo problema ai limiti per l'equazione* $\Delta u = 0$. La funzione di sorgente consente di dare una rappresentazione esplicita della soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione $\Delta u = 0$. Infatti, la formula (3) dà

$$u(M_0) = -\iint_\Sigma u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = -\iint_\Sigma f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (f = u|_\Sigma). \tag{4}$$

Si deve tener presente che l'espressione (4) è ottenuta mediante la formula di Green la quale suppone che sulla superficie Σ siano soddisfatte certe condizioni nei confronti delle funzioni u e G. Nella formula (4) figura l'espressione $\frac{\partial G}{\partial n}$ la cui esistenza sulla superficie Σ non segue immediatamente dalla definizione della funzione G.

Nel dedurre la formula (4) partiamo dal fatto che esiste una funzione armonica u che assume sulla superficie Σ il valore f. Quindi, anche per domini in cui esiste una funzione di sorgente soddisfacente alle condizioni di applicabilità della formula di Green, la formula (4) fornisce la rappresentazione esplicita soltanto di quelle soluzioni u del primo problema ai limiti le quali verificano le condizioni di applicabilità della formula di Green (dimostrando così l'unicità di questa classe di soluzioni del primo problema ai limiti).

Un'indagine dettagliata della formula (4) condotta da A. M. Ljapunov mostrò che per una larga classe di superfici, dette superfici di Ljapunov (si veda il § 5), questa formula rappresenta la soluzione del primo problema ai limiti sotto condizioni assai generali.

Soffermiamoci ancora un po' sulla definizione della funzione G. Essa è definita mediante la funzione v che è soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione

$$\Delta v = 0$$

con valori al contorno

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Può aversi l'impressione che si tratti di un circolo vizioso. Per definire la funzione u (soluzione del primo problema ai limiti) occorre trovare una funzione v, soluzione dello stesso problema. In realtà non esiste nessun circolo vizioso poiché la conoscenza della funzione di sorgente consente di risolvere il primo problema ai limiti con condizioni al contorno arbitrarie ($u \mid_\Sigma = f$), mentre per la ricerca della funzione stessa G è sufficiente risolvere il problema ai limiti per valori al contorno speciali ($v \mid_\Sigma = -1/4\pi R$) il che, come vedremo su alcuni esempi, è molto più semplice.

Nell'interpretazione elettrostatica la funzione di sorgente

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} + v$$

rappresenta il potenziale nel punto M di una carica puntuale *) collocata nel punto M_0 all'interno di una superficie conduttrice Σ messa a terra. Il primo termine $1/4\pi R$ è, evidentemente, il potenziale della carica puntuale nello spazio libero e il secondo v indica il campo di cariche eccitate sulla superficie conduttrice Σ. In tal modo, la costruzione della funzione di sorgente si riduce alla definizione di campo indotto.

Soffermiamoci su alcune proprietà della funzione di sorgente. Supporremo intanto che per i domini considerati esistano funzioni di sorgente aventi derivate normali sulla superficie Σ e soddisfacenti alle condizioni di applicabilità della formula di Green.

I. La funzione di sorgente è ovunque positiva all'interno di T. Infatti, la funzione G si annulla sulla frontiera del dominio Σ ed è positiva sulla superficie di una sfera sufficientemente piccola descritta attorno al polo. Ne segue, in virtù del principio del valore massimo, la sua positività in tutto il dominio. Osserviamo anche che

$$\frac{dG}{dn}\Big|_\Sigma \leqslant 0,$$

ciò che deriva immediatamente dalla positività appena dimostrata e dalla condizione $G \mid_\Sigma = 0$.

*) Nell'interpretazione termica la temperatura stazionaria di una sorgente puntuale di calore di intensità q è data dalla formula

$q/4\pi kr$,

dove k è il coefficiente di conduzione termica. Quindi, la funzione $G(MM_0)$ rappresenta la temperatura del punto M se la temperatura della superficie del corpo è nulla e se nel punto M_0 è collocata una sorgente di calore di intensità $q = k$.

Se l'unità di lunghezza è tale che $k = 1$, la funzione G corrisponde a una sorgente di intensità uguale a 1.

II. La funzione di sorgente è simmetrica rispetto ai suoi argomenti $M_0\,(x,\ y,\ z)$ e $M\,(\xi,\ \eta,\ \zeta)$:

$$G\,(M,\ M_0) = G\,(M_0,\ M).$$

Siano M_0' e M_0'' due punti fissati nel dominio T. Tracciamo due sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio ε e centro nei punti M_0' e M_0'' (fig. 50). Ponendo

$$u\,(M) = G\,(M,\ M_0'), \qquad v\,(M) = G\,(M,\ M_0'')$$

e applicando la formula di Green

$$\iiint_{T_\varepsilon} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \tag{5}$$

al dominio T_ε delimitato dalle superfici Σ, Σ_1 e Σ_2, avremo

$$\iint_{\Sigma_1} \left[G\,(M,\ M_0')\,\frac{\partial G\,(M,\ M_0'')}{\partial n} - G\,(M,\ M_0'')\,\frac{\partial G\,(M,\ M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M +$$

$$+ \iint_{\Sigma_2} \left[G\,(M,\ M_0')\,\frac{\partial G\,(M,\ M_0'')}{\partial n} - G\,(M,\ M_0'')\,\frac{\partial G\,(M,\ M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M = 0,$$

in quanto il primo membro dell'equazione (5) è nullo poiché $\Delta G = 0$ e l'integrale esteso alla superficie Σ è nullo in virtù delle condizioni al contorno. Passando quindi al limite per $\varepsilon \to 0$ e tenendo conto della singolarità della funzione di sorgente, otteniamo *)

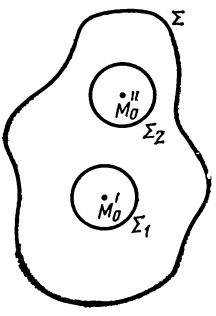


Fig. 50

$$G\,(M_0',\ M_0'') = G\,(M_0'',\ M_0')$$

ossia

$$G\,(M,\ M_0) = G\,(M_0,\ M).$$

La simmetria dimostrata della funzione di sorgente esprime matematicamente il *principio di reciprocità* in fisica: una sorgente collocata nel punto M_0 produce nel punto M la stessa azione prodotta nel punto M_0 da un'altra sorgente collocata nel punto M. Il principio di reciprocità è di carattere assai generale e si riferisce ai campi fisici più disparati (elettromagnetici, elastici ecc.).

Osserviamo, fra l'altro, che dalle proprietà di simmetria deriva quanto segue: per M fissato $u\,(M_0) = G\,(M,\ M_0)$, in quanto funzione delle variabili x, y, z del punto M_0, gode della stessa proprietà della funzione $v\,(M) = G\,(M,\ M_0)$ delle variabili

*) Ljapunov stabilì questo teorema in applicazione alla classe di superfici dette superfici di Ljapunov.

ξ, η, ζ del punto M per M_0 fissato, vale a dire $\Delta_{M_0} G = 0$ per $M \neq M_0$, $G = 0$ per $M_0 \in \Sigma$.

La funzione di sorgente $G(M, M_0)$ nel caso bidimensionale sarà definita, evidentemente, dalle condizioni:

1. $\Delta G = 0$ ovunque nel dominio considerato S, tranne che nel punto $M = M_0$.

2. Nel punto $M = M_0$ la funzione G ha una singolarità della forma

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

3. $G|_C = 0$, dove C è il contorno del dominio S. In questo caso la funzione di sorgente ha la forma

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

dove v è una funzione armonica ovunque, continua, che verifica al contorno la condizione

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

La soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione $\Delta u = 0$ è data, in questo caso, dalla formula

$$u(M_0) = -\int_C f \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (f = u|_C).$$

2. Metodo delle immagini elettrostatiche e della funzione di sorgente per la sfera. Il più frequente metodo di costruzione della funzione di sorgente è il *metodo delle immagini elettrostatiche.* L'idea è che per la costruzione della funzione di sorgente

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$$

il campo indotto v si presenta come campo di cariche collocate all'esterno della superficie Σ e considerate tali da soddisfare la condizione

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Queste cariche sono dette *immagini elettrostatiche* della carica unitaria collocata nel punto M_0, la quale in assenza di superficie Σ crea il potenziale $1/4\pi R$. In numerosi casi la scelta di queste cariche non presenta alcuna difficoltà. Più avanti daremo esempi di costruzione della funzione di sorgente con il metodo delle immagini elettrostatiche.

Dalla rappresentazione delle funzioni di sorgente che verranno ottenute in questi esempi, si vedrà immediatamente la continuità delle derivate prime delle funzioni G sulla superficie Σ.

Come primo esempio consideriamo la funzione di sorgente per una sfera.

Supponiamo che sia data una sfera di raggio R e centro nel punto O per la quale si chiede di trovare la funzione di sorgente.

Collochiamo nel punto M_0 la carica unitaria e separiamo sul raggio passante per M_0 un segmento OM_1 tale che

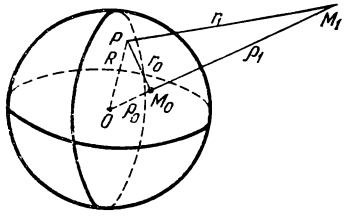


Fig. 51

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{6}$$

dove $\rho_0 = OM_0$ e $\rho_1 = OM_1$ (fig. 51).

La trasformazione (6) che fa corrispondere al punto M_0 il punto M_1 è una trasformazione per raggi reciproci, e il punto stesso M_1 si dice *coniugato* al punto M_0. Questa trasformazione è invertibile, di modo che si può considerare anche il punto M_0 come coniugato al punto M_1.

Dimostriamo che per tutti i punti P appartenenti alla sfera le distanze da M_0 e M_1 sono proporzionali. A tale scopo consideriamo i triangoli OPM_0 e OPM_1 (si veda la fig. 51) che sono simili poiché hanno l'angolo al vertice O comune e i lati proporzionali:

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1} \quad \text{o} \quad \frac{OM_0}{R} = \frac{R}{OM_1}.$$

Dalla similitudine dei triangoli risulta

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}, \tag{7}$$

dove $r_0 = |\overrightarrow{M_0P}|$ e $r_1 = |\overrightarrow{M_1P}|$. Dalla proporzione (7) ricaviamo

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1$$

per tutti i punti della sfera. Perciò la funzione armonica $v = -\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ sulla sfera assume lo stesso valore della funzione $-1/r_0$. Essa rappresenta, evidentemente, il potenziale di una carica di grandezza $-R/\rho_0$ collocata nel punto M_1.

Quindi, la funzione

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right) \tag{8}$$

è la funzione di sorgente cercata per la sfera poiché è una funzione armonica avente in M_0 la singolarità $1/4\pi r_0$ e tende a zero sulla sfera. La soluzione del primo problema ai limiti è data dalla formula (4).

Calcoliamo la derivata

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) - \frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right], \tag{9}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la normale esterna, $r_1 = |\overrightarrow{M_1M}|$ (e M, in generale, non giace sulla sfera).

Le derivate di $1/r_0$ e $1/r_1$ nella direzione $\boldsymbol{n}$ valgono

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) &= \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2}\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})},\\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2}\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

poiché

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos\widehat{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos\widehat{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}. \tag{11}$$

È facile trovare le grandezze $\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}$ e $\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}$:

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})} = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0}, \tag{11'}$$

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})} = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}. \tag{11''}$$

Tenendo conto della proporzione (7) avremo

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}\Big|_\Sigma = \frac{R^2 + \dfrac{R^2}{\rho_0^2}r_0^2 - \dfrac{R^4}{\rho_0^2}}{2R\dfrac{R}{\rho_0}r_0} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0},$$

in modo che $\rho_1 = \dfrac{R^2}{\rho_0}$, per definizione del punto M_1, e $r_1 = \dfrac{R}{\rho_0}r_0$ sulla sfera Σ. Applicando le formule (10) e le espressioni (9), (11′) e (11″), troviamo

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 r_0^2}\frac{R}{\rho_0}\frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3}.$$

Quindi, la funzione $u(M_0)$, in accordo con la formula (4), vale

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_\Sigma f(P)\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3}\,d\sigma_P. \tag{12}$$

Introduciamo un sistema di coordinate sferiche avente come origine il centro della sfera. Siano (R, θ, φ) le coordinate del punto P, e $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ quelle del punto M_0; γ è l'angolo formato dai raggi vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OM_0}$. Allora si può riscrivere la formula (12) nel seguente modo:

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0 \cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi, \qquad (12')$$

dove

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \text{ *}). \qquad (13)$$

Questa formula si dice *integrale di Poisson per la sfera.*

Lo stesso metodo consente di costruire la funzione di sorgente per il dominio esterno alla sfera

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1}\frac{1}{r_0}\right), \qquad (14)$$

dove $r_1 = MM_1$ è la distanza da un punto fisso M_1 non appartenente alla sfera, $r_0 = MM_0$ la distanza dal punto M_0 coniugato a M_1, ρ_1 la distanza fra M_1 e l'origine delle coordinate e R il raggio della sfera.

Tenendo conto che le direzioni delle normali sono diverse per i problemi interno ed esterno, otteniamo

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho_1^2 - R^2}{[R^2 - 2\rho_1 R \cos\gamma + \rho_1^2]^{3/2}} f(\theta, \varphi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

dove $\cos\gamma$ è dato dalla formula (13) nella quale occorre sostituire l'indice 0 con 1.

3. Funzione di sorgente per il cerchio. La funzione di sorgente per un cerchio può essere ottenuta con lo stesso metodo della sfera. In questo caso la funzione si deve cercare sotto la forma

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{r} + v. \qquad (15)$$

Ripetendo le considerazioni precedenti, che ci hanno condotto dalla formula (6) alla formula (8), troviamo la funzione G nella forma

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right], \qquad (16)$$

*) Infatti, i coseni direttori dei vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OM_0}$ valgono (sen θ cos φ, sen θ sen φ, cos θ) e (sen θ_0 cos φ_0, sen θ_0 sen φ_0, cos θ_0), rispettivamente, da cui

$\cos\gamma = \cos\theta \cdot \cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta_0 (\cos\varphi \cos\varphi_0 +$

$+ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_0) = \cos\theta \cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

dove $\rho_0 = OM_0$, $r_0 = M_0P$, $r_1 = M_1P$, $R = OP$ è il raggio del cerchio (fig. 52). È facile concludere che la funzione armonica così definita si annulla sulla frontiera

$G\,|_C = 0$.

Per risolvere il primo problema ai limiti occorre calcolare i valori di $\frac{\partial G}{\partial n}$ sulla circonferenza C. I calcoli sono analoghi a quelli per la sfera e danno

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_C = -\frac{1}{2\pi R}\,\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}.$$

Siano (ρ, θ) le coordinate polari del punto P giacente sulla cir-

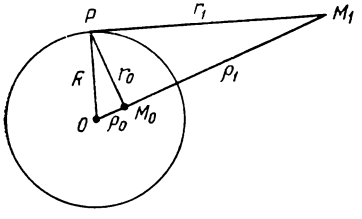


Fig. 52

conferenza e (ρ_0, θ_0) quelle del punto M_0. Allora

$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$.

Sostituendo questa espressione di r_0 nella formula

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(P)\,\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}\,\frac{ds}{R}$$

e tenendo conto che

$u(P)\,|_C = f(\theta)$ e $ds = R\,d\theta$,

troviamo per la funzione $u(M_0)$ la seguente espressione:

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}\,f(\theta)\,d\theta, \qquad (17)$$

detta *integrale di Poisson per il cerchio* (si veda la formula (13) alla pag. 320). La stessa formula dà la soluzione, a meno, del segno, del problema esterno.

4. Funzione di sorgente per il semispazio. La nozione di funzione di sorgente e la formula (4) sono valide anche per uno spazio illimitato se sono in esame funzioni regolari all'infinito (si veda il § 2, n. 6). Definiamo la funzione di sorgente per il semispazio

$z > 0$. Collochiamo nel punto $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ la carica unitaria che crea nello spazio illimitato un campo il cui potenziale è dato dalla funzione

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0M}}, \quad \text{dove} \quad R_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

È facile vedere che il « campo indotto » v è quello della carica unitaria negativa collocata nel punto $M_1\,(x_0, y_0, -z_0)$ rappre-

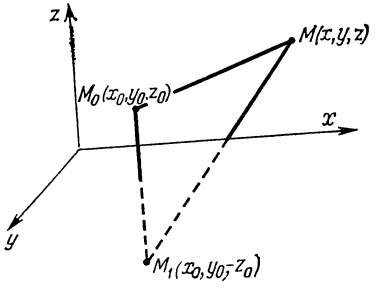


Fig. 53

sentante un'immagine speculare del punto M_0 nel piano $z = 0$ (fig. 53). La funzione G che vale

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_0} - \frac{1}{4\pi R_1},$$

dove

$$R_0 = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$R_1 = |\overrightarrow{M_1M}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

si annulla per $z=0$ ed ha la singolarità richiesta nel punto M_0.

Calcoliamo $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$. È evidente che

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{R_0^3} + \frac{z+z_0}{R_1^3}\right].$$

Ponendo $z=0$, troviamo

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

La soluzione del primo problema ai limiti è data dalla formula

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Sigma_0} \frac{z_0}{R^3_{M_0P}} f(P)\, d\sigma_P,$$

dove Σ_0 è il piano $z = 0$, $f(P) = u|_{z=0}$, ossia

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{18}$$

§ 5. Teoria del potenziale

La funzione $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$ esprimente il potenziale del campo di massa (carica) unitaria collocata nel punto M_0 (ξ, η, ζ) è la soluzione dell'equazione di Laplace, dipendente dai parametri ξ, η, ζ. Integrali di questa funzione rispetto a parametri si chiamano *potenziali* e hanno un'importanza primaria dal punto di vista delle applicazioni dirette in fisica e dal punto di vista dello sviluppo dei metodi di soluzione dei problemi ai limiti.

1. Potenziale volumetrico. Supponiamo che in un certo punto M_0 (ξ, η, ζ) sia collocata una massa m_0. Secondo la legge della gravità universale sulla massa m collocata nel punto $M(x, y, z)$ agisce la forza d'attrazione

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \boldsymbol{r}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}/R$ è il vettore unità nella direzione $\overrightarrow{M_0M}$ $(R = \overrightarrow{M_0M})$, γ è la costante di gravità. Considerando un sistema di unità tale che $\gamma = 1$ e ponendo $m = 1$, abbiamo

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m_0}{R^2} \boldsymbol{r}.$$

Le proiezioni di questa forza sugli assi coordinati sono

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha = -\frac{m_0}{R^3}(x-\xi), \\ Y &= F\cos\beta = -\frac{m_0}{R^3}(y-\eta), \\ Z &= F\cos\gamma = -\frac{m_0}{R^3}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove α, β e γ sono gli angoli formati dal vettore $\boldsymbol{F}$ con gli assi coordinati.

Introduciamo la funzione u, detta *potenziale del campo di forze* *) e definita dall'uguaglianza

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$$

ossia

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Nel caso considerato abbiamo

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

Il potenziale del campo di n punti materiali sarà espresso, in seguito alla sovrapposizione dei campi di forza, dalla formula

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{R_i}.$$

Passiamo al caso di una distribuzione continua della massa. Sia dato un corpo T di densità $\rho\ (\xi, \eta, \zeta)$. Definiamo il potenziale di questo corpo nel punto $M\ (x, y, z)$ e dividiamo a tale scopo il corpo T in parti sufficientemente piccole $\Delta\tau$. Supponiamo, naturalmente, che l'azione dell'elemento $\Delta\tau$ sia equivalente all'azione della sua massa concentrata in un « punto intermedio »**) del volume $\Delta\tau$; allora per la componente della forza agente sul punto M avremo la seguente espressione:

$$\Delta X = -\frac{\rho\,\Delta\tau}{R^3}(x-\xi), \quad \text{dove} \quad R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

L'integrazione su tutto il volume T dà la componente della forza d'attrazione totale del punto M da parte del corpo T

$$X = -\int\int\int_T \rho \frac{x-\xi}{R^3}\, d\tau. \tag{3}$$

Il potenziale nel punto M sarà definito dalla formula

$$u(M) = \int\int\int_T \rho \frac{1}{R}\, d\tau. \tag{4}$$

---

*) Non bisogna confondere potenziale con energia potenziale di un campo di forze. Il termine potenziale è qui usato nello stesso senso di *funzione di forza* in meccanica.

**) In questo caso si suppone con maggiore approssimazione che l'azione di un corpo T di massa m su un punto giacente all'esterno del volume convesso $\overline{T}$, contenente il detto corpo, si possa sostituire con l'azione di un centro della stessa massa m giacente all'interno del volume $\overline{T}$.

Se il punto M giace all'esterno del corpo, ci se ne può convincere derivando direttamente sotto il segno di integrale *). Analogamente si calcolano le derivate di ordine superiore. È evidente che il potenziale $u(M)$ all'esterno del corpo T verifica l'equazione di Laplace (si veda più in dettaglio la pag. 347). Nel seguito, non proponendoci di costruire una teoria sotto le condizioni più generali, ci serviremo delle suddette proprietà dei potenziali e formuleremo alcuni teoremi partendo dall'ipotesi che ρ sia una funzione limitata (e, s'intende, integrabile).

Se il punto M giace all'interno del dominio T, allora non si può affermare che $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ senza un'indagine supplementare che verrà condotta più avanti.

2. Problema piano. Potenziale logaritmico. Consideriamo una distribuzione di masse nello spazio, dipendente unicamente da due coordinate (x, y). In qualsiasi piano $z =$ costante il potenziale assume, evidentemente, il medesimo valore; perciò è sufficiente esaminare il potenziale del punto (x, y) appartenente al piano $z = 0$.

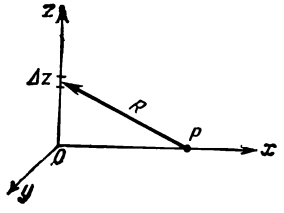


Fig. 54

Definiamo il potenziale della retta omogenea infinita L. Indirizziamo l'asse z lungo questa retta. Supponiamo che la densità lineare (cioè la massa per unità di lunghezza) sia μ. La forza d'attrazione del punto $P(x, 0)$ da parte dell'elemento Δz (fig. 54) e la sua componente lungo l'asse x valgono, rispettivamente,

$$\Delta F = -\frac{\mu \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu \Delta z}{(x^2+z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F \cos\alpha = -\mu \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}.$$

Di qui

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2+z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, d\alpha = -\frac{2\mu}{x}$$

$(z/x = \operatorname{tg}\alpha)$.

*) Per poter derivare un integrale della forma

$$f(M) = \int_T F(M, P)\, \varphi(P)\, d\tau_P$$

dipendente da un parametro sotto il segno di integrale è sufficiente che la derivata della funzione $F(M, P)$ rispetto al parametro sia continua e la funzione $\varphi(P)$ assolutamente integrabile. Di solito, questo teorema viene formulato per $\varphi(P) \equiv 1$. La sua dimostrazione nel caso in esame non differisce da quella usuale.

Se $P\,(x,\ y)$ è un punto arbitrario, la forza d'attrazione del punto da parte della retta L sarà diretta, evidentemente, lungo $\overrightarrow{OP}$ e di grandezza uguale a

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

dove

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il potenziale di questa forza si dice *logaritmico* e vale

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}, \tag{5}$$

come è facile provare con una derivazione diretta.

Il potenziale logaritmico rappresenta la soluzione dell'equazione di Laplace in due variabili indipendenti, che gode di sim-

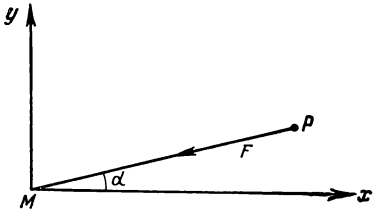


Fig. 55

metria circolare intorno al polo nel punto $\rho = 0$ in cui esso diventa infinito.

In tal modo il potenziale della retta omogenea dà un campo piano e si esprime mediante la formula (5). La rappresentazione del potenziale sotto forma di integrale è stata dedotta unicamente per volumi limitati *). È da notare che a differenza del potenziale volumetrico quello logaritmico non si annulla all'infinito, bensì vi assume una singolarità logaritmica.

---

*) Calcolando il potenziale della retta infinita era impossibile integrare direttamente i potenziali degli elementi separati, poiché in questo caso si ottiene un integrale divergente. Infatti, il potenziale dell'elemento Δz vale

$$\Delta u = \mu \frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Un'integrazione formale dà l'integrale divergente

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Calcoliamo ora le componenti della forza d'attrazione del punto P (fig. 55)

$$X = F\cos\alpha = -2\mu\frac{x}{\rho^2} \quad \left(\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\right),$$

$$Y = F\,\mathrm{sen}\,\alpha = -2\mu\frac{y}{\rho^2} \quad \left(\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{y}{\rho}\right).$$

Se esistono più punti (rette infinite lungo le quali è distribuita la massa), allora, in virtù del principio di sovrapposizione dei

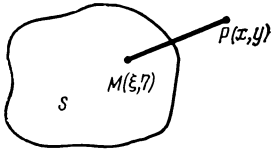


Fig. 56

campi di forza, i potenziali dei punti (delle rette) verranno sommati.

Nel caso di un dominio S con densità $\mu(\xi, \eta)$ distribuita con continuità *) (fig. 56), le componenti della forza d'attrazione del punto P saranno espresse dagli integrali doppi:

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\int\!\!\int_S \mu(\xi,\eta)\,\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta, \\ Y &= -2\int\!\!\int_S \mu(\xi,\eta)\,\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

e il potenziale sarà uguale a

$$u(x, y) = 2\int\!\!\int_S \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta, \tag{7}$$

come è facile provare con una derivazione, per i punti esterni a S Se, invece, il punto P giace nel dominio S, è necessario condurre un'indagine supplementare.

3. Integrali impropri. I potenziali e le componenti della forza d'attrazione sono rappresentabili mediante integrali le cui funzioni integrande diventano infinite se consideriamo i valori nei punti giacenti nel dominio contenente le masse d'attrazione.

Come è noto, se la funzione integranda diventa infinita in un punto del dominio di integrazione, allora non si può definire l'integrale come limite della somma integrale. Infatti, in questo

*) Ciò corrisponde nello spazio a un cilindro con le generatrici parallele all'asse z e sezione S nel piano (x, y) di densità volumetrica $\mu(\xi, \eta)$ indipendente da ζ.

caso la somma integrale non ha limite poiché il termine riferito al volume elementare contenente il punto singolare può incidere fortemente sul valore della somma, cambiandolo a piacere a seconda della scelta del punto intermedio. Gli integrali di queste funzioni sono definiti come integrali impropri.

Supponiamo che nel dominio T sia data la funzione $F(x, y, z)$ che diventa infinita nel punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Consideriamo un integrale esteso al dominio $T - K_\varepsilon$, dove K_ε è un intorno del punto M_0 di diametro non superiore ad ε.

Se facendo tendere arbitrariamente i domini K_{ε_n} al punto M_0 la successione di integrali

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \quad (\varepsilon_n \to 0)$$

ha un limite indipendente dalla scelta di questi domini K_{ε_n}, questo limite si dice *integrale improprio* della funzione $F(x, y, z)$ nel dominio T e si indica, di solito, con il simbolo

$$\iiint\limits_T F\, d\tau.$$

Se esiste almeno una successione di domini $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ tale che per $\varepsilon_n \to 0$ si abbia un limite $\overline{I}$, mentre per le altre successioni K_{ε_n} questo limite assume altri valori o non esiste affatto, allora il limite $\overline{I}$ si dice integrale improprio semiconvergente. È chiaro che considerando un integrale improprio semiconvergente $\overline{I}$, si deve indicare la successione di domini $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ rispetto alla quale si considera questo integrale.

Ci limiteremo qui al caso in cui la funzione integranda ha una singolarità in un punto isolato. Esaminiamo la convergenza di integrali del tipo

$$\iiint\limits_T \frac{C}{R^\alpha}\, d\tau_M, \tag{8}$$

dove C ed $\alpha > 0$ sono due costanti qualsiasi,

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + (z_0-\zeta)^2},$$

e M_0 è un punto appartenente al dominio T. Senza perdere generalità, si può supporre che T sia una sfera di raggio R e centro nel punto M_0. Consideriamo come dominio K_{ε_n} una sfera di raggio ε_n e centro nel punto M_0 e cerchiamo il limite della suc-

cessione di integrali

$$\iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{C}{r^{\alpha-2}}\,dr = 2\pi\cdot 2C \int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} =$$

$$= \begin{cases} 4\pi C\left[\dfrac{1}{3-\alpha}\,r^{3-\alpha}\right]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{se} \quad \alpha \neq 3, \\ 4\pi C\,[\ln r]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{se} \quad \alpha = 3. \end{cases}$$

Il passaggio al limite per ε_n tendente a zero mostra che per $\alpha < 3$ il limite esiste, ma per $\alpha \geqslant 3$ non esiste.

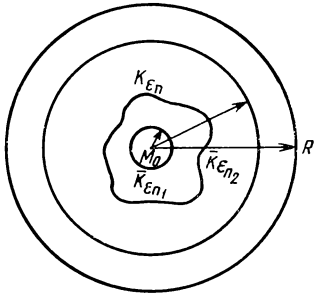


Fig. 57

Mostriamo che se la funzione $F(x, y, z)$ non è negativa e se esiste il limite

$$I_n = \iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \quad (\varepsilon_n \to 0),$$

dove $\bar{K}_{\varepsilon_n}$ è una sfera di raggio ε_n e centro nel punto M_0, allora esiste il limite degli integrali I per qualunque successione di domini K_{ε_n} tendenti al punto M, e che il valore di questo limite è indipendente dalla forma del dominio K_{ε_n}. Ogni dominio K_{ε_n} può essere compreso fra due sfere $\bar{K}_{\varepsilon_{n_1}}$ e $\bar{K}_{\varepsilon_{n_2}}$ i cui raggi ε_{n_1} ed ε_{n_2} tendono a zero assieme a ε_n (fig. 57). Essendo positiva la funzione integranda, abbiamo

$$\iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_{n_1}}} F\,d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_{n_2}}} F\,d\tau.$$

Di qui è evidente che

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = I,$$

poiché i limiti degli integrali estremi esistono e sono uguali a questo numero.

In tal modo, *nel caso di tre variabili indipendenti l'integrale improprio*

$$\iiint\limits_{T} \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau \tag{8}$$

esiste se $\alpha < 3$, *e non esiste se* $\alpha \geqslant 3$.

Per un altro numero di variabili indipendenti il valore critico di α, che definisce la frontiera di convergenza di integrali del tipo (8), è uguale al numero di dimensioni; così, ad esempio, *per due variabili indipendenti l'integrale*

$$\iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho^{\alpha}}\, d\sigma \qquad \begin{array}{ll} \text{per} & \alpha < 2 \text{ converge,} \\ \text{per} & \alpha \geqslant 2 \text{ diverge.} \end{array}$$

Soffermiamoci sul criterio di convergenza degli integrali impropri e dimostriamo quanto segue:

affinché l'integrale improprio

$$\iiint_{T} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{9}$$

sia convergente, è sufficiente che esista una funzione $\overline{F}(x, y, z)$ *per la quale l'integrale improprio esteso al dominio* T *converge e che sia verificata la disuguaglianza*

$$|F(x, y, z)| < \overline{F}(x, y, z). \tag{10}$$

Consideriamo una successione di domini K_{ε} contenenti il punto singolare M_0. In virtù della convergenza della successione di integrali $\overline{I}_n$ della funzione $\overline{F}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N(\varepsilon)$ tale che

$$|\overline{I}_{n_1} - \overline{I}_{n_2}| = \left| \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \overline{F}\, d\tau \right| < \varepsilon$$

se $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Siccome $\overline{F}$ è maggiorante per la funzione $F(x, y, z)$, si può scrivere

$$|I_{n_1} - I_{n_2}| = \left| \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} F\, d\tau \right| \leqslant \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} |F|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \overline{F}\, d\tau < \varepsilon \tag{10'}$$

se $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Per la convergenza della successione

$$I_n = \iiint_{T - K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau$$

a un limite

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n = \iiint_{T} F\, d\tau$$

è sufficiente che sia soddisfatta la condizione (10′) in accordo con il criterio di convergenza di Cauchy. È facile vedere che questo

limite non dipenderà dalla forma dei domini K_{ε_n}. Abbiamo dimostrato così l'esistenza dell'integrale improprio (9).

Se per una funzione $F(x, y, z)$ si può trovare una funzione positiva $\overline{F}(x, y, z)$ tale che $F(x, y, z) > \overline{F}$ e se, inoltre, l'integrale improprio di $\overline{F}$ nel dominio T diverge, allora l'integrale improprio (9) sarà, evidentemente, divergente.

Corollario: *se per una funzione* $F(M, P)$ *che diventa infinita per* $P = M$ *si verifica la disuguaglianza*

$$|F(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^{\alpha}}, \quad \begin{array}{l} \alpha = \text{costante} < 3, \\ C = \text{costante} < \infty, \end{array}$$

allora l'integrale improprio esteso al dominio T *contenente il punto* M

$$\int\int\int_T F(M, P)\, d\tau_P$$

è convergente.

È noto dalla teoria degli integrali propri dipendenti da parametri che la continuità della funzione integranda rispetto ai parametri e alle variabili indipendenti è una condizione sufficiente per la continuità dell'integrale stesso quale funzione dei parametri *). Per gli integrali impropri la continuità della funzione integranda non ha luogo per cui il suddetto criterio è inapplicabile. Stabiliamo un criterio di continuità degli integrali impropri dipendenti da parametri.

Consideriamo gli integrali impropri

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P)\, d\tau_P, \tag{11}$$

dove $F(P, M)$ è una funzione che diventa infinita quando gli argomenti coincidono ed è continua in M, e $f(P)$ è una funzione limitata.

L'integrale (11) *si dice convergente uniformemente al punto* M_0 *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *si può trovare un* $\delta(\varepsilon)$ *che verifichi la disuguaglianza*

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(M)| = \left| \int_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(P, M) f(P)\, d\tau_P \right| \leqslant \varepsilon$$

per ogni punto M *la cui distanza da* M_0 *è minore di* $\delta(\varepsilon)$, *e per ogni dominio* $T_{\delta(\varepsilon)}$ *contenente il punto* M_0 *e avente il diametro* $d \leqslant \delta(\varepsilon)$.

---

*) B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, Mosca, 1965, pag. 442 (ed. russa).

Dimostriamo che l'integrale

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P) d\tau_P,$$

convergente uniformemente al punto M_0, è una funzione continua in questo punto. Dobbiamo dimostrare che per ogni ε si può trovare un $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$| V(M_0) - V(M) | < \varepsilon$$

per

$$| \overrightarrow{MM_0} | < \delta(\varepsilon).$$

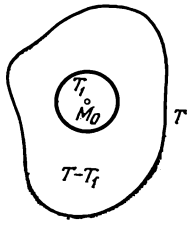


Fig. 58

Consideriamo all'interno del dominio T un dominio T_1 contenente il punto M_0 (fig. 58) e dividiamo l'integrale in due termini

$$V = V_1 + V_2,$$

dove l'integrale V_1 è esteso al dominio T_1 e V_2 al dominio $T_2 = T - T_1$. Più avanti definiremo più precisamente le dimensioni del dominio T_1. Consideriamo la disuguaglianza

$$| V(M_0) - V(M) | \leqslant | V_2(M_0) - V_2(M) | + | V_1(M_0) | + | V_1(M) |$$

e mostriamo che ciascuno dei termini a secondo membro può essere reso minore di $\varepsilon/3$ per $| \overrightarrow{M_0M} |$ sufficientemente piccolo. Scegliendo il dominio T_1 all'interno della sfera di raggio $\delta(\varepsilon/3)$, avremo

$$|V_1(M_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |V_1(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{se} \quad |\overrightarrow{M_0M}| \leqslant \delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

L'esistenza di tale δ' deriva dalla condizione di convergenza uniforme dell'integrale (11) nel punto M_0. La scelta del dominio T_1 definisce il dominio T_2.

Siccome il punto M_0 non appartiene al dominio T_2, l'integrale V_2 è una funzione continua in questo punto.

Di qui segue l'esistenza di $\delta''(\varepsilon/3)$ tale che

$$|V_2(M_0) - V_2(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per} \quad |\overrightarrow{M_0M}| \leqslant \delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Ponendo

$$\delta(\varepsilon) = \min [\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon)],$$

otteniamo

$$| V(M) - V(M_0) | \leqslant \varepsilon \quad \text{per} \quad | \overrightarrow{MM_0} | \leqslant \delta$$

ciò che esprime la continuità di un integrale uniformemente convergente.

È da notare che i risultati ottenuti sono validi non per i soli integrali di volume, ma anche per quelli di superficie e curvilinei. Questa circostanza ci servirà nel seguito.

Consideriamo il potenziale

$$V(M) = \int\int\int_{T} \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\, d\tau_P \tag{12}$$

e le componenti della forza d'attrazione

$$\left.\begin{aligned} X(M) &= -\int\int\int_{T} \frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(x-\xi)\, d\tau_P; \\ Y(M) &= -\int\int\int_{T} \frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(y-\eta)\, d\tau_P; \\ Z(M) &= -\int\int\int_{T} \frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(z-\zeta)\, d\tau_P \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

nei punti giacenti all'interno del corpo attraente T. Gli integrali impropri (12) e (13) sono convergenti se la densità $\rho(M)$ è limitata, cioè $|\rho(M)| < C$. Per il potenziale $V(M)$ questo fatto è evidente poiché

$$\frac{|\rho|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \quad (\alpha = 1 < 3).$$

Per le componenti della forza d'attrazione ciò segue dalla disuguaglianza

$$\frac{|\rho|}{R^2}\,\frac{|x-\xi|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \quad (\alpha = 2 < 3),$$

poiché $|x - \xi| < R$.

Per illustrare la nozione di convergenza uniforme degli integrali impropri, mostriamo che gli integrali (12) e (13) sono funzioni continue.

A tal fine bisogna dimostrare che gli integrali (12) e (13) convergono uniformemente in ogni punto M_0.

Calcoliamo il modulo dell'integrale *)

$$\left|\int\int\int_{T_\delta} \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\, d\tau_P\right| \leqslant C \int\int\int_{K_\delta^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

dove $K_\delta^{M_0}$ è una sfera di raggio δ e centro nel punto M_0, la quale contiene il dominio T_δ. Tuttavia il calcolo di questo integrale

*) Sottolineiamo che l'integrale (12) si deduce dall'integrale (11) per $F(M, P) = 1/R_{MP}$, $f(P) = \rho(P)$.

rispetto al dominio $K_\delta^{M_0}$ avente come centro il punto M_0 è scomodo. Per calcolare quest'ultimo integrale è opportuno passare a un sistema di coordinate sferiche avente come origine il punto M. È evidente che

$$\left| C \iiint\limits_{K_\delta^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}} \right| \leqslant C \left| \iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}} \right| = C 8\pi\delta^2,$$

dove $K_{2\delta}^{M}$ è una sfera di raggio 2δ e centro nel punto M. Se è dato un $\varepsilon > 0$, allora, considerando

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

vediamo che l'integrale V è convergente uniformemente.

Ripetendo un ragionamento analogo per l'integrale

$$X(M) = -\iiint\limits_{T} \rho(P) \frac{x-\xi}{R_{MP}^3} d\tau_P,$$

otteniamo

$$\left| \iiint\limits_{T_\delta} \rho(P) \frac{x-\xi}{R_{MP}^3} d\tau_P \right| \leqslant C \left| \iiint\limits_{K_\delta^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^2} \right| \leqslant C \left| \iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^2} \right| =$$

$$= 8\pi\delta C \leqslant \varepsilon$$

se

$$\delta \leqslant \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

Quindi, il potenziale V e le componenti X, Y, Z della forza d'attrazione sono funzioni continue in tutto lo spazio *).

4. Derivate prime del potenziale volumetrico. Le funzioni che figurano sotto il segno di integrale

$$X(M) = -\iiint\limits_{T} \rho(P) \frac{x-\xi}{R_{MP}^3} d\tau_P, \quad Y(M), \quad Z(M),$$

sono derivate rispetto alle variabili corrispondenti della funzione che sta sotto il segno di integrale

$$V(M) = \iiint\limits_{T} \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P.$$

---

*) La convergenza uniforme degli integrali $V(M)$ e $X(M)$ è dimostrata partendo dall'ipotesi della limitatezza della densità $|\rho| < C$. Quindi, questi integrali sono continui anche nei punti di discontinuità della funzione ρ, ad esempio sulla frontiera del dominio riempito dalle masse.

Se per la funzione V è legittima la derivazione sotto il segno di integrale, allora

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{14}$$

vale a dire V è il potenziale del campo avente come componenti X, Y, Z.

Se il punto M giace all'esterno del dominio T, la funzione

$$-\frac{x-\xi}{R_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_{MP}}$$

è continua nei due argomenti $M(x, y, z)$ e $P(\xi, \eta, \zeta)$. Di conseguenza, in questo caso la derivazione di V sotto il segno di integrale è legittima.

Le derivate di ordine superiore si possono calcolare anch'esse per derivazione sotto il segno di integrale, ovunque all'esterno del corpo T. Di qui, in virtù del lemma del capitolo III, § 3, segue che il potenziale all'esterno delle masse attrattive verifica l'equazione di Laplace

$\Delta V = 0$ all'esterno del corpo T.

Dimostriamo che il calcolo delle derivate del potenziale V si può eseguire per derivazione sotto il segno di integrale anche nel caso in cui il punto M giace all'interno del corpo T.

Per la dimostrazione ci serviremo unicamente della limitatezza della funzione $\rho(x, y, z)$, ossia che valga $|\rho(x, y, z)| < C$, senza supporne la continuità, da cui deriverà che la funzione $V(x, y, z)$ è derivabile anche nei punti del contorno i quali si possono considerare come punti di discontinuità della funzione $\rho(x, y, z)$ che è nulla all'esterno del corpo.

Mostriamo che per ogni ε si può trovare un $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon$$

se

$$|\Delta x| < \delta(\varepsilon).$$

Collochiamo il punto M_0 in una sfera sufficientemente piccola $K_\delta^{M_0}$, le cui dimensioni verranno precisate più avanti, e dividiamo V in due termini

$$V = V_1 + V_2,$$

dove V_1 e V_2 corrispondono all'integrazione rispetto al volume $T_1 = K_\delta^{M_0}$, e a quello complementare $T_2 = T - K_\delta^{M_0}$, rispetti-

vamente. Allora

$$\frac{V(x+\Delta x,\ y,\ z)-V(x,\ y,\ z)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{V_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-V_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}+\frac{V_2(x+\Delta x,\ y,\ z)-V_2(x,\ y,\ z)}{\Delta x}.$$

Qualunque siano le dimensioni fissate del dominio T_1

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V_2(x+\Delta x,\ y,\ z)-V_2(x,\ y,\ z)}{\Delta x}=X_2=$$

$$=\iiint_{T_2}\rho(\xi,\ \eta,\ \zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau,$$

poiché il punto M_0 si trova all'esterno del dominio T_2.

Ponendo $X=X_1+X_2$, abbiamo

$$\left|X-\frac{V(x+\Delta x,\ y,\ z)-V(x,\ y,\ z)}{\Delta x}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|X_2-\frac{V_2(x+\Delta x,\ y,\ z)-V_2(x,\ y,\ z)}{\Delta x}\right|+|X_1|+$$

$$+\left|\frac{V_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-V_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}\right|.$$

Mostriamo che ciascuno degli addendi si può rendere inferiore a $\varepsilon/3$. Infatti,

$$|X_1|=\left|\iiint_{T_1}\rho\frac{x-\xi}{R^3}d\tau\right|<C\int_0^{\delta'}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^2\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr}{r^2}=$$

$$=4\pi C\delta'<\frac{\varepsilon}{2},\qquad(15)$$

poiché $\left|\frac{x-\xi}{R}\right|<1$ e $|\rho|<C$. Consideriamo l'ultimo addendo

$$|S|=\left|\frac{V_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-V_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint_{T_1}\rho\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)d\tau\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint_{T_1}\rho\frac{R-R_1}{RR_1}d\tau\right|,$$

dove

$$R_1=\sqrt{[(x+\Delta x)-\xi]^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2};$$

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

I lati del triangolo M_0MM_1 sono uguali a r, r_1 e $|\Delta x|$. Ne segue che

$$|R-R_1|\leqslant|\Delta x|.$$

Perciò

$$|S| \leqslant C \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{RR_1} \leqslant C\frac{1}{2}\left\{\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} + \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2}\right\},$$

poiché per numeri a e b qualsiasi si ha

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

In questo caso

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta' \quad \text{e} \quad \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} \leqslant \iiint_{K_{2\delta'}^{M_1}} \frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

dove $K_{2\delta'}^{M_1}$ è una sfera di raggio $2\delta'$ e centro nel punto M_1.

Con una scelta appropriata di δ' si può ottenere che sia verificata la disuguaglianza

$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Considerando δ' dalla condizione (16), verifichiamo le due disuguaglianze (15) e (16). Fissiamo il dominio $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ e, quindi, anche il dominio $T_2 = T - T_1$.

L'uguaglianza (14) applicata al dominio fissato T_2 significa che, per ogni ε, si può trovare un δ'' tale che

$$\left|\frac{V_2(x+\Delta x,\ y,\ z) - V_2(x,\ y,\ z)}{\Delta x} - X_2\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

se $|\Delta x| < \delta''$. Infine, considerando $\delta = \min[\delta',\ \delta'']$, otteniamo

$$\left|\frac{V(x+\Delta x,\ y,\ z) - V(x,\ y,\ z)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Abbiamo dimostrato così l'esistenza della derivata $\frac{\partial V}{\partial x}$ che vale

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X. \tag{17}$$

Le formule

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

non necessitano di dimostrazione speciale.

Quindi, abbiamo dimostrato che la derivazione sotto il segno di integrale è legittima e che le componenti del campo di forza X, Y, Z sono componenti di grad V.

5. Derivate seconde del potenziale volumetrico. L'integrale improprio

$$\iiint_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\tau_P = -\iiint_T \rho\left(\frac{1}{R^3} - 3\frac{(x-\xi)^2}{R^5}\right) d\tau \tag{18}$$

non converge assolutamente per i punti interni P del corpo T. In questo caso una maggiorante della funzione integranda ha la forma

$$\frac{C}{R^{\alpha}} \quad \text{per} \quad \alpha = 3.$$

Deduciamo le formule che consentono di calcolare all'interno di T le derivate seconde del potenziale V sotto l'ipotesi di continuità e di continua derivabilità della densità $\rho\,(x, y, z)$ nell'intorno dei punti in esame. In particolare, l'indagine che segue non riguarderà i punti al contorno dove, di regola, la densità ha una discontinuità.

Rappresentiamo il potenziale V sotto forma di somme di due addendi

$$V = V_1 + V_2$$

riferiti ai domini T_1 e T_2, dove $T_1 = K_{\delta}^{M_0}$ è una sfera di raggio δ e centro nel punto in esame M_0, all'interno della quale la funzione ρ è derivabile.

Si può calcolare la derivata seconda di V_2 derivando sotto il segno di integrale poiché il punto M_0 non appartiene al dominio T_2:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \int\int\int_{T_2} \rho\,(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau.$$

La derivata prima di V_1 rispetto a x vale

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int\int\int_{T_1} \rho\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\int\int\int_{T_1} \rho\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau, \tag{19}$$

poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Trasformiamo l'integrale (19) mediante la formula di Ostrogradskij

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\int\int\int_{T_1} \rho\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\int\int\int_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\,\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\,\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right] d\tau =$$

$$= -\int\int_{\Sigma_{\delta}^{M_0}} \frac{\rho}{R}\cos\alpha\, d\sigma + \int\int\int_{T_1} \frac{1}{R}\,\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, d\tau,$$

dove $\Sigma_{\delta}^{M_0}$ è la superficie della sfera che delimita il volume T_1 ed α è l'angolo formato dalla normale esterna alla superficie $\Sigma_{\delta}^{M_0}$ e dall'asse x. Il primo termine è una funzione derivabile nel punto M_0 poiché questo punto giace all'esterno della superficie

$\Sigma_\delta^{M_0}$. Il secondo termine è anch'esso una funzione derivabile nell'intorno del punto M_0 in quanto la funzione ρ ha derivata in T_1. Ne segue che nel punto M_0 esiste la derivata seconda della funzione V_1. Passiamo al suo calcolo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = -\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\sigma + \iiint\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\, d\tau.$$

Per il secondo termine nel punto M_0 abbiamo la seguente stima:

$$\left|\iiint\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\, d\tau\right| < C_1 \iiint\limits_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = C_1 4\pi\delta, \quad \text{se} \quad \left|\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right| < C_1. \tag{20}$$

Applicando all'integrale di superficie il teorema della media, otteniamo

$$-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\cos^2\alpha}{R^2}\, d\sigma = -\rho^* \frac{4\pi}{3}.$$

Qui ρ^* è il valore della densità in un punto della superficie $\Sigma_\delta^{M_0}$,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{x-\xi}{R^3} = -\frac{1}{R^2}\cos\alpha$$

e, inoltre,

$$\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\cos^2\alpha}{R^2}\, d\sigma = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\, d\sigma = \frac{4}{3}\pi.$$

Il passaggio al limite per $\delta \to 0$ dà

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\sigma\right] = -\frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \tag{21}$$

L'uguaglianza

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

è valida per ogni δ e il suo primo membro non dipende da δ, per cui

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right) =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\rho(M) + \lim_{\delta\to 0}\iiint\limits_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \tag{22}$$

Dall'esistenza sopra dimostrata della derivata seconda $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ deriva l'esistenza di

$$\lim_{\delta \to 0} \int\int\int_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = \overline{\int\int\int_{T} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau}. \tag{23}$$

L'ultimo integrale è ottenuto mediante un passaggio al limite di tipo speciale per cui i domini tendenti al punto M_0 sono delle sfere *), ciò che è indicato con un trattino sopra l'integrale nella formula (23). Il cambiamento di forma di questi domini può incidere, in generale, sul valore del limite; l'integrale (23) si deve considerare come semiconvergente. In tal modo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_0) = \overline{\int\int\int_{T} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau} - \frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \tag{24}$$

Si vede di qui che il calcolo delle derivate seconde del potenziale per derivazione formale sotto il segno di integrale ci condurrebbe a un risultato non corretto.

Per le derivate $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ si ottengono espressioni analoghe. Sostituendo i valori delle tre derivate nell'espressione dell'operatore di Laplace, troviamo

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$= \overline{\int\int\int_{T} \rho\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] d\tau} -$$

$$-4\pi\rho(M_0) = -4\pi\rho(M_0), \tag{25}$$

poiché $1/R$ è una funzione armonica **).

In tal modo, il potenziale volumetrico verifica l'equazione di Poisson

$\Delta V = -4\pi\rho$ all'interno del corpo

e l'equazione di Laplace

$\Delta V = 0$ all'esterno del corpo.

L'equazione non omogenea

$$\Delta u = -f \tag{25'}$$

*) Il limite (23) si suole chiamare *valore principale* dell'integrale.

**) La formula (25) è dedotta sotto l'ipotesi di derivabilità della funzione ρ, la quale è una condizione sufficiente e può essere sostituita da altre condizioni meno restrittive. Tuttavia la condizione di continuità della funzione $\rho(M)$ non è sufficiente per la validità della formula (25) poiché esistono esempi di funzioni continue $\rho(M)$ per cui il potenziale volumetrico non ha derivate seconde.

sotto la condizione di derivabilità di f all'interno di un dominio T ha la soluzione particolare

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \int\int\int_T \frac{f\, d\tau}{R}.$$

Ne segue, in particolare, che la soluzione del problema ai limiti per l'equazione non omogenea (25′) si può ridurre alla soluzione del problema analogo per l'equazione di Laplace $\Delta v = 0$ se la funzione cercata è rappresentata sotto forma di somma $u = u_0 + v$.

6. Potenziali superficiali. Come risulta dalla formula fondamentale di Green (si veda il § 2)

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int\int_\Sigma \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \right] d\sigma_P,$$

ogni funzione armonica può essere rappresentata mediante integrali che sono potenziali superficiali.

Consideriamo il campo creato da masse distribuite su una superficie *) e definiamo il potenziale di questo campo. Si chiama

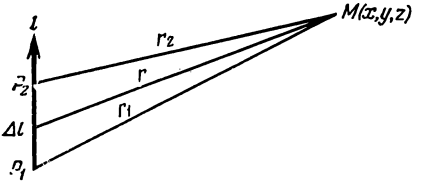


Fig. 59

densità superficiale $\mu(P)$ nel punto P della superficie Σ il limite del rapporto fra la massa che si trova in un elemento $d\sigma$ della superficie Σ contenente il punto P, e la sua area, quando l'elemento $d\sigma$ tende al punto P. Il potenziale di queste masse è rappresentato dall'integrale di superficie

$$V(M) = \int\int_\Sigma \frac{\mu(P)}{R_{MP}}\, d\sigma_P, \tag{26}$$

detto *potenziale a strato semplice.*

Un altro tipo di potenziale superficiale è il potenziale a strato doppio. Passiamo ora alla sua definizione.

Consideriamo un dipolo formato da due masse $-m$ e $+m$ site nei punti P_1 e P_2 alla distanza Δl (fig. 59). Il prodotto $m \cdot \Delta l = N$

*) Se le masse, di densità volumetrica ρ, si trovano in uno strato di spessore h in prossimità della superficie Σ e se il campo è studiato a distanze grandi rispetto a h ($h/R \ll 1$), allora lo spessore della superficie è, in generale, inessenziale. Perciò è opportuno considerare il potenziale superficiale di densità superficiale $\mu = \rho h$, anziché quello volumetrico di densità ρ.

si dice *momento* di dipolo. Il potenziale di dipolo in un punto $M(x, y, z)$ vale

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

dove r_1 e r_2 sono distanze del punto M dai punti P_1 e P_2, rispettivamente.

Se la distanza Δl è piccola rispetto a quella dal punto M ($\Delta l/r_1 \ll 1$), allora, ricorrendo al teorema degli incrementi finiti, si può scrivere

$$V = N\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right), \qquad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

dove la derivata si calcola nella direzione dalla massa repulsiva a quella attrattiva e R è la distanza fra il punto $M(x, y, z)$ e un punto intermedio $P(\xi, \eta, \zeta)$ dell'intervallo Δl.

Calcoliamo la derivata nella direzione $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l}) = \frac{\cos\varphi}{R^2},$$

dove il vettore $\boldsymbol{r}$ è diretto dal dipolo al punto fissato M e φ è l'angolo formato dal vettore $\boldsymbol{l}$ con il vettore $\boldsymbol{r}$. In tal modo il potenziale di dipolo vale

$$V(M) = N\frac{\cos\varphi}{R^2}, \tag{27}$$

dove N è il momento di dipolo.

Supponiamo che su due superfici Σ e Σ' (fig. 60) poste a piccola distanza δ siano distribuite delle masse in modo che la massa di

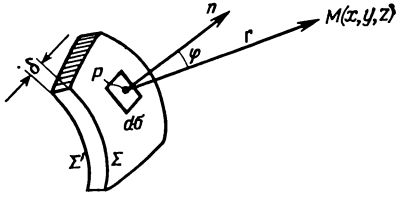


Fig. 60

ciascun elemento della superficie Σ' sia uguale in grandezza e opposta di segno alla massa dell'elemento corrispondente della superficie Σ. Indichiamo con $\boldsymbol{n}$ la normale comune alle superfici Σ e Σ', diretta dalle masse repulsive a quelle attrattive. Passando al limite per $\delta \to 0$, otteniamo uno strato doppio quale insieme di due strati semplici di densità mutuamente opposte e a distan-

za infinitesimale. Se ν è la densità superficiale del momento, allora il momento dell'elemento di superficie $d\sigma_P$ vale

$$dN = \nu\, d\sigma_P;$$

il potenziale dell'elemento $d\sigma$ nel punto $M(x, y, z)$ è

$$\nu \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \nu(P) \frac{\cos\varphi_1}{R^2_{MP}}\, d\sigma_P,$$

dove $\varphi_1 = (\widehat{\boldsymbol{n}P\overrightarrow{M}})$.

Si chiama *potenziale a strato doppio* l'integrale

$$W(M) = -\int\int_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, d\sigma_P. \tag{28}$$

Questa definizione corrisponde, evidentemente, al caso in cui il lato esterno della superficie è repulsivo e quello interno attrattivo.

È evidente che

$$W = \int\int_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}} \nu(P)\, d\sigma_P,$$

dove φ è l'angolo fra la normale interna e la direzione congiungente il punto superficiale P con il punto fissato M. Se la superficie non è chiusa, la dobbiamo considerare bilaterale poiché il potenziale a strato doppio viene definito unicamente per queste superfici.

I potenziali a strato semplice e doppio nel caso di due variabili indipendenti hanno la forma

$$V = \int_C \mu(P) \ln\frac{1}{R_{MP}}\, ds, \tag{29}$$

$$W = -\int_C \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right) ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds, \tag{30}$$

dove C è una curva, μ la densità lineare dello strato semplice, ν la densità di momento dello strato lineare doppio, φ l'angolo fra la normale interna alla curva C e la direzione verso il punto fissato.

Se il punto d'osservazione $M(x, y, z)$ si trova fuori della superficie (fuori delle masse attrattive), le funzioni integrande e le loro derivate rispetto a x, y, z di qualsiasi ordine nelle formule

$$V(M) = \int\int_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}}\, d\sigma_P,$$

$$W(M) = -\int\int_{\Sigma} \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P$$

sono continue nelle variabili x, y, z. Pertanto le derivate dei potenziali superficiali nei punti non appartenenti alla superficie Σ

si possono calcolare per derivazione sotto il segno di integrale. Di qui, in virtù del principio di sovrapposizione, segue che i potenziali superficiali verificano l'equazione di Laplace ovunque fuori delle masse attrattive. Le funzioni (29) e (30) verificano, evidentemente, l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti.

I potenziali superficiali nei punti della superficie sono rappresentati da integrali impropri. Mostriamo che se la superficie è a curvatura continua, il potenziale a strato doppio nei punti di questa superficie esiste. Conduciamo la dimostrazione nel caso di due variabili indipendenti:

$$W = \int_C \frac{\cos \varphi}{R} \nu \, ds.$$

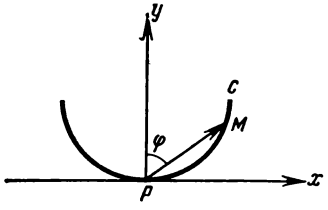


Fig. 61

Consideriamo una curva nel piano (x, y), scegliamo l'origine delle coordinate nel punto P e indirizziamo l'asse x lungo la tangente in questo punto e l'asse y lungo la normale (fig. 61). L'equazione della curva in un intorno del punto P si scrive nella forma

$$y = y(x).$$

La curva ha, per ipotesi, curvatura continua, cioè $y(x)$ ha la derivata seconda continua. Perciò

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\vartheta x) \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

da cui, in seguito alla scelta degli assi coordinati, abbiamo

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\vartheta x).$$

Di qui ricaviamo

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2} = x \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{y}{R} = \frac{xy''(\vartheta x)}{2\sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2}}$$

e

$$\frac{\cos \varphi}{R} = \frac{y''(\vartheta x)}{2\left\{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2\right\}}.$$

Dall'espressione della curvatura $K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ risulta $y''(0) = K(P)$. Perciò

$$\lim_{MP \to 0} \frac{\cos \varphi}{R} = \frac{1}{2} K(P),$$

il che dimostra la continuità di $\frac{\cos \varphi}{R}$ lungo l'arco di curva e, quindi, l'esistenza del potenziale a strato doppio nei punti della curva C per una funzione limitata ν.

Il potenziale a strato doppio esiste anche nel caso di tre variabili indipendenti, nei punti di una superficie a curvatura finita poiché la funzione $\frac{\cos \varphi}{R^2}$ ha una singolarità integrabile dell'ordine di $1/R$. Quanto all'esistenza del potenziale a strato semplice, essa è ovvia.

7. Superfici e curve di Ljapunov. L'ipotesi che la curvatura debba essere finita è superflua per l'esistenza dei potenziali superficiali.

I potenziali a strato semplice e doppio nei punti della superficie Σ sono integrali impropri. Mostriamo che questi integrali sono convergenti per una classe di superfici, dette superfici di Ljapunov, se la densità del potenziale è limitata: $|\nu(P)| < C$, dove C è una costante.

Una superficie si dice *superficie di Ljapunov* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. In ogni punto della superficie Σ esiste una normale (piano tangente).
2. Esiste un numero $d > 0$ tale che le rette parallele alla normale in un punto P della superficie Σ intersecano non più di una volta la parte Σ'_P della superficie Σ, giacente all'interno della sfera di raggio d e centro in P. Queste parti Σ'_P della superficie Σ si chiamano intorni di Ljapunov.

3. L'angolo $\gamma(P, P') = (\widehat{n_P, n_{P'}})$ formato dalle normali nei punti P e P' verifica la seguente condizione:

$$\gamma(P, P') < Ar^{\delta}, \tag{31}$$

dove r è la distanza fra i punti P e P', A una costante e $0 < \delta \leqslant 1$.

Sia P_0 un punto sulla superficie Σ. Consideriamo un sistema di coordinate ortogonali avente come origine il punto P_0 ed indirizziamo l'asse z lungo la normale esterna. Allora il piano (x, y) coincide con il piano tangente. In virtù della condizione 2 esiste ρ_0 tale che l'equazione della superficie Σ si può scrivere nella forma

$$z = f(x, y) \text{ *)} \tag{32}$$

per

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0. \tag{33}$$

Indichiamo con Σ'_{P_0} l'intorno del punto P_0 sulla superficie Σ, definito dalle condizioni (32) e (33). Deduciamo alcune stime per la funzione $f(x, y)$ e le sue derivate.

Dall'esistenza della normale in ciascun punto della superficie (condizione 1) segue la derivabilità della funzione $f(x, y)$. I coseni direttori della

*) È da notare che se la funzione $f(x, y)$ ha le derivate seconde continue nell'intorno del punto P_0, la superficie $z = f(x, y)$ soddisfa le condizioni di Ljapunov. Quindi, le superfici a curvatura continua sono di Ljapunov.

normale (esterna) sono espressi dalle formule

$$\cos\alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\beta = \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

In virtù del sistema di coordinate suindicato, $z_x(P_0) = 0$ e $z_y(P_0) = 0$. Supporremo la superficie Σ'_{P_0} così piccola (ρ_0 così piccolo) che

$$1 \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} > \frac{1}{2}. \tag{34}$$

Indichiamo con $\boldsymbol{n}'_P$ la proiezione del vettore $\boldsymbol{n}_P$ sul piano (x, y) e con α', β' gli angoli formati dal vettore $\boldsymbol{n}'_P$ con gli assi x e y. È evidente che

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha', \quad \cos\beta = \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha'.$$

Siccome $\operatorname{sen}\gamma < \gamma$, allora in virtù della condizione 3

$$\operatorname{sen}\gamma < Ar^{\delta}_{PP_0}$$

e, di conseguenza,

$$|\cos\alpha| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |\cos\beta| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \tag{35}$$

e poiché $z_x = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$. $z_y = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ e, inoltre $\dfrac{1}{\cos\gamma} < 2$, allora

$$|z_x| < 2Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |z_y| < 2Ar^{\delta}_{PP_0}.$$

Usando la formula di Taylor per la funzione $z = f(x, y)$ nell'intorno del punto $P_0(0, 0)$, avremo

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y}), \text{ dove } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant x, \quad 0 \leqslant \bar{y} \leqslant y,$$

da cui segue che

$$|z(x, y)| < 4Ar^{1+\delta}_{PP_0}. \tag{36}$$

Le stime (34) e (36) così ottenute consentono di dimostrare che nei punti giacenti sulla superficie Σ il potenziale a strato doppio

$$W(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}\, \nu(P)\, d\sigma_P \tag{28}$$

è un integrale improprio convergente se Σ è una superficie di Ljapunov. Sia $M = P_0$ un punto appartenente alla superficie Σ. Considerando il sistema di coordinate nel modo suindicato, rappresentiamo la soluzione dell'equazione per la superficie Σ nell'intorno del punto P_0 nella forma

$$z = f(x, y).$$

La funzione $f(x, y)$ soddisfa le condizioni (34) e (36). Calcoliamo $\cos\varphi$, dove φ è l'angolo fra la direzione della normale interna nel punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ e la direzione $\overrightarrow{PP_0}$. È facile vedere che

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{\xi}{R}\cos\alpha + \frac{\eta}{R}\cos\beta + \frac{\zeta}{R}\cos\gamma\right| \leqslant |\cos\alpha| +$$

$$+ |\cos\beta| + \frac{|\zeta|}{R} \leqslant AR^{\delta}_{PP_0} + AR^{\delta}_{PP_0} + 4AR^{\delta}_{PP_0} = 6AR^{\delta}_{PP_0}$$

e

$$\left|\frac{\cos\varphi}{R^2}\right| \leqslant 6A\,\frac{1}{R^{2-\delta}} \qquad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{37}$$

Rappresentiamo W sotto forma di somma di due integrali

$$W = W_1 + W_2,$$

dove W_1 è l'integrale esteso alla superficie Σ'_{P_0} contenente il punto singolare P_0 e l'integrale W_2 è esteso al resto della superficie $\Sigma - \Sigma'_{P_0}$. Poiché la funzione integranda nell'integrale W_2 non diventa infinita in nessun punto, allora per la convergenza dell'integrale W è sufficiente provare che sia convergente l'integrale W_1. Poiché

$$d\sigma = \frac{d\xi\,d\eta}{\cos\gamma} = \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\cos\gamma},$$

dove $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ e θ sono le coordinate polari nel piano (x, y), una trasformazione di variabili in questo integrale dà

$$W_1 = \iint\limits_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\cos\varphi}{R^2_{PP_0}}\,\nu(P)\,d\sigma_P = \int\limits_0^{\rho_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{R^2_{PP_0}}\,\nu(P)\,\frac{1}{\cos\gamma}\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

In virtù delle stime (34), (36) e (37), per la funzione integranda abbiamo

$$\left|\nu(P)\,\frac{\cos\varphi}{R^2}\,\frac{1}{\cos\gamma}\right| \leqslant \overline{F} = \frac{12AC}{\rho^{2-\delta}},$$

poiché $\rho < R$.

Questa forma della funzione maggiorante $\overline{F}$ garantisce la convergenza dell'integrale improprio nel caso di due variabili indipendenti (si veda il n. 3).

È facile stabilire che per la superficie di Ljapunov anche il potenziale a strato semplice

$$V(M) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}}\,\mu(P)\,d\sigma_P \tag{26}$$

è convergente nei punti appartenenti a questa superficie. È da notare che questa convergenza si verifica anche per superficie di una classe più larga.

Nel caso di due variabili indipendenti i potenziali a strato semplice e doppio sono convergenti nei punti di una curva (si vedano le formule (29) e (30)) se questi potenziali vengono calcolati per le curve di Ljapunov, definite da condizioni analoghe alle condizioni 1-3 per le superfici di Ljapunov.

8. Discontinuità del potenziale a strato doppio. Mostriamo che il potenziale a strato doppio in un punto P_0 giacente sulla superficie Σ è una funzione discontinua per la quale si verificano le relazioni

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{int}}(P_0) &= W(P_0) + 2\pi\nu(P_0), \\ W_{\text{est}}(P_0) &= W(P_0) - 2\pi\nu(P_0), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dove $W_{\text{int}}(P_0)$ è il valore limite del potenziale a strato doppio tendente al punto P_0 dall'interno, e $W_{\text{est}}(P_0)$ il valore limite dalla parte esterna della superficie *).

Nel caso di due variabili indipendenti le formule corrispondenti diventano

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{int}}(P_0) &= W(P_0) + \pi\nu(P_0), \\ W_{\text{est}}(P_0) &= W(P_0) - \pi\nu(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Il potenziale a strato doppio di due variabili indipendenti è espresso dall'integrale

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\nu(P)\,ds_P.$$

Consideriamo un elemento d'arco ds avente come estremi i punti P e P_1. Tracciamo per il punto P un arco di circonferenza di raggio MP e centro nel punto M fino alla sua intersezione con la semiretta MP_1 nel punto Q; allora si può scrivere, a meno di infinitesimi di ordine superiore (fig. 62),

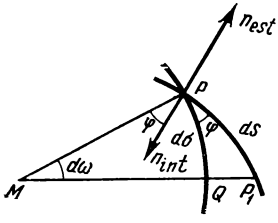


Fig. 62

$$ds\cos\varphi = d\sigma, \qquad \frac{d\sigma}{R} = d\omega, \tag{40}$$

dove $ds = \overset{\smile}{PP_1}$, $d\sigma = \overset{\smile}{PQ}$, $d\omega$ è l'angolo sotto il quale si vede l'arco ds dal punto M. Il segno di $d\omega$ coincide con il segno di $\cos\varphi$, cosicché: $d\omega > 0$ se φ (l'angolo fra la normale interna nel punto P e il vettore $\overrightarrow{PM}$) è inferiore a $\pi/2$, e $d\omega < 0$ se $\varphi > \pi/2$. Se $d\omega > 0$, cioè se $\varphi < \pi/2$, allora dal punto M si vede la parte « interna » della curva C; per $d\omega < 0$ ($\varphi > \pi/2$) dal punto M si vede la parte « esterna » della curva. Ne segue che l'angolo sotto cui si vede l'arco $\overset{\smile}{P_1P_2}$ è uguale all'angolo P_1MP_2 descritto dal raggio MP quando il punto P descrive l'arco P_1P_2.

Consideriamo il potenziale a strato doppio W^0 sulla curva C, con densità costante $\nu = \nu_0 = \text{costante}$. Il raggio MP descrive l'angolo

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi & \text{se il punto } M \text{ giace all'interno della curva } C, \\ \pi & \text{se il punto } M \text{ giace sulla curva } C, \\ 0 & \text{se il punto } M \text{ giace all'esterno della surva } C, \end{cases}$$

*) Se Σ non è una superficie chiusa, la sua parte interna può essere definita dalla convenzione di considerare una normale nel punto P_0 « interna » e l'altra « esterna ». Si deve tener presente che nel caso di superfici non chiuse il potenziale a strato doppio si definisce unicamente per superfici bilaterali.

quando il punto P descrive tutta la curva C. Di qui ricaviamo i seguenti valori per il potenziale W^0:

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 2\pi\nu_0 & \text{se il punto } M \text{ giace all'interno della curva } C, \\ \pi\nu_0 & \text{se il punto } M \text{ giace sulla curva } C, \\ 0 & \text{se il punto } M \text{ giace all'esterno della curva } C. \end{cases}$$

In tal modo, il potenziale a densità costante è una funzione costante a tratti e, inoltre,

$$\left.\begin{aligned} W^0_{\text{int}} &= W^0_c + \pi\nu_0, \\ W^0_{\text{est}} &= W^0_c - \pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

dove W^0_{int}, W^0_c, W^0_{est} sono i valori del potenziale all'interno, sulla e all'esterno della curva C.

Analogamente, nel caso di tre variabili indipendenti avremo

$$\frac{d\sigma \cos\varphi}{R^2} = d\omega, \tag{42}$$

dove $d\omega$ è l'angolo solido sotto il quale si vede l'elemento $d\sigma$ della superficie Σ. Supponiamo che $d\sigma'$ sia l'elemento di superficie sferica che si ottiene per intersezione della sfera descritta dal raggio MP uscente dal punto M con il cono avente come vertice il punto M e come base l'elemento di superficie $d\sigma$. Per l'elemento di superficie si ha $d\sigma' = d\sigma \cos\varphi$. Ne deriva la formula (42). L'osservazione fatta sopra relativamente al segno di $d\omega$ resta valida, il che ci conduce alle seguenti formule che caratterizzano la costanza a tratti della funzione W^0:

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 4\pi\nu_0 & \text{se il punto } M \text{ giace all'interno della} \\ & \text{superficie } \Sigma, \\ 2\pi\nu_0 & \text{se il punto } M \text{ giace sulla superficie } \Sigma, \\ 0 & \text{se il punto } M \text{ giace all'esterno della superficie } \Sigma \end{cases}$$

e alle formule

$$\left.\begin{aligned} W^0_{\text{int}} &= W^0_\Sigma + 2\pi\nu_0, \\ W^0_{\text{est}} &= W^0_\Sigma - 2\pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

dove W^0_{int}, W^0_{est} sono i valori del potenziale W^0 all'interno e all'esterno della superficie Σ, e W^0_Σ il valore di W^0 su Σ.

Consideriamo ora il potenziale a strato doppio, con densità variabile e dimostriamo che nei punti di continuità della densità sono valide formule analoghe alle (41) e (41').

Supponiamo che P_0 sia un punto sulla superficie Σ in cui la funzione $\nu(P)$ è continua. Introduciamo il potenziale a strato doppio W^0 con densità costante $\nu_0 = \nu(P_0)$ e consideriamo la

funzione

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \iint_{\Sigma} [\nu(P) - \nu_0] \frac{\cos \varphi}{R^2_{MP}} \, d\sigma_P.$$

Dimostriamo che la funzione I è continua nel punto P_0. A tale scopo è sufficiente dimostrare la convergenza uniforme dell'integrale $I(M)$ nel punto P_0. Sia assegnato un numero $\varepsilon > 0$. Dalla continuità della funzione $\nu(P)$ nel punto P_0 segue che per ogni numero assegnato in anticipo $\eta > 0$ si può trovare sulla superficie Σ un intorno Σ_1 del punto P_0 tale che

$$| \nu(P) - \nu(P_0) | < \eta$$

se $P \in \Sigma_1$. Scriviamo l'integrale I sotto forma di somma

$$I = I_1 + I_2,$$

dove l'integrale I_1 è esteso alla superficie Σ_1 e l'integrale I_2 alla superficie $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Dalla definizione di Σ_1 segue che

$$| I_1 | < \eta B_\Sigma,$$

dove B_Σ è una costante definita dalla condizione

$$\iint_{\Sigma} \frac{| \cos \varphi |}{R^2_{MP}} \, d\sigma_P \leqslant B_\Sigma \tag{43}$$

per tutte le posizioni possibili del punto M e per quale che sia la superficie Σ_1. Più avanti parleremo in modo particolareggiato di questa costante.

Considerando $\eta = \varepsilon / B_\Sigma$, vediamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un intorno Σ_1 contenente P_0 tale che

$$| I_1(M) | < \varepsilon$$

qualunque sia la posizione del punto M. Ne deriva la convergenza uniforme dell'integrale $I(M)$ nel punto P_0 e anche la sua continuità in questo punto.

Se $W_{\text{int}}(P_0)$ e $W_{\text{est}}(P_0)$ sono limiti del potenziale $W(M)$ per $M \to P_0$ dalle parti interna ed esterna della superficie Σ, allora

$$W_{\text{int}}(P_0) = W^0_{\text{int}}(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi\nu_0 =$$
$$= W(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$$

e analogamente

$$W_{\text{est}}(P_0) = W(P_0) - 2\pi\nu(P_0).$$

Abbiamo stabilito così la validità della formula (38).

La dimostrazione condotta sopra è valida per superfici soddisfacenti alla condizione di limitatezza (43). Per una superficie convessa intersecata non più di due volte da ogni raggio uscente dal punto M, $B_\Sigma \leqslant 8\pi$; per superfici composte di numero finito

di parti convesse B_Σ è sempre limitata. In tal modo, la dimostrazione condotta si riferisce a una classe di superfici assai larga.

Tutte le considerazioni citate restano in vigore anche per funzioni di due variabili indipendenti. In questo caso le formule (41) diventano

$$W_{\text{int}}(P_0) = W(P_0) + \pi\nu(P_0),$$
$$W_{\text{est}}(P_0) = W(P_0) - \pi\nu(P_0).$$

9. Proprietà del potenziale a strato semplice. A differenza del potenziale a strato doppio, quello a strato semplice

$$V(M) = \int_\Sigma \int \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P \tag{26}$$

è continuo nei punti della superficie Σ. Dimostriamolo per una superficie Σ liscia. A tale scopo è sufficiente stabilire la convergenza uniforme dell'integrale $V(M)$ nei punti della superficie Σ.

Supponiamo infatti che P_0 sia un punto della superficie Σ. Rappresentiamo il potenziale V sotto forma di somma

$$V = \int_{\Sigma_1}\int \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P + \int_{\Sigma_2}\int \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

dove Σ_1 è una parte sufficientemente piccola della superficie Σ contenuta in una sfera di raggio δ e centro nel punto P_0. Il valore di δ verrà precisato più avanti.

Consideriamo un sistema di coordinate avente come origine il punto P_0 e avente l'asse z diretto lungo la normale esterna in P_0. $M(x, y, z)$ sia un punto arbitrario che si trova a distanza $MP_0 < \delta$ dal punto $P_0(0, 0, 0)$. Indichiamo con Σ_1' la proiezione di Σ_1 sul piano (x, y) e con $K_{2\delta}^{M'}$ il cerchio di raggio 2δ e centro nel punto $M'(x, y, 0)$, contenente interamente il dominio Σ_1'. Supponendo che la funzione sia limitata:

$$|\mu(P)| < A$$

e tenendo conto che

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

e

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geqslant \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

otteniamo

$$|V_1(M)| < A\iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A\iint_{\Sigma_1'} \frac{d\sigma'/\cos\gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2A\iint_{\Sigma_1'} \frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \leqslant 2A\iint_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

se δ è così piccolo che $\cos\gamma > 1/2$.

Introduciamo nel piano (x, y) un sistema di coordinate polari (ρ, φ) avente come origine il punto M'. Allora si può scrivere

$$|V_1(M)| < 2A\iint_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} =$$

$$= 2A\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

Considerando $\delta = \varepsilon/8\pi A$, avremo

$$|V_1(M)| < \varepsilon$$

se $MP_0 < \delta$. Di conseguenza, $V(M)$ converge uniformemente in ogni punto $P_0 \in \Sigma$ e rappresenta una funzione continua in questo punto.

Passiamo ora allo studio del comportamento delle derivate del potenziale a strato semplice sulla superficie. Mostriamo che esse hanno su Σ una discontinuità dello stesso tipo del potenziale a strato doppio.

Le derivate normali esterna ed interna della funzione V, $\frac{dV}{dn_{\text{est}}}$ e $\frac{dV}{dn_{\text{int}}}$, sono definite nel seguente modo. Sia P_0 un punto su Σ. Dal punto P_0 tracciamo l'asse z che può essere diretto sia lungo la normale esterna sia lungo quella interna.

Consideriamo la derivata $\frac{dV}{dz}$ in un punto M dell'asse z. Indichiamo con $\left(\frac{dV}{dz}\right)_{\text{int}}$ e $\left(\frac{dV}{dz}\right)_{\text{est}}$ i limiti della derivata $\frac{dV}{dz}$ quando il punto M tende a P_0 dalla parte interna o esterna della superficie Σ. Se l'asse z è diretto lungo la normale esterna (interna) questi valori si chiamano valori limite interno e esterno della derivata sulla normale esterna (interna) nel punto P_0 *).

---

*) Il limite del rapporto incrementale $\frac{V(M) - V(P_0)}{MP_0}$ per $M \to P_0$ è uguale al limite esterno per la derivata sulla normale esterna o al limite interno per la derivata sulla normale interna, in dipendenza da quale parte il punto M tende al punto P_0.

Studiamo le discontinuità della derivata normale interna del potenziale a strato semplice sulla superficie Σ. La derivata $\frac{dV}{dz}$ nel punto M dell'asse z diretto lungo la normale interna vale

$$\frac{dV}{dz}(M) = \int_{\Sigma}\int \mu(P)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \int_{\Sigma}\int \frac{\cos\psi}{R^2_{MP}}\,\mu(P)\,d\sigma_P, \qquad (44)$$

dove ψ è l'angolo formato dall'asse z con il vettore $\overrightarrow{MP}$. Dal punto P (fig. 63) tracciamo la normale PQ e la retta PN parallela all'asse z (alla normale nel punto P_0) e indichiamo con θ l'angolo NPQ

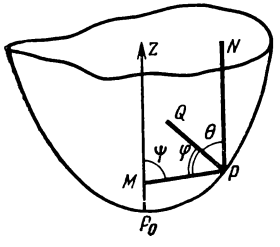


Fig. 63

pari all'angolo fra le normali nei punti P e P_0 *). L'espressione del potenziale a strato doppio $W(M)$ contiene il fattore $\frac{\cos\varphi}{R^2}$, dove $\varphi = \angle MPQ$. Poiché l'angolo MPN vale $\pi - \psi$, allora

$$\cos(\pi - \psi) = \cos\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\Omega = -\cos\psi,$$

dove Ω è un angolo diedro di spigolo PQ **). Ne segue che

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = -\int_{\Sigma}\int (\mu\cos\theta)\,\frac{\cos\varphi}{R^2}\,d\sigma -$$

$$-\int_{\Sigma}\int \mu\operatorname{sen}\theta\cos\Omega\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R^2}\,d\sigma = -W_1 - I(M), \qquad (45)$$

---

*) È evidente che θ e sen θ tendono a zero per $P \to P_0$. Se la superficie è a curvatura finita nell'intorno del punto P_0, cioè se la sua equazione si può scrivere nella forma

$$z = f(x, y),$$

dove $f(x, y)$ ha le derivate seconde, allora sen θ sarà una funzione derivabile di x, y e, quindi,

$$\operatorname{sen}\theta < Ar$$

(per le superfici di Ljapunov sen $\theta < Ar^{\delta}$).

**) Se la direzione PQ è assunta come asse di un nuovo sistema sferico, questa espressione coincide con la formula (13) di pag. 332.

dove $W_1(M)$ è il potenziale a strato doppio con densità $\mu_1 = \mu \cos\theta$ e avente una discontinuità sulla superficie Σ. È evidente che l'integrale $I(M)$ rappresenta una funzione continua nel punto P_0 poiché $I(M)$ converge uniformemente in questo punto (si veda la nota alla pag. 365).

Tornando alla formula (45) vediamo che

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{int}} &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{est}} &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0).\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Indichiamo

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) = \left[-\int_\Sigma\int (\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}\,d\sigma - \right.$$

$$\left. - \int_\Sigma\int \mu \operatorname{sen}\theta\cos\Omega\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R^2}\,d\sigma\right]_{M=P_0} = \int_\Sigma\int \mu\frac{\cos\psi_0}{R^2_{P_0P}}\,d\sigma,$$

dove ψ_0 è l'angolo fra l'asse z e il vettore $\overrightarrow{P_0P}$.

Osservando che $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$, troviamo

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{int}}}\right)_{\text{int}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{int}}}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{int}}}\right)_{\text{est}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{int}}}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

poiché l'asse z è diretto per ipotesi lungo la normale interna. Se l'asse z coincide con la normale esterna, allora $\cos\psi$ cambia di segno, e noi otteniamo

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{est}}}\right)_{\text{int}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{est}}}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{est}}}\right)_{\text{est}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{est}}}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0).\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Nel caso di due variabili sussistono formule analoghe in cui 2π va sostituito con π.

10. Applicazione dei potenziali superficiali alla soluzione dei problemi ai limiti. Il metodo di separazione delle variabili e il metodo della funzione di sorgente consentono di ottenere un'espressione esplicita per la soluzione dei problemi ai limiti nel solo caso di domini di tipo elementare. L'applicazione dei potenziali superficiali dà la possibilità di ridurre i problemi ai limiti per l'equazione di Laplace (o di Poisson) alle equazioni integrali; da una parte, ciò è comodo per lo studio teorico della questione inerente alla risolubilità e l'unicità dei problemi ai limiti e, d'altra parte, permette di ottenere una soluzione numerica efficace dei problemi ai limiti per domini di forma complicata. Consideriamo il problema ai limiti interno per un contorno C:

trovare la funzione u, armonica nel dominio T delimitato dal contorno C, soddisfacente su C alle condizioni al contorno

$u\,|_C = f$, *primo problema ai limiti,*

oppure

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = f$, *secondo problema ai limiti.*

È analoga l'impostazione dei problemi ai limiti esterni *).

Cercheremo la soluzione del primo problema ai limiti interno nella forma di potenziale a strato doppio

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\,\nu(P)\,ds_P = -\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)\,ds_P.$$

Qualunque sia $\nu(P)$, la funzione $W(M)$ verifica l'equazione di Laplace all'interno di C. La funzione $W(M)$ è discontinua sul contorno C. Affinché sia soddisfatta la condizione al contorno, è necessario, evidentemente, che sia

$$W_{\text{int}}(P_0) = f(P_0).$$

Tenendo conto delle formule (39), otteniamo l'equazione seguente che serve a definire la funzione $\nu(P)$:

$$\pi\nu(P_0) + \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{P_0P}}\,\nu(P)\,ds_P = f(P_0). \tag{49}$$

Se indichiamo con s_0 e s gli archi del contorno C corrispondenti ai punti P_0 e P, possiamo riscrivere l'equazione (49) nella forma

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0), \tag{50}$$

dove L è la lunghezza del contorno C e

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}} \tag{51}$$

è il nucleo di questa equazione integrale, che è un'equazione integrale di tipo Fredholm di seconda specie **). Per il problema

*) Nell'impostazione del secondo problema ai limiti, sia interno che esterno, supporremo interna la normale nella condizione al contorno.

**) Le equazioni integrali contenenti integrali con limiti costanti sono dette equazioni di Fredholm:

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \quad \text{di prima specie,}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \quad \text{di seconda specie.}$$

esterno abbiamo l'equazione analoga

$$-\pi\nu(s_0)+\int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \tag{52}$$

Per il secondo problema ai limiti otteniamo le seguenti equazioni:

$$-\pi\mu(s_0)+\int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \quad \text{(problema interno)}, \tag{53}$$

$$\pi\mu(s_0)+\int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \quad \text{(problema esterno)}, \tag{54}$$

dove

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{R_{PP_0}}\ ^{*}), \tag{55}$$

se la soluzione del problema si cerca sotto forma di potenziale a strato semplice

$$u(M) = \int_C \ln\frac{1}{R_{MP}}\,\mu(P)\,ds_P.$$

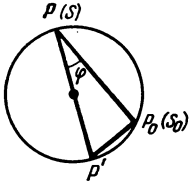


Fig. 64

Le questioni relative alla solubilità di queste equazioni verranno esaminate al n. 11 del presente paragrafo.

Consideriamo i problemi ai limiti per alcuni domini elementari per cui le equazioni integrali corrispondenti si risolvono facilmente.

1. *Primo problema ai limiti per il cerchio.* Se il contorno C è una circonferenza di raggio R, la normale interna nel punto P coincide con il diametro e

$$\frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}} = \frac{1}{2R},$$

poiché φ è l'angolo P_0PP' (fig. 64). L'equazione integrale per la funzione ν è

$$\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\,\nu(s)\,ds = \frac{1}{\pi}f(s_0). \tag{56}$$

È facile vedere che la sua soluzione è rappresentata dalla funzione

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi}f(s)+A, \tag{57}$$

*) È facile vedere che $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$. Tali nuclei si dicono *coniugati* e le equazioni corrispondenti, equazioni integrali coniugate.

dove A è una costante da determinare. Sostituendo la presunta forma della soluzione nell'equazione (56), abbiamo

$$\frac{1}{\pi} f(s_0) + A + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\pi} f(s) + A \right) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0),$$

da cui ricaviamo per la costante A l'espressione fornita dalla funzione assegnata

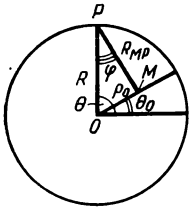


Fig. 65

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds.$$

Quindi,

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \tag{58}$$

è la soluzione dell'equazione integrale (56).

Il potenziale a strato doppio corrispondente vale

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \left[\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \right] ds.$$

Trasformiamo il secondo membro di questa formula, supponendo che M si trovi all'interno del contorno C:

$$W = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \right) \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \right) \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos\varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} \right) f(s)\, ds. \tag{59}$$

Si vede da ΔOPM (fig. 65) che

$$K = \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} = \frac{2R\cos\varphi - R_{MP}}{2RR_{MP}} = \frac{2RR_{MP}\cos\varphi - R_{MP}^2}{2RR_{MP}^2} =$$

$$= \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R\left[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_0)\right]}, \tag{60}$$

poiché

$$\rho_0^2 = R^2 + R_{MP}^2 - 2RR_{MP}\cos\varphi.$$

Sostituendo l'espressione (60) di K nella formula (59), otteniamo l'integrale di Poisson

$$u = W(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2) f(\theta)\, d\theta}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{61}$$

che fornisce la soluzione del primo problema ai limiti per il cerchio.

Dai ragionamenti sopra esposti risulta che per ogni funzione continua f la formula (61) definisce una funzione armonica tendente con continuità ai valori al contorno f.

Se la funzione f è continua a tratti, allora, in virtù della proprietà del potenziale a strato doppio, anche la funzione W è continua in tutti i punti di continuità di f. Dalla limitatezza di f

$$|f| < C$$

segue la limitatezza della funzione (61)

$$|W(\rho_0, \theta_0)| < C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = C,$$

poiché *)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = 1. \tag{62}$$

2. *Primo problema ai limiti per il semispazio*: trovare una funzione armonica continua ovunque nel dominio $z \geqslant 0$ e avente sulla frontiera $z = 0$ un valore dato $f(x, y)$.

Cercheremo la soluzione di questo problema sotto forma di potenziale a strato doppio

$$W(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\cos \varphi}{R^2} \nu(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2.$$

In questo caso

$$\frac{\cos \varphi}{R^2} = \frac{z}{R^3} \frac{z}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

e il nucleo dell'equazione integrale è

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{R^2} \right)_{z=0} = 0.$$

Quindi, la densità del potenziale a strato doppio è

$$\nu(P) = \frac{1}{2\pi} f(P)$$

e la funzione cercata vale

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{z}{[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

---

*) L'uguaglianza (62) è dovuta al fatto che il primo membro rappresenta la soluzione del primo problema ai limiti per $f = 1$.

È facile mostrare che $u(x, y, z)$ tende uniformemente a zero per $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$, se di questa proprietà gode la funzione f.

11. Equazioni integrali corrispondenti ai problemi ai limiti. Nel risolvere i problemi ai limiti per l'equazione di Laplace mediante i potenziali a strato semplice e doppio siamo giunti alle equazioni integrali di Fredholm di seconda specie (50).

Le condizioni di risolubilità delle equazioni integrali di Fredholm di seconda specie a nucleo continuo e secondo membro limitato (integrabile) sono simili alle condizioni di risolubilità dei sistemi di equazioni algebriche lineari (alle quali si riducono se l'integrale viene sostituito con la somma integrale). Il primo teorema di Fredholm afferma quanto segue:

un'equazione integrale non omogenea di seconda specie ha una soluzione, unica, se l'equazione omogenea corrispondente ha la sola soluzione nulla *).

---

*) La teoria di Fredholm è applicabile direttamente alle curve di curvatura limitata poiché il nucleo dell'equazione integrale (50) è continuo.

La teoria di Fredholm è applicabile anche al caso in cui è continuo uno dei *nuclei iterati*:

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2) = \iint_{\Sigma} K^{(1)}(P_1, M)\, K^{(n)}(M, P_2)\, d\sigma_M,$$

$$K^{(1)}(P, M) = K(P, M).$$

Dimostriamo che se Σ è una superficie di Ljapunov, i nuclei iterati dell'equazione in esame sono continui a partire da un certo indice. Come abbiamo visto, per le superfici di Ljapunov vale

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\delta}}.$$

I nuclei iterati si possono rappresentare nella forma

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \iint_{\Sigma} K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, d\sigma_M.$$

Mostriamo che se $|K_i| < \dfrac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}$ $(r_i = P_iM;\ \alpha_i > 0;\ i = 1, 2)$, allora

$$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, \quad \text{se} \quad \alpha_1+\alpha_2 < 2, \quad r = P_1P_2.$$

È evidente che è sufficiente stabilire questa stima nel caso in cui P_2 giace nell'intorno di Ljapunov Σ_0 del punto P_1 e quanto in luogo dell'integrale esteso a Σ_0 si può considerare l'integrale esteso alla proiezione S_0 di questo intorno sul piano tangente nel punto P_1 in virtù del fatto che

$$1 \geqslant \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} \geqslant B > 0$$

(dove $\rho(P, M)$ è la distanza fra le proiezioni dei punti P e M sul piano tangente, e B è una costante) e anche in virtù del legame esistente fra l'elemento

di superficie $d\sigma$ e la sua proiezione dS: $d\sigma = dS/\cos\gamma$, dove secondo la formula (34) $\cos\gamma > 1/2$.

Per un dominio piano sussiste il seguente lemma:

$$se \quad |K_i| < \frac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}, \quad allora$$

$$|I| = \left| \iint\limits_{S_0} K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, dx\, dy \right| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Indichiamo con R il diametro del dominio S_0 e dividiamo in due integrali l'integrale I: I_1 esteso al cerchio G_1 di raggio $2r$ e centro nel punto P_1 ed I_2

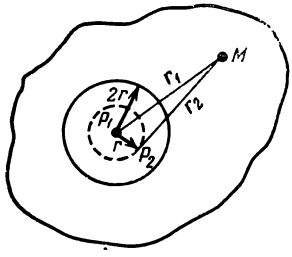


Fig. 66

esteso al dominio restante G_2 (fig. 66). Poiché per i punti M appartenenti a G_2 abbiamo

$$2 \geqslant \frac{r_1}{r_2} \geqslant \frac{2}{3} \qquad \left(\begin{array}{l} r_1 \leqslant r_2 + r \leqslant 2r_2, \\ r_2 \leqslant r_1 + r \leqslant r_1 + \dfrac{r_1}{2} = \dfrac{3r_1}{2} \end{array} \right),$$

per l'integrale I_2 otteniamo la seguente stima:

$$|I_2| < 4C_1C_2 \left| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{2r}^{R} \frac{1}{r_1^{4-\alpha_1-\alpha_2}}\, r_1\, dr_1\, d\varphi \right| <$$

$$< \begin{cases} \dfrac{C_3}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1+\alpha_2 < 2, \\ C_3 R^{\alpha_1+\alpha_2-1}, & \alpha_1+\alpha_2 > 2. \end{cases}$$

Effettuando nell'integrale su G_1 il cambiamento di variabili $x = rx'$ e $y = ry'$, otteniamo

$$|I_1| < \left| \frac{1}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}} \iint\limits_{G_1'} \frac{C_1C_2}{r_1'^{2-\alpha_1} r_2'^{2-\alpha_2}}\, dx'\, dy' \right|.$$

Nell'ultimo integrale esteso al cerchio G_1' di raggio $2r$ la grandezza r_1' rappresenta la distanza dal centro, r_2' la distanza dalla metà del raggio; di conseguenza, questo integrale è convergente e, fra l'altro, non dipende dalla posizione del punto P_2, cioè è indipendente da r.

Dimostriamo, partendo dal suddetto teorema, l'unicità della soluzione dell'equazione integrale (50).

Limitiamoci alla considerazione di contorni convessi non contenenti tratti di frontiera rettilinei. In questo caso il nucleo $K(P_0, P)$ dell'equazione (50) non è negativo poiché

$$K(P_0, P)\, ds_P = d\omega,$$

dove $d\omega$ è l'angolo sotto cui si vede l'arco dS_P dal punto P_0.

Consideriamo anzitutto il primo problema ai limiti per il dominio interno. L'equazione omogenea corrispondente alla (50) ha la forma

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = 0. \tag{63}$$

Come abbiamo già visto (si veda il n. 8), si verifica l'uguaglianza

$$\int_0^L K(s_0, s)\,ds = \pi,$$

la quale consente di scrivere l'equazione omogenea (63) nella forma

$$\int_0^L [\nu(s_0) + \nu(s)]\,K(s_0, s)\,ds = 0. \tag{64}$$

Sia $P_0^*\ (s_0^*)$ un punto sul contorno C in cui la funzione $|\nu(s)|$ ha un suo massimo. Ne segue che la somma $\nu(s_0^*) + \nu(s)$ è di segno costante. Allora, ponendo nella (64) $s_0 = s_0^*$ e tenendo conto che $K(s_0, s) \geqslant 0$, otteniamo l'uguaglianza

$$\nu(s_0^*) + \nu(s) = 0$$

ossia

$$\nu(s) = -\nu(s_0^*),$$

che contraddice la continuità nel punto s_0^* purché sia $\nu(s_0^*) \neq 0$.

Ne segue che

$$|I_1| < \frac{C_4}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Ponendo $C_3 + C_4 = C$, otteniamo la disuguaglianza cercata

$$|I| < \begin{cases} \dfrac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1 + \alpha_2 < 2, \\ CR^{\alpha_1+\alpha_2-2}, & \alpha_1 + \alpha_2 > 2. \end{cases}$$

Di qui risulta che, a partire da un certo indice, gli integrali che generano nuclei iterati sono limitati e uniformemente convergenti, sono cioè funzioni continue dei loro argomenti.

Di conseguenza, l'equazione omogenea (63) ha la sola soluzione nulla e, quindi, l'equazione non omogenea ha un'unica soluzione qualunque sia la funzione f *).

Il secondo problema ai limiti esterno si riduce, come abbiamo visto (cfr. n. 10), all'equazione integrale

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0), \tag{54}$$

il cui nucleo $K_1(s_0, s)$ è coniugato con il nucleo $K(s_0, s)$, cioè $K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$.

Il secondo teorema di Fredholm afferma quanto segue:

il numero di soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione integrale omogenea è pari al numero di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione coniugata.

Da questo teorema segue che la soluzione dell'equazione (54) è definita univocamente.

Al primo problema ai limiti esterno corrisponde l'equazione

$$-\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \tag{52}$$

Un'equazione omogenea ($f = 0$) può essere ridotta, in accordo con quanto detto prima, alla forma

$$\int_0^L [\nu(s_0) - \nu(s)]\,K(s_0, s)\,ds = 0. \tag{65}$$

Indicando con s_0^* il punto di massimo della funzione $|\nu(s)|$, dalla (65) ricaviamo

$$\nu(s^*) = \nu(s).$$

Ne segue che

$$\nu(s) = \text{costante} = \nu_0$$

è l'unica soluzione dell'equazione omogenea. In virtù del secondo teorema di Fredholm l'equazione omogenea coniugata avrà un'unica soluzione.

La condizione di risolubilità di un'equazione non omogenea è data dal terzo teorema di Fredholm che dice:

se un'equazione integrale non omogenea

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

*) Se esistono tratti di frontiera rettilinei, il ragionamento si rende più complicato sebbene possa essere portato a conclusione senza eccessive difficoltà.

ha k soluzioni linearmente indipendenti $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *allora l'equazione non omogenea coniugata*

$$\psi(x) = \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds + f(x)$$

ha soluzione se $\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k.$

Applicando il terzo teorema di Fredholm all'equazione (53) corrispondente al secondo problema ai limiti interno, otteniamo la condizione di risolubilità di questo problema

$$\int_0^L f(s)\,ds = 0, \tag{66}$$

con la quale abbiamo avuto già a che fare nel § 1.

La condizione di risolubilità del primo problema ai limiti esterno ha la forma

$$\int_0^L f(s)\,h(s)\,ds = 0, \tag{67}$$

dove $h(s)$ è la soluzione dell'equazione omogenea corrispondente alla (53). Non è difficile capire il significato fisico di questa funzione.

Supponiamo che un conduttore cilindrico avente sezione di forma S sia carico fino a un potenziale V_0. Tutta la carica si trova sulla superficie del conduttore. Indichiamo con $\bar{h}(s)$ la densità di cariche superficiali. Il potenziale creato da queste cariche superficiali è potenziale a strato semplice con densità $\bar{h}(s)$ ed è espresso dalla formula (29). Le sue derivate normali dal di dentro sono nulle poiché all'interno del conduttore V = costante. Perciò la funzione $\bar{h}(s)$ verifica l'equazione omogenea (53) ed è proporzionale alla funzione $h(s)$ sopra definita, da cui il significato fisico di questa funzione.

Quindi, le equazioni integrali alle quali si riducono i problemi ai limiti sono sempre risolubili per il problema interno e per il secondo problema esterno; esse sono risolubili sotto le condizioni (66) e (67) per il secondo problema interno e per il primo problema esterno *).

Problemi al capitolo IV

1. Definire una funzione u, armonica all'interno del cerchio di raggio a e avente sulla circonferenza C i valori:

*) Si veda più in dettaglio I. G. Petrovskij, *Sulle equazioni alle derivate parziali*, § 39, Fizmatgiz, Mosca, 1961 (ed. russa).

a) $u|_C = A\cos\varphi$;
b) $u|_C = A + B\,\text{sen}\,\varphi$.

2. Risolvere l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ all'interno del rettangolo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ sotto le condizioni al contorno

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{y=0} = f_2(x), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

Dimostrare che le formule così ottenute danno la soluzione del problema per una qualsiasi funzione continua a tratti data sulla frontiera.

Risolvere il problema nel caso particolare

$$f_1(y) = Ay(b-y), \quad f_2(x) = B\cos\frac{\pi}{2a}x, \quad f_3 = f_4 = 0.$$

3. Risolvere l'equazione $\Delta u = 1$ per un cerchio di raggio a sotto la condizione al contorno $u|_{r=a} = 0$.

4. Risolvere l'equazione $\Delta u = Axy$ per un cerchio di raggio a e centro nel punto (0, 0) sotto la condizione al contorno $u|_{r=a} = 0$.

5. Risolvere l'equazione $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ nella corona circolare $a \leqslant \rho \leqslant b$ se

$$u|_{\rho=a} = A_1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0.$$

L'origine delle coordinate coincide con il centro della corona.

6. Costruire la funzione di sorgente per l'equazione di Laplace (primo problema ai limiti): a) per il semicerchio; b) per la corona circolare; c) per lo strato $(0 \leqslant z \leqslant l)$.

7. Definire una funzione armonica all'interno della corona circolare $a \leqslant \rho \leqslant b$ soddisfacente alle condizioni al contorno seguenti:

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

8. Risolvere l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ nel semipiano $y \geqslant 0$ con la condizione al contorno

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0, \\ u_0 & \text{per} \quad x > 0. \end{cases}$$

9. Definire una funzione $u(\rho, \varphi)$, armonica all'interno del settore circolare $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, sotto le condizioni al contorno:

a) $u|_{\varphi=0} = q_1$, $u|_{\varphi=\varphi_0} = q_1$, $u|_{\rho=a} = q_2$; dove q_1, q_2 sono costanti;

b) $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$.

10. Risolvere con il metodo delle differenze finite il primo problema ai limiti per l'equazione $\Delta u = 0$ all'interno del rettangolo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ dividendo ciascuno dei suoi lati in 8 parti uguali, se le condizioni al contorno hanno la forma

$$u|_{x=0} = \frac{y}{b}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad u|_{y=b} = \frac{x}{a}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{a}x, \quad u|_{x=a} = u|_{y=0} = 0.$$

Confrontare con la soluzione analitica (si veda Complemento I, § 3).

11. Definire il potenziale volumetrico della sfera di densità costante $\rho = \rho_0$.

Suggerimento. Risolvere l'equazione $\Delta u = 0$ all'esterno della sfera, $\Delta u = 4\pi\rho_0$ all'interno della sfera e coniugare le soluzioni sulla superficie sferica.

12. Definire il potenziale a strato semplice distribuito con densità costante $\nu = \nu_0$ sulla sfera.

Suggerimento. Cercare la soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$ all'esterno e all'interno della sfera e per la coniugazione usare le condizioni di discontinuità della derivata del potenziale a strato semplice.

12. Risolvere il primo problema ai limiti per un cilindro circolare limitato ($\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant l$):

a) sulle basi del cilindro sono assegnate condizioni al contorno nulle (di prima o seconda specie) e sulla superficie laterale

$u|_{\rho=a} = f(z)$;

b) sulla superficie laterale e su una delle basi sono assegnate condizioni al contorno nulle (di prima e seconda specie) e sull'altra base del cilindro

$u = f(\rho)$,

$f(\rho) = A\rho\left(1-\frac{\rho}{a}\right)$ ad esempio.

14. Risolvere l'equazione non omogenea

$\Delta u = -f$

in un dominio cilindrico illimitato sotto condizioni al contorno nulle (di prima o seconda specie) e costruire la funzione di sorgente.

15. Definire una funzione armonica all'interno della sfera, uguale a u_1 in una metà della sfera e a u_2 nell'altra.

16. Sviluppare in funzioni sferiche la densità di cariche superficiali indotte sulla sfera conduttrice dalla carica puntuale.

17. Risolvere il problema della polarizzazione di una sfera dielettrica nel campo della carica puntuale.

18. Calcolare il potenziale gravitazionale di un disco piano. Confrontare con la rappresentazione asintotica del potenziale gravitazionale a grande distanza.

19. Calcolare il potenziale magnetico di una corrente circolare.

20. Risolvere il problema della perturbazione del campo elettrico parallelo di una sfera conduttrice perfetta. Risolvere lo stesso problema per una sfera assolutamente non conduttrice.

APPENDICI AL CAPITOLO IV

I. *Espressione asintotica del potenziale volumetrico*

Studiando il potenziale volumetrico

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)\, d\tau_P}{d}, \quad \text{dove } d = R_{MP} \tag{1}$$

a grandi distanze dal corpo si suole supporne i valori uguali a m/R, dove m è la massa del corpo T e R la distanza del suo baricentro dal punto d'osservazione. Stabiliamo un'espressione asintotica più precisa per V *).

Σ sia una sfera con centro nell'origine delle coordinate, contenente interamente il corpo T. All'esterno di questa sfera il potenziale sarà una funzione armonica.

La distanza fra il punto d'osservazione $M(x, y, z)$ e un punto variabile all'interno del corpo $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (fig. 67) in cui si

*) V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. III, Editori Riuniti, Roma, 1978.

integra vale

$$d = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\theta}$$
$$(r = OM,\ r_1 = OM_1), \tag{2}$$

da cui

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\mu}};$$
$$\alpha = r_1/r; \quad \mu = \cos\theta. \tag{3}$$

Siccome $r_1 < r$, allora $\alpha < 1$ e perciò è legittimo lo sviluppo (si veda Complemento II, parte 2, § 1)

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu), \tag{4}$$

dove $P_n(\mu)$ è il polinomio di Legendre di ordine n (si veda Complemento II, parte 2, § 1). Sostituendo questa espressione nella

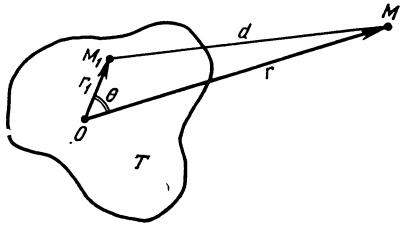


Fig. 67

formula (1) e tenendo presente che $1/r$ non dipende dalle variabili di integrazione, otteniamo

$$V(M) = \frac{1}{r} \iiint_T \rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu)\, d\tau = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{r} \iiint_T \rho\, d\tau + \frac{1}{r^2} \iiint_T \rho r_1 P_1(\mu)\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{r^3} \iiint_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\, d\tau + \ldots \tag{5}$$

Il primo termine è uguale a m/r, dove m è la massa del corpo interno, e dà una prima approssimazione per il calcolo del potenziale per r grande.

Passiamo ora al calcolo dei termini successivi dello sviluppo (5). L'espressione integranda del secondo termine vale

$$\rho P_1(\mu)\, r_1 = \rho\mu r_1 = \rho r_1 \cos\theta = \frac{\rho x x_1 + \rho y y_1 + \rho z z_1}{r}.$$

Le grandezze x, y, z e r non dipendono dalle variabili di integrazione e si possono portare fuori dal segno di integrale. Dopo questa operazione il secondo termine dello sviluppo del potenziale diventa

$$\frac{1}{r^2}\int\int_T\int \rho r_1 P_1(\mu)\, d\tau = \frac{1}{r^3}(M_1 x + M_2 y + M_3 z) = \frac{M}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}),$$

dove

$$M_1 = \int\int_T\int \rho x_1\, d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \int\int_T\int \rho y_1\, d\tau = M\bar{y};$$

$$M_3 = \int\int_T\int \rho z_1\, d\tau = M\bar{z}$$

sono momenti del primo ordine, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sono le coordinate del baricentro. Quindi, il secondo termine decresce come $1/r^2$. Se l'origine delle coordinate coincide con il baricentro ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$), allora $V_2 = 0$.

Consideriamo il terzo termine dello sviluppo. Trasformiamo l'espressione integranda

$$\rho r_1^2 P_2(\mu) = \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(x x_1 + y y_1 + z z_1)^2 - r_1^2 r^2}{2 r_1^2 r^2} =$$

$$= \frac{\rho}{2r^2}[3(x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 - r_1^2 r^2].$$

Introducendo le notazioni

$$M_{ik} = \int\int_T\int \rho x_i x_k\, d\tau \quad (x = x_1;\ y = x_2;\ z = x_3),$$

otteniamo la seguente espressione per V_3:

$$V_3 = \frac{1}{r^3}\int\int_T\int \rho r_1^2 P_2(\mu)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2r^5}\{x^2[3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$

$$+ y^2[3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + z^2[3M_{33} -$$

$$- (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + 2\cdot 3xyM_{12} + 2\cdot 3xzM_{13} + 2\cdot 3yzM_{23}\}.$$

Il polinomio fra parentesi graffa è un polinomio armonico poiché lo si può scrivere nella forma

$$V_3 = \frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)[M_{11}-M_{22}]-(z^2-x^2)[M_{11}-M_{33}]+$$
$$+(y^2-z^2)[M_{22}-M_{33}]+6[xyM_{12}+xzM_{13}+yzM_{23}]\},$$

dove ciascun termine verifica l'equazione di Laplace. I coefficienti fra parentesi quadra si esprimono in funzione dei *momenti di inerzia*. Come è noto, il momento di inerzia del corpo T relativamente all'asse x vale

$$A = \int\int\int_T \rho\,(y_1^2+z_1^2)\,d\tau = M_{22}+M_{33}.$$

Analogamente i momenti di inerzia relativamente agli assi y e z valgono

$$B = M_{33}+M_{11}; \quad C = M_{11}+M_{22}.$$

Ne segue che

$$M_{11}-M_{22} = B-A; \quad M_{11}-M_{33} = C-A;$$
$$M_{22}-M_{33} = C-B.$$

Come risultato otteniamo l'espressione asintotica del potenziale

$$V \cong \frac{m}{r}+\frac{m}{r^3}(x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z})+\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)(B-A)+$$
$$+(y^2-z^2)(C-B)+(z^2-x^2)(A-C)+$$
$$+6(xyM_{12}+yzM_{23}+zxM_{31})\}, \qquad (6)$$

valida a meno di termini dell'ordine di $1/r^6$.

L'espressione (6) si semplifica se l'origine delle coordinate coincide con il baricentro e gli assi coordinati sono diretti lungo gli assi principali di inerzia:

$$V \cong \frac{m}{r}+\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)(B-A)+(y^2-z^2)(C-B)+$$
$$+(z^2-x^2)(A-C)\}. \qquad (7)$$

L'espressione asintotica del potenziale così ottenuta permette di rispondere ad alcuni quesiti del problema inverso della teoria del potenziale, che consiste nella definizione delle caratteristiche del corpo in base al suo potenziale (o ad alcune sue derivate).

Infatti, se sono definiti i coefficienti dello sviluppo (6), si possono trovare la massa, le coordinate del baricentro e i momenti di inerzia del corpo.

II. *Problemi elettrostatici*

Nei problemi elettrostatici la risoluzione delle equazioni di Maxwell si riduce alla ricerca di una sola funzione scalare, ossia del potenziale φ, legata all'intensità del campo dalla relazione $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\,\varphi$.

Usando le equazioni di Maxwell

$$\text{div}\,\boldsymbol{E} = -4\pi\rho,$$

otteniamo

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

In tal modo, il potenziale verifica l'equazione di Poisson nei punti dello spazio in cui si trovano le cariche elettriche, e l'equazione di Laplace nei punti in cui queste cariche non esistono.

1. Il *problema elettrostatico fondamentale* consiste nella ricerca del campo creato da un sistema di cariche in conduttori dati. Sono possibili due impostazioni diverse di questo problema.

I. Sono assegnati i potenziali dei conduttori e si chiede di determinare il campo all'esterno dei conduttori e la densità di carica nei conduttori. La formulazione matematica del problema è la seguente:

determinare una funzione φ *che verifica l'equazione di Laplace* $\Delta\varphi = 0$ *ovunque all'esterno di un dato sistema di conduttori, che sia nulla all'infinito e abbia dati valori* φ_i *sulle superfici dei conduttori* S_i:

$$\varphi\,|_{S_i} = \varphi_i, \quad \varphi_i = \text{costante}.$$

In questo caso arriviamo così al primo problema ai limiti per l'equazione di Laplace. L'unicità della sua soluzione deriva dalla teoria generale.

II. È possibile anche un'impostazione inversa del problema. Nei conduttori sono assegnate cariche totali. Si chiede di determinare i potenziali dei conduttori, la distribuzione di carica sulle loro superfici e il campo all'esterno dei conduttori. La soluzione di questo problema si riduce alla ricerca della *funzione* φ *che verifichi l'equazione di Laplace*

$$\Delta\varphi = 0$$

all'esterno del sistema di conduttori dati, si annulli all'infinito, assuma sulle superifici dei conduttori alcuni valori costanti

$$\varphi\,|_{S_i} = \text{costante}$$

e soddisfi sulla superficie dei conduttori alla relazione integrale

$$\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi e_i,$$

dove e_i *è la carica totale dell'i-esimo conduttore.*

2. L'unicità della soluzione del secondo problema non deriva dalla teoria generale, ma può essere facilmente dimostrata.

Supponiamo che esistano due soluzioni distinte φ_1 e φ_2 del problema II. Allora la loro differenza

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

verificherà l'equazione

$$\Delta\varphi' = 0$$

e le condizioni

$$\varphi' |_{S_i} = \text{costante}, \qquad \oint_{S_i} \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \varphi' |_\infty = 0.$$

Collochiamo tutti i conduttori dati all'interno di una sfera Σ_R di raggio R sufficientemente grande e applichiamo alla funzione φ' la prima formula di Green nel dominio T_R delimitato dalla sfera Σ_R e dalle superfici dei conduttori S_i:

$$\int_{T_R} (\nabla\varphi')^2 d\tau = \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma.$$

In virtù delle condizioni all'infinito *) e sulle superfici, otteniamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{T_R} (\nabla\varphi')^2 d\tau = 0,$$

da cui, essendo positiva l'espressione integranda, segue che

$$\nabla\varphi' = 0 \quad \text{oppure} \quad \varphi' = \text{costante}$$

ovunque nel dominio considerato. Tenendo conto della condizione all'infinito $\varphi' |_\infty = 0$, otteniamo

$$\varphi' \equiv 0,$$

ciò che dimostra l'unicità del problema posto.

3. Dall'unicità della soluzione del problema ai limiti per l'equazione di Laplace deriva che *il potenziale di un conduttore isolato è direttamente proporzionale alla carica che gli è stata trasmessa*

$$\frac{e}{\varphi} = C.$$

Infatti, se sul conduttore isolato sono collocate le cariche e ed $e' = me$, i potenziali corrispondenti φ e φ' devono verificare le

*) Dalla condizione $\varphi' |_\infty = 0$ deriva la regolarità della funzione φ' all'infinito (si veda la pag. 308) per cui

$$\int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma \to 0 \quad \text{per} \quad R \to \infty.$$

equazioni

$$\Delta\varphi = 0; \quad \Delta\varphi' = 0$$

e le condizioni al contorno

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = e; \quad -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma = me,$$

da cui deriva $\varphi' - m\varphi = 0$, ossia $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{e'}{e}$.

Sulla superficie di un conduttore isolato si ha

$$\frac{e'}{\varphi'} = \frac{e}{\varphi} = C = \text{costante}.$$

Questa costante C si chiama *capacità* del conduttore isolato. Essa non dipende dalla carica del conduttore, ma viene definita dalla forma e dalle dimensioni di quest'ultimo. Quindi, per un conduttore isolato abbiamo la seguente relazione:

$$e = C\varphi, \quad C = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma.$$

La capacità di un conduttore isolato è uguale numericamente alla carica mediante la quale il conduttore acquista un potenziale uguale a 1. Se il conduttore non è isolato, il suo potenziale dipende notevolmente dalla forma e dalla disposizione degli altri conduttori. Per un sistema di conduttori hanno luogo le relazioni

$$e_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1),$$
$$e_2 = C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \ldots + C_{nn}\varphi_n,$$

dove e_i e φ_i sono la carica e il potenziale dell'i-esimo conduttore. La grandezza C_{ik} ha il significato di capacità reciproca dell'i-esimo conduttore nei confronti del k-esimo. Essa può essere definita come carica che deve essere trasmessa all'i-esimo conduttore affinché tutti gli altri conduttori, tranne il k-esimo, abbiano potenziale nullo e il k-esimo conduttore abbia potenziale pari a 1.

4. È facile mostrare che *la matrice dei coefficienti* C_{ik} *è simmetrica*, cioè sussistono le relazioni

$$C_{ik} = C_{ki}.$$

Per fissare le idee, consideriamo il caso di due conduttori benché la dimostrazione resti la stessa anche nel caso di n conduttori.

Siano dati due conduttori a e b. Allora la definizione dei coefficienti C_{ab} e C_{ba} si ridurrà alla definizione delle funzioni

$u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ soddisfacenti alle equazioni $\Delta u^{(1)} = 0$ e $\Delta u^{(2)} = 0$ e alle condizioni al contorno

$$u^{(1)}|_{S_a} = 0; \quad u^{(1)}|_{S_b} = 1; \quad u^{(1)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\, d\sigma = e_a^{(1)} = C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a} = 1; \quad u^{(2)}|_{S_b} = 0; \quad u^{(2)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\, d\sigma = e_b^{(2)} = C_{ba}.$$

Tracciamo una sfera Σ_R di raggio R sufficientemente grande, che comprende i due conduttori a e b, e applichiamo la formula di Green alle funzioni $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ nel dominio contenuto fra la superficie di Σ_R e le superfici dei conduttori S_a e S_b

$$\int\limits_{T_R} (u^{(1)}\Delta u^{(2)} - u^{(2)}\Delta u^{(1)})\, d\tau = \int\limits_{\Sigma_R + S_a + S_b} \left(u^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} - u^{(2)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma.$$

L'integrale a primo membro di questa uguaglianza è nullo. Utilizzando le condizioni al contorno e quelle all'infinito, otteniamo

$$\int\limits_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\, d\sigma - \int\limits_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\, d\sigma = 0$$

ossia

$$C_{ab} = C_{ba},$$

come dovevasi dimostrare.

5. Passiamo ad esempi concreti.

Consideriamo il problema del campo di una sfera carica. Supponiamo che sulla superficie di una sfera conduttrice di raggio a sia assegnato il potenziale φ_0. Risolvendo il problema elettrostatico fondamentale 1 è facile mostrare che il campo e la densità di carica sulla superficie saranno dati in questo caso dalle espressioni

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r}\, a \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\varphi_0}{4\pi a}.$$

Se in luogo del potenziale φ_0 sulla superficie sferica è data la carica totale e_0 trasmessa alla sfera, allora

$$\varphi_0 = \frac{e_0}{a}, \quad \sigma = \frac{e_0}{4\pi a^2}, \quad \varphi = \frac{e_0}{r} \quad (r > a).$$

In questo caso la capacità della sfera è

$$C = a$$

vale a dire in unità assolute la capacità di una sfera isolata è uguale numericamente al suo raggio.

Come ulteriore esempio consideriamo il problema del condensatore sferico (sistema di due sfere concentriche conduttrici).

Supponiamo che la sfera interna di raggio r_1 abbia il potenziale dato V_0 e che la sfera esterna di raggio r_2 sia a terra. Allora la definizione del campo all'interno del condensatore si riduce alla ricerca della funzione φ soddisfacente all'equazione

$$\Delta\varphi = 0$$

e alle condizioni

$$\varphi\,|_{r_1} = V_0, \quad \varphi\,|_{r_2} = 0.$$

È facile mostrare che in questo caso

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right),$$

e che la capacità del condensatore sferico vale

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

È molto più complicato il problema di determinare il potenziale di una sfera in presenza di un'altra, non concentrica con quella data. Questo problema si risolve con il metodo delle riflessioni. La sua soluzione analitica è abbastanza complicata e non la diamo qui *).

6. Passiamo ai problemi bidimensionali.

A titolo di esempio consideriamo un condensatore cilindrico formato da due cilindri coassiali indefinitamente lunghi su uno dei quali è distribuita uniformemente una carica elettrica. È evidente che la soluzione del problema è la stessa su tutti i piani paralleli alla sezione normale del cilindro. Pertanto si può considerare come un problema piano e al posto della carica totale assegnare la carica per unità di lunghezza $\varkappa$.

Se il cilindro esterno di raggio r_2 è a terra e se su quello interno di raggio r_1 è assegnata la carica $\varkappa$, il potenziale del campo nel condensatore è dato dall'espressione

$$\varphi = 2\varkappa \ln \frac{r}{r^2},$$

e la capacità dell'unità di lunghezza del condensatore cilindrico vale

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

*) J. Franck, R. Mises, *Differential and Integral Equations in Physics Mathematical*, vol. II.

L'esempio considerato consente di risolvere il problema più complicato di determinare la capacità di un filo passante sopra un piano conduttore. Supponiamo che sopra un piano infinito, alla distanza l, si trovi un filo indefinitamente lungo di raggio ρ sul quale è distribuita una carica di densità $\varkappa$ (carica per unità di lunghezza). È ovvio che anche questo problema può essere risolto come bidimensionale.

III. *Problema fondamentale dell'esplorazione elettrica*

Nello studio della crosta terrestre non omogenea, a scopo esplorativo dei minerali, si applicano largamente metodi elettrici. Lo schema fondamentale dell'esplorazione geologica con corrente costante è il seguente. Gli elettrodi inseriti nel sottosuolo ricevono corrente da una pila di alimentazione elettrica. Le tensioni del campo così creato dalla corrente costante vengono misurate sulla superficie terrestre. Le osservazioni sulla superficie consentono di definire la struttura sotterranea. I metodi per determinare la struttura sotterranea (interpretazione delle osservazioni) sono basati sulla soluzione matematica di problemi corrispondenti.

Il potenziale del campo di una corrente costante in un mezzo omogeneo verifica l'equazione di Laplace

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \tag{1}$$

sotto la condizione aggiuntiva

$$\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \tag{2}$$

la quale significa che la componente verticale della densità di corrente *) sulla superficie (« giornaliera ») $z = 0$ è nulla poiché il semispazio $z < 0$ (aria) non è conduttore.

Consideriamo un elettrodo puntuale sulla frontiera del semispazio nel punto A. È evidente che il potenziale del campo vale

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \tag{3}$$

dove R è la distanza dalla sorgente A, ρ la resistenza specifica del mezzo e I l'intensità della corrente. Questa funzione differisce per il coefficiente 2 dalla funzione di sorgente in virtù della condizione (2).

Misurando la differenza di potenziali nei punti M e N allineati con A mediante un circuito di misura, otteniamo

$$V(M) - V(N) = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r,$$

dove Δr è la distanza fra i punti N e M.

*) Si veda la pag. 284.

Supponendo i punti M e N sufficientemente vicini, abbiamo

$$\frac{V(M)-V(N)}{\Delta r} \cong \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| \cong \frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

dove r è la distanza del punto O (centro del circuito di consumo MN) dall'elettrodo di alimentazione. L'intensità di corrente I nel circuito alimentatore è nota in quanto registrata durante il lavoro. Ne segue che la resistenza del semispazio omogeneo è

$$\rho = \frac{2\pi r^2}{I} \cdot \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|. \tag{4}$$

Se il mezzo non è omogeneo, la grandezza ρ data dalla formula (4) si dice resistenza virtuale e si indica con ρ_k; questa grandezza ρ_k non sarà costante.

Consideriamo il problema del sondaggio elettrico verticale quando gli strati della crosta terrestre sono disposti orizzontalmente e la loro resistenza dipende unicamente dalla profondità $\rho = \rho(z)$.

In questo caso la resistenza virtuale sarà funzione della distanza $r = AO$. Il problema dell'interpretazione dei sondaggi elettrici verticali consiste nel determinare una funzione $\rho(z)$ esprimente il « taglio elettrico » del mezzo in base ai noti valori di $\rho_k(r)$.

Consideriamo in dettaglio il problema di un mezzo a doppio strato quando uno strato omogeneo di intensità l e resistenza ρ_0 giace su un mezzo omogeneo di resistenza ρ_1:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 \text{ per } 0 \leqslant z < l, \\ \rho_1 \text{ per } l < z. \end{cases}$$

È evidente che a distanze esigue $r \ll l$ la resistenza virtuale ρ_k è uguale a ρ_0 poiché l'influenza dello strato sottostante è minima. Per grandi distanze ($r \gg l$) ρ_k sarà uguale a ρ_1.

Quindi, il problema si riduce alla ricerca della soluzione dell'equazione di Laplace V_0 nello strato $0 < z < l$ e V_1 nel semispazio $z > l$. Per $z = l$ devono essere soddisfatte le condizioni di continuità del potenziale

$$V_0 \,|_{z=l} = V_1 \,|_{z=l} \tag{5}$$

e di continuità delle componenti normali della densità di corrente

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial V_0}{\partial z}\bigg|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}\bigg|_{z=l}. \tag{6}$$

Per $z = 0$ il potenziale V_0 deve soddisfare la condizione (2); inoltre, nel punto A considerato come origine delle coordinate cilindriche (r, φ, z), il potenziale V_0 deve avere una singolarità

della forma (3)

$$V_0 = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + v_0, \tag{7}$$

dove v_0 è una funzione limitata.

La funzione V_1 deve essere limitata all'infinito. Le funzioni v_0 e V_1 verificano l'equazione (1) la quale, in virtù della simmetria cilindrica del problema, assume la forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Il metodo di separazione delle variabili dà per V due tipi di soluzione, limitate per $r = 0$:

$$e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r),$$

dove J_0 è la funzione di Bessel d'ordine zero (si veda Complemento II, parte I, § 1) e λ il parametro di separazione. Cercheremo le soluzioni nella forma

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \int_0^\infty (A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

dove A_0, B_0, A_1, B_1 sono costanti. La condizione (2) dà un legame fra A_0 e B_0. Calcoliamo

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 I}{2\pi} \cdot \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} + \int_0^\infty (-\lambda A_0 e^{-\lambda z} + \lambda B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda.$$

La condizione (2) per r qualsiasi diventa

$$\int_0^\infty (B_0 - A_0) J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = 0$$

da cui

$$B_0 = A_0.$$

Dalla condizione di limitatezza di V_1 per $z \to \infty$ risulta

$$B_1 = 0.$$

In tal modo

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty A_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

e

$$V_0(r,\ z) = \int_0^\infty [qe^{-\lambda z} + A_0(e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda;$$

in questo caso abbiamo usato la formula

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda \tag{8}$$

(si veda Complemento II, parte I, § 5) e posto $\frac{\rho_0 I}{2\pi} = q$.

Le costanti restanti A_0 e A_1 vengono definite per $z = l$ mediante le condizioni (5) e (6) che si riducono al sistema di equazioni algebriche

$$A_0(e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -qe^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0(e^{-2\lambda l} - 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l},$$

da cui si ricava il coefficiente

$$A_0 = q\frac{(\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}}{(\rho_1+\rho_0) - (\rho_1-\rho_0)\, e^{-2\lambda l}}$$

e la soluzione V_0 per lo strato superiore è data dalla formula

$$V_0(r,\ z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{9}$$

dove abbiamo posto

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

Trasformiamo l'espressione ottenuta. Poiché $|k| < 1$, si può scrivere

$$\frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^\infty k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

e

$$V_0(r,\ z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty k^n e^{-\lambda(2nl+z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{I\rho_0}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty k^n e^{-\lambda(2nl-z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{9'}$$

Di qui, sfruttando la formula (8), ricaviamo

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-2nl)^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2nl)^2}}\right). \qquad (10)$$

Questa espressione per la soluzione (9) può essere ottenuta immediatamente se il problema viene risolto con il metodo delle riflessioni. Ponendo $z = 0$, otteniamo la distribuzione del potenziale sulla superficie terrestre

$$V_0(r, 0) = \frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2+(2nl)^2}}\right], \qquad (11)$$

da cui

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right],$$

e la formula (4) ci dà l'espressione di ρ_k

$$\rho_k = \rho_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r^3}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right] =$$

$$= \rho_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n \left(\frac{\xi}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + n^2\right]^{3/2}}\right] = \rho_0 f(\xi), \qquad (12)$$

dove $\xi = r/l$ e $f(\xi)$ indica l'espressione fra parentesi quadra. Per $r \ll l$ abbiamo

$\rho_k \cong \rho_0$.

Per valutare il comportamento di ρ_k per r grande, facciamo tendere $r \to \infty$ ($\xi \to \infty$) nella formula (12). Il limite dell'n-esimo termine della somma sarà uguale a k^n da cui segue che

$$\lim_{r\to\infty} \rho_k = \rho_0\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} k^n\right) = \rho_0\left(1 + \frac{2k}{1-k}\right) =$$

$$= \rho_0 \frac{1+k}{1-k} = \rho_0 \frac{\rho_1+\rho_0+(\rho_1-\rho_0)}{\rho_1+\rho_0-(\rho_1-\rho_0)} = \rho_1.$$

Confrontando la curva sperimentale con quella definita dalla formula (12) possiamo definire ρ_0 mediante i valori di ρ_k per r piccolo, e ρ_1 mediante i valori di ρ_k per r grande. L'intensità l

dello strato conduttore superiore viene determinata mediante una scelta appropriata. Essa è uguale a quel valore l per cui la curva empirica quale funzione $\rho(\xi) = \rho(r/l)$ coincide più precisamente con la curva calcolata mediante la formula (12). Non ci soffermeremo qui sulla tecnica della scelta dei valori dell'intensità stabilita mediante scale bilogaritmiche *).

Nel caso di più strati le curve di ρ_k vengono calcolate in modo analogo. Il carattere del taglio elettrico del mezzo è stabilito dalla scelta di una curva teorica che coincida maggiormente con quella empirica. All'aumentare del numero di strati la tecnica dell'interpretazione si rende più complicata poiché cresce fortemente il numero di curve teoriche ausiliarie.

È da notare che per tagli elettrici distinti $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$ anche le resistenze virtuali corrispondenti sono distinte

$$\rho_k^{(2)}(r) \neq \rho_k^{(2)}(r);$$

quindi, il problema di determinare il taglio elettrico mediante la resistenza virtuale ha un'unica soluzione dal punto di vista matematico **).

Problemi analoghi a quello dell'esplorazione elettrica considerato si incontrano nelle branche fisico-tecniche più disparate.

Con problemi elettrostatici abbiamo a che fare nella costruzione di apparecchi elettronici di varia destinazione, con problemi termici e idrodinamici in molti campi della tecnica (riscaldamento centrale delle case, filtrazione d'acqua sotto le dighe ecc.) ***)

Problemi di determinazione del campo magnetico in un mezzo non omogeneo si incontrano, ad esempio, in difettoscopia. Per scoprire un difetto, per esempio un vuoto sotto la superficie continua di un metallo, il pezzo si mette fra i poli di una calamita per misurare il campo magnetico sulla superficie. Le perturbazioni del campo magnetico consentono di rivelare non solo un difetto, ma anche di stabilirne le dimensioni e la profondità.

Si prestano alla risoluzione di numerosi problemi i metodi dei modelli basati sulla similitudine di campi potenziali di natura fisica diversa ****).

Consideriamo infatti campi potenziali in mezzi non omogenei di natura fisica diversa (campo di temperature stazionario, campo magnetico in un mezzo non omogeneo, campo elettrostatico,

---

*) Si veda, ad esempio, il magnifico libro di A.I. Zaborovskij, *Esplorazione elettrica*, Mosca, 1943 (ed. russa).

**) A. N. Tichonov, *Sull'unicità di soluzione del problema dell'esplorazione elettrica*, Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS 69, n. 6, 797, 1949 (ed. russa).

***) N. N. Pavlovskij, *Teoria del movimento di acque sotterranee sotto gli impianti idrotecnici e sue applicazioni fondamentali*, 1922, capitolo XIV (ed. russa).

****) A. V. Lukjanov, *Sui modelli elettrolitici dei problemi spaziali*, Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS 75, n. 5, 1950 (ed. russa).

campi di velocità di un liquido in filtrazione, ad esempio). Le funzioni potenziali $u(x, y, z)$ di questi campi in ogni dominio omogeneo verificano l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$. Sulla frontiera fra i domini G_1 e G_2 a coefficienti di conduzione termica o permeabilità magnetica diversi è soddisfatta la condizione

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

dove k_1 e k_2 sono le costanti fisiche corrispondenti.

Sulle frontiere di domini geometricamente identici siano assegnati valori uguali dei potenziali di campi fisici diversi o delle loro derivate. Supponiamo inoltre che le eterogeneità fisiche di questi domini siano geometricamente identiche e disposte allo stesso modo; i rapporti fra le costanti fisiche (conduzione termica, permeabilità magnetica ecc.) di ogni coppia di eterogeneità corrispondenti sono anch'essi uguali. Allora i valori numerici di questi potenziali nei punti interni corrispondenti saranno anch'essi uguali, in quanto soluzioni dello stesso problema matematico che ammette un'unica soluzione.

IV. *Determinazione dei campi vettoriali*

Accanto ai problemi scalari, numerose questioni di elettrodinamica e idrodinamica spesso chiedono di determinare un campo vettoriale dati rotore e divergenza di questo campo.

Dimostriamo che il campo vettoriale $\boldsymbol{A}$ è definito univocamente all'interno di un dominio G limitato da una superficie chiusa S se sono assegnati il rotore e la divergenza del campo all'interno di G:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = C, \tag{2}$$

e se sulla frontiera S è data la componente normale del vettore $\boldsymbol{A}$

$$A_n|_S = f(M). \tag{3}$$

Notiamo che le funzioni $\boldsymbol{B}$, C e f possono essere assegnate arbitrariamente. Si devono verificare le relazioni

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\iint_S f(M)\, dS = \iiint_G C\, d\tau. \tag{5}$$

Supporremo la funzione f continua sulla superficie S, le funzioni $\boldsymbol{B}$ e C continue in G con le loro derivate e il dominio G tale che per

esso sia risolvibile il secondo problema ai limiti interno sotto condizioni al contorno continue.

Risolveremo in più stadi il problema posto. Troviamo un vettore A_1 soddisfacente alle condizioni

$$\operatorname{rot} A_1 = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} A_1 = C. \tag{7}$$

Dalla relazione (6) segue

$$A_1 = \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Considerando la funzione φ nella forma

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int\int\int_G \frac{C(Q)}{R_{PQ}}\, d\tau_Q, \tag{9}$$

verifichiamo così anche l'equazione (7). Definiamo ora il vettore A_2 tale che

$$\operatorname{rot} A_2 = B, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} A_2 = 0. \tag{11}$$

Ponendo

$$A_2 = \operatorname{rot} \psi, \tag{12}$$

verifichiamo la condizione (11). Sostituendo la (12) nella (10), otteniamo

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \psi - \Delta\psi = B. \tag{13}$$

Chiediamo che sia

$$\operatorname{div} \psi = 0. \tag{14}$$

Allora l'equazione (13) per il vettore ψ diventa

$$\Delta\psi = -B. \tag{15}$$

Consideriamo un dominio G_1 contenente interamente il dominio G e limitato dalla superficie S_1.

Prolunghiamo il vettore B al dominio $G_1 - G$ e chiediamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1) la componente normale B_n del vettore B sia normale sulla frontiera S (il vettore stesso B è, in generale, discontinuo), $B_{ni} = B_{ne}$;

$$2) \quad B_n = 0 \quad \text{su} \quad S_1; \tag{16}$$

$$3) \ \operatorname{div} B = 0 \quad \text{in} \quad G_1 - G. \tag{4'}$$

Indichiamo come si realizza questo prolungamento di B al dominio $G_1 - G$. Poniamo

$$B = \operatorname{grad} \chi \quad \text{in} \quad G_1 - G.$$

La condizione div $\boldsymbol{B} = 0$ dà

$$\Delta\chi = 0 \quad \text{in} \quad G_1 - G. \tag{17}$$

Le condizioni al contorno, in virtù delle 1) e 2), hanno la forma

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = B_{ni} \quad \text{su} \quad S, \tag{17'}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{su} \quad S_1, \tag{17''}$$

dove B_{ni} è il valore limite di B_n sul lato interno di S. Per la funzione χ abbiamo così il secondo problema ai limiti (17)-(17''). La condizione necessaria di risolubilità di questo problema

$$\iint_{S+S_1} \frac{\partial\chi}{\partial n}\, dS = \iint_S B_n\, dS = 0$$

è soddisfatta poiché

$$\iint_S B_n\, dS = \iiint_G \operatorname{div} \boldsymbol{B}\, d\tau = 0.$$

Ponendo

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{G_1} \frac{\boldsymbol{B}(Q)}{R_{PQ}}\, d\tau_Q,$$

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(\xi, \eta, \zeta),$$

$$R_{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

verificheremo, evidentemente, l'equazione (15).

È facile vedere che la condizione (14) è anch'essa soddisfatta. Calcoliamo infatti le derivate

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

Rappresentando l'integrale esteso al dominio G_1 sotto forma di somma di integrali su G e $G_1 - G$ e tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{B_x}{R}\, d\tau = \iiint B_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau =$$

$$= -\iiint B_x \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau,$$

avremo dopo integrazione per parti:]

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint_G \frac{B_x}{R}\, d\tau = \iiint_G \frac{\partial B_x}{\partial\xi} \frac{1}{R}\, d\tau - \iint_S B_{xi} \frac{\cos\alpha}{R}\, dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint_{G_1-G} \frac{B_x}{R}\, d\tau = \iiint_{G_1-G} \frac{\partial B_x}{\partial\xi} \frac{1}{R}\, d\tau +$$

$$+ \iint_S B_{xe} \frac{\cos\alpha}{R}\, dS - \iint_{S_1} B_x \frac{\cos\alpha_1}{R}\, dS,$$

dove $\cos\alpha = \cos(n, x)\,|_S$, $\cos\alpha_1 = \cos(n, x)\,|_{S_1}$ ed n è la direzione della normale esterna alla superficie.

Calcoliamo ora $\frac{\partial\psi_x}{\partial x}$:

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{G_1}\frac{\partial B_x}{\partial\xi}\frac{1}{R}\,d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{B_{xe}-B_{xi}}{R}\cos\alpha\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} B_x\frac{\cos\alpha_1}{R}\,dS.$$

Espressioni analoghe si ottengono per

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

Ne segue che

$$\operatorname{div}\psi = \frac{1}{4\pi}\iiint_{G_1}\frac{\operatorname{div} B}{R}\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\frac{B_n}{R}\,dS + \\ + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{B_{ne}-B_{ni}}{R}\,dS.$$

In virtù delle condizioni (4), (4') e (16) e della continuità delle componenti normali del vettore B su S ($B_{ni} = B_{ne}$), il vettore A_2 definito dalla formula (12) verifica l'equazione (10) se il vettore ψ soddisfa le condizioni (14) e (15).

È chiaro che il vettore $A_1 + A_2$ verifica le condizioni

$$\operatorname{rot}(A_1 + A_2) = B, \tag{18}$$

$$\operatorname{div}(A_1 + A_2) = C. \tag{19}$$

Per trovare il vettore A dobbiamo soddisfare la condizione al contorno (3). A tal fine troviamo il vettore A_3 soddisfacente all'interno di G alle condizioni

$$\operatorname{rot} A_3 = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{div} A_3 = 0, \tag{21}$$

e su S alla condizione

$$A_{3n}\,|_S = f(M) - A_{1n}\,|_S - A_{2n}\,|_S = f^*(M). \tag{22}$$

È ovvio che la funzione $f^*(M)$ è definita univocamente. Dall'equazione (20) risulta

$$A_3 = \operatorname{grad}\theta.$$

Sostituendo questo valore di A_3 nell'equazione (21), all'interno di G abbiamo

$$\Delta\theta = 0; \tag{23}$$

la condizione (22) dà

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}\Big|_S = f^*(M), \tag{24}$$

vale a dire per la definizione della funzione θ abbiamo ottenuto il secondo problema ai limiti. Pertanto il vettore A_3 sarà definito univocamente.

Abbiamo dimostrato così che il problema (1)-(3) ha un'unica soluzione

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

V. *Applicazione del metodo delle trasformazioni conformi in elettrostatica*

1. Alla soluzione di problemi elettrostatici bidimensionali si applica spesso la teoria delle funzioni di variabile complessa. Consideriamo, ad esempio, il problema elettrostatico seguente:

trovare il campo elettrico di più conduttori carichi i cui potenziali valgono u_1, u_2, . . .

Questo problema, come è noto (si veda Appendice II), conduce all'equazione

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

con le condizioni al contorno

$$u|_{S_i} = u_i, \tag{2}$$

dove con S_i è indicata la superficie dell'i-esimo conduttore. Se si può considerare il campo piano e non variabile lungo l'asse z, ad esempio, l'equazione (1) e le condizioni al contorno diventano

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{C_i} = u_i, \tag{4}$$

dove C_i è il contorno che delimita il dominio S_i.

Cercheremo il potenziale u come parte immaginaria di una funzione analitica

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y) \quad (z = x + iy), \tag{5}$$

dove, in virtù delle condizioni di Cauchy-Riemann,

$$v_x = u_y, \quad v_y = -u_x \tag{6}$$

e

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \tag{7}$$

Dalla condizione al contorno (4) risulta che la funzione $f(z)$ ha la parte immaginaria costante sui contorni C_i che delimitano i conduttori in esame.

Tornando alla condizione (6), osserviamo che

$$v\,(x,\ y) = \text{costante} \tag{8}$$

rappresenta l'equazione della famiglia delle curve di forza *), mentre l'equazione

$$u\,(x,\ y) = \text{costante}, \tag{9}$$

in virtù della condizione (7), definisce la famiglia delle curve equipotenziali.

Quindi, per risolvere il problema posto è sufficiente trovare una trasformazione conforme

$$w = f\,(z)$$

che trasformi il piano della variabile complessa

$$z = x + iy$$

nel piano

$$w = v + iu,$$

in cui le frontiere dei conduttori si trasformino in rette

$$u = \text{costante}$$

ossia

$$\operatorname{Im} w = \text{costante}.$$

Se questa funzione $w = f\,(z)$ è nota, il potenziale richiesto è dato dalla formula

$$u = u\,(x,\ y) = \operatorname{Im} f\,(z).$$

La conoscenza del potenziale permette di calcolare il campo elettrico

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

e la densità di carica superficiale per unità di lunghezza sull'asse z:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

la quale in virtù delle condizioni di Cauchy-Riemann vale

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\,|f'\,(z)\,|. \tag{11}$$

---

*) Infatti, l'equazione delle curve di forza ha la forma $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. Sostituendovi u_x e u_y secondo le condizioni (6) con $-v_y$ e v_x, otteniamo $v_x\,dx + v_y\,dy = dv = 0$ oppure $v\,(x,\ y) = \text{costante}$.

2. *Campo di un condensatore piano seminfinito.* Troviamo il campo di un condensatore formato da lamine sottili metalliche infinite $y = -d/2$ e $y = d/2$ che si stendono nel dominio $x < 0$.

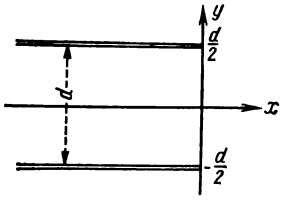


Fig. 68

Senza soffermarci sulla deduzione della trasformazione conforme che trasforma il dominio rappresentato nella fig. 68 nello strato $|\operatorname{Im} w| \leqslant \pi$, l'applichiamo direttamente alla soluzione del problema *).

La trasformazione

$$z = \frac{d}{2\pi}(w + e^w) \quad (w = \varphi + i\psi) \tag{12}$$

trasforma il piano $z = x + iy$ con due tagli ($y = \pm d/2$, $x < 0$) nello strato $|\psi| \leqslant \pi$ del piano $w = \varphi + i\psi$ (fig. 69). Come potenziale complesso consideriamo la funzione

$$\frac{u_0}{3\pi} w, \tag{13}$$

dove u_0 indica la differenza di potenziale fra due lamine del con-

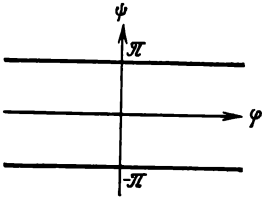


Fig. 69

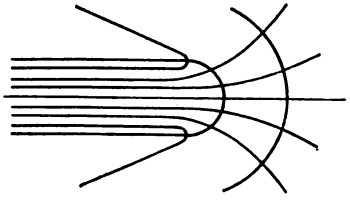


Fig. 70

densatore in modo che il potenziale del campo elettrico si esprime mediante la funzione

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi}\psi, \tag{14}$$

dove ψ è legata a x e y dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi}(\varphi + e^{\varphi}\cos\psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi}(\psi + e^{\varphi}\operatorname{sen}\psi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

La fig. 70 rappresenta curve di forza ed equipotenziali di un condensatore piano seminfinito.

*) J. Franck, R. Mises, *Differential and Integral Equations in Physics Mathematical*, vol. II, capitolo XV, § 5.

Passiamo allo studio del campo in prossimità dell'estremo del condensatore.

Dalle formule (15) si vede che per $\varphi \to -\infty$

$$x \approx \frac{d}{2\pi}\varphi, \quad y \approx \frac{d}{2\pi}\psi, \tag{16}$$

vale a dire all'interno del condensatore, lontano dagli estremi, il campo è piano, e per $\varphi \to \infty$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \approx \frac{d}{2\pi}e^{\varphi}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \approx \psi, \tag{17}$$

cioè all'esterno del condensatore, a grande distanza dai suoi estremi, le curve equipotenziali descrivono dei cerchi.

Se al posto di w introduciamo il potenziale complesso $f = \frac{u_0}{2\pi}w$ in modo che $w = \frac{2\pi}{u_0}f$, il legame fra z e $f(z)$ sarà dato dall'equazione

$$z = d\left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{2\pi}e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

da cui deriva

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0}\left(1 + e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

e per $f = \frac{u_0}{2\pi}(\varphi \pm \pi i)$ otteniamo

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0}(1 - e^{\varphi}) \quad \text{oppure} \quad f'(z) = \frac{u_0}{d(1-e^{\varphi})}.$$

Ponendo $u_0 = 1$, abbiamo, secondo la formula (11), il seguente valore della densità di carica σ:

$$\sigma = \frac{|f'(z)|}{4\pi} = \frac{1}{4\pi d\,|1-e^{\varphi}|}. \tag{18}$$

Ne segue che per $\varphi \to -\infty$, $\sigma \approx 1/4\pi d$, e per $\varphi \to +\infty$, $\sigma \approx 1/4\pi d e^{\varphi}$, vale a dire in questo caso la densità di carica decresce sul lato esterno delle lamine come $1/\rho$.

Si vede dalla formula (18) che per $\varphi = 0$ (sull'orlo del condensatore) $\sigma = \infty$. Infatti, l'orlo del piano della lamina ha curvatura infinita e per caricarlo fino a un certo potenziale, occorre collocarvi una carica infinita.

È molto larga la cerchia di problemi che si possono risolvere con il metodo delle trasformazioni conformi. Esso permette di trovare una soluzione felice al problema dell'influenza di un orlo di spessore grosso su un condensatore piano e ad alcuni problemi di influenza dei flessi in un condensatore ecc. Una trasformazione conforme può essere applicata anche al calcolo

dei problemi dinamici. Ma il metodo esposto pecca di un difetto: la trasformazione conforme è applicabile soprattutto ai problemi piani che si riducono all'equazione bidimensionale $\Delta_2 u = 0$.

VI. *Applicazione del metodo delle trasformazioni conformi in idrodinamica*

1. Nella soluzione dei problemi del *moto dei solidi in un liquido* sono di importanza primaria le condizioni al contorno sulla superficie del corpo.

Nel caso di un liquido perfetto la condizione al contorno si riduce a quanto segue: la proiezione v_n della velocità del liquido sulla normale alla superficie del corpo deve essere uguale alla componente normale della velocità del corpo.

Se il corpo è immobile la condizione al contorno ha la forma semplice

$$v_n = 0$$

sulla superficie del corpo.

Se il movimento in esame è potenziale, cioè

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

le condizioni al contorno assumono la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S = 0 \text{ nel caso di corpo fermo,}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S = u_n \text{ nel caso di corpo moventesi con velocità } u.$$

Come è noto dall'idrodinamica, il potenziale di velocità per un liquido incompressibile verifica l'equazione

$$\Delta \varphi = 0.$$

In tal modo il problema dello scorrimento potenziale di un flusso di liquido incompressibile perfetto attorno a un solido si riduce alla soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta \varphi = 0$$

con la condizione al contorno aggiuntiva sulla superficie del corpo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S = u_n,$$

cioè alla soluzione del secondo problema ai limiti per l'equazione di Laplace.

Se il movimento considerato è piano, la soluzione del problema può essere ottenuta mediante la teoria delle funzioni di variabile complessa.

Nel caso del movimento piano di un liquido incompressibile l'equazione di continuità dà

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial (-v_y)}{\partial y}. \tag{1}$$

Scriviamo le equazioni per le linee di corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

sotto la forma

$$v_x\, dy - v_y\, dx = 0 \tag{2}$$

e introduciamo la funzione ψ mediante le relazioni

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Allora dall'equazione (1) segue che il primo membro dell'espressione (2) è il differenziale totale della funzione ψ:

$$v_x\, dy - v_y\, dx = d\psi.$$

La famiglia delle curve a un parametro

$$\psi\,(x,\ y) = C$$

rappresenta le linee di corrente del liquido incompressibile.

Se esiste il potenziale delle velocità, l'uguaglianza rot $v = 0$ equivale all'equazione

$$\Delta\psi = 0.$$

Dalle espressioni di v_x e v_y risulta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

vale a dire le funzioni φ e ψ verificano le condizioni di Cauchy-Riemann. Di conseguenza, la funzione di variabile complessa

$$w\,(z) = \varphi\,(x,\ y) + i\psi\,(x,\ y)$$

è una funzione analitica.

Dunque, ogni movimento potenziale piano del liquido corrisponde a una funzione analitica di variabile complessa e, viceversa, ogni funzione analitica è legata a un quadro cinematico del movimento di un liquido (più precisamente, a due quadri poiché le funzioni φ e ψ si possono cambiare di ruolo).

Consideriamo alcuni esempi concreti di applicazione della teoria delle funzioni analitiche alla soluzione di problemi di flussi liquidi piani attorno a solidi.

2. *Moto di un cilindro circolare in un liquido.* Supponiamo che un cilindro circolare di raggio $r = a$ sia investito da un flusso

liquido piano avente all'infinito la velocità costante u. Nel caso di moto stazionario si può invertire il problema e considerare il moto del cilindro a velocità costante u relativamente al liquido.

Associamo al cilindro un sistema di coordinate fisso e dirigiamo l'asse Ox parallelamente alla velocità del cilindro.

Sulla superficie del corpo moventesi nel liquido si verifica, evidentemente, la condizione al contorno

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = u \frac{\partial y}{\partial s},$$

dove ds è l'elemento d'arco del contorno che delimita il corpo.

Nel caso di moto traslatorio a velocità u si può integrare questa condizione sulla superficie del corpo, il che dà

$$\psi = uy + C$$

sulla superficie del corpo.

Dunque, il problema in esame si è ridotto così alla soluzione dell'equazione

$$\Delta \psi = 0$$

con le condizioni al contorno seguenti:

1) $\psi = uy + C$ sulla superficie del cilindro;

2) $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ tendono a zero all'infinito.

L'ultima condizione significa che

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

è una funzione analitica univoca all'esterno del cerchio C, la quale si annulla in un punto indefinitamente lontano. Ciò consente di rappresentare la funzione w sotto la forma

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \ldots$$

Ponendo

$$C_k = A_k + iB_k,$$

definiamo le costanti A_k e B_k mediante la condizione al contorno

$$\psi = ua \operatorname{sen} \theta + C,$$

passando alle coordinate polari $z = ae^{i\theta}$.

Per le costanti si ottengono le seguenti espressioni:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = ua^2; \quad B_2 = 0; \quad A_3 = B_3 = 0;$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Di qui

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - u \frac{a^2}{z};$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - u \cos\theta \frac{a^2}{r};$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + u \operatorname{sen}\theta \frac{a^2}{r}.$$

Il primo termine nell'espressione di w esprime la circuitazione dell'intensità Γ intorno al cilindro. Nel caso elementare in cui non esiste circuitazione abbiamo

$$w = -u \frac{a^2}{z}.$$

Il potenziale complesso del flusso che scorre attorno a un cilindro fisso ed ha all'infinito la velocità u, si scrive nella forma

$$w = uz + \frac{ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

3. *Moto di una lamina in un liquido.* I risultati ottenuti per lo scorrimento attorno a un cilindro circolare permettono di

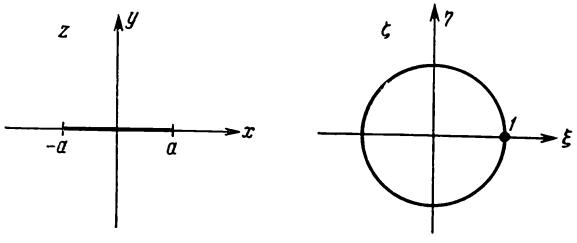


Fig. 71

risolvere problemi di scorrimento attorno a contorni arbitrari. In questo caso si applica il metodo delle trasformazioni conformi. Consideriamone l'applicazione al problema concreto dello scorrimento attorno a una lamina.

Supponiamo che una lamina indefinitamente lunga di larghezza $2a$, disposta lungo l'asse Ox (fig. 71), sia investita da un flusso piano costante avente all'infinito una velocità di componenti u e v. La funzione analitica

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = f(\zeta)$$

permette di stabilire una corrispondenza biunivoca fra il dominio esterno alla lamina nel piano z e il dominio esterno al cerchio di raggio unità nel piano ζ. In questo caso al punto $z = \infty$ corri-

sponderà il punto $\zeta = \infty$ e

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{a}{2} > 0 \quad \text{per} \quad \zeta = \infty.$$

Vediamo come cambierà questa condizione all'infinito. Per il potenziale complesso

$$w(z) = \varphi + i\psi$$

abbiamo

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = u - iv = \bar{v}_\infty$$

che è il valore coniugato della velocità complessa.

Troviamo il valore della velocità complessa della corrente virtuale nel piano ζ:

$$w(\zeta) = w[f^{-1}(z)]; \quad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta},$$

da cui

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = k\bar{v}_\infty \quad \left(k = \frac{a}{2}\right).$$

Dunque, la corrente virtuale rappresenta lo scorrimento attorno a un cilindro di raggio unità di un flusso avente all'infinito la velocità complessa kv_∞. Per questo moto il potenziale complesso ha la forma

$$w(\zeta) = k\bar{v}_\infty \zeta + \frac{k\bar{v}_\infty}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Dalla relazione $z = f(\zeta)$ segue

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}; \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

Partendo da queste relazioni otteniamo per il potenziale complesso del liquido che scorre attorno alla lamina la seguente espressione:

$$w(z) = uz - iv\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right).$$

Nel caso in cui non esiste circuitazione questa espressione diventa

$$w(z) = uz - iv\sqrt{z^2 - a^2}.$$

Si vede dalle relazioni dedotte che la velocità agli estremi della lamina raggiunge valori infiniti. È ovvio che in condizioni reali ciò non si verifica. I suddetti risultati sono dovuti al fatto che noi supponiamo il liquido perfetto. Applicando il teorema di Bernoulli, si può trovare l'espressione della forza agente sul corpo investito dal liquido.

La teoria aerodinamica dell'ala studia le forze con cui l'aria investe l'ala di un aereo. Allo sviluppo di questa teoria un ruolo rilevante appartiene a scienziati russi, e in primo luogo a N. E. Žukovskij e S. A. Čaplygin. Nel caso elementare di assenza di circuitazione, quando un cilindro è investito da un flusso liquido piano, otteniamo un risultato paradossale: il flusso non esercita nessuna azione sul cilindro. Nel caso di sovrapposizione al flusso traslatorio della circuitazione della velocità, attorno al cilindro si produce una forza agente su di esso perpendicolarmente alla direzione della velocità del flusso all'infinito.

La teoria delle funzioni analitiche si presta al solo caso di moto piano. Nel caso tridimensionale si deve ricorrere ad altri metodi di soluzione del problema dello scorrimento liquido dei solidi. Nel caso generale la soluzione del problema presenta difficoltà notevoli. Consideriamo il caso più semplice di moto di una sfera a velocità costante in un liquido infinito in quiete. Il problema consiste nel risolvere l'equazione

$$\Delta\varphi = 0$$

all'esterno della sfera, con le condizioni al contorno seguenti:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{r=a} = u\cos\theta \text{ sulla superficie della sfera}$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ all'infinito.}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$\varphi = A\,\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Partendo dalla condizione al contorno, otteniamo

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^2}\cos\theta,$$

che fornisce la soluzione del problema in esame.

Nel considerare tutti i casi suindicati siamo partiti dall'ipotesi che il liquido sia perfetto. Per un liquido viscoso le condizioni al contorno cambiano. Sulla superficie del corpo deve essere soddisfatta la condizione di «incollatura», e più precisamente: nei punti della frontiera solida la velocità del liquido deve coincidere in grandezza e direzione con la velocità del punto di frontiera corrispondente.

I problemi dello scorrimento di un liquido viscoso implicano grosse difficoltà matematiche. Allo sviluppo di questa branca dell'idrodinamica un ruolo rilevante appartiene alle teorie dello strato limite.

VII. *Equazione biarmonica*

Nell'Appendice II al capitolo II abbiamo dedotto l'equazione delle vibrazioni trasversali della sbarra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Anche il problema della vibrazione di una lamina sottile esente da sforzi e fissata agli estremi conduce a un'equazione analoga *)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \, \partial y^2} \right) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \ \Delta u = 0 \tag{2}$$

e alle condizioni al contorno

$$u = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{al contorno.} \tag{3}$$

Inoltre, la funzione u deve soddisfare le condizioni iniziali

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \tag{4}$$

Se la lamina è soggetta all'azione di una forza esterna distribuita con densità $f(x, y)$, il flesso statico della lamina fissata agli estremi sarà definito dall'equazione

$$\Delta \Delta u = f \tag{5}$$

con le condizioni al contorno

$$u = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

L'equazione

$$\Delta \Delta u = 0 \tag{5'}$$

si dice *biarmonica* e le sue soluzioni aventi derivate comprese quelle del quarto ordine si chiamano *funzioni biarmoniche.*

Il problema ai limiti fondamentale per un'equazione biarmonica ha l'impostazione seguente:

trovare la funzione $u(x, y)$, *continua assieme alla derivata prima in un dominio chiuso* $S + C$, *avente derivate fino a quelle del quarto ordine in* S *e soddisfacente all'equazione* (5) *o* (5') *all'interno di* S *e alle condizioni al contorno su* C

$$u|_C = g(s); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s), \tag{6}$$

dove $g(s)$ *e* $h(s)$ *sono funzioni continue dell'arco* s.

Per risolvere il problema suindicato (2)-(4) con le condizioni iniziali mediante il metodo di separazione delle variabili si suole

*) V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. III, Editori Riuniti, Roma, 1978.

porre

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, T(t). \tag{7}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (2) e separando le variabili, otteniamo il problema della ricerca degli autovalori dell'equazione

$$\Delta\Delta v - \lambda v = 0 \tag{8}$$

con le condizioni al contorno

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{su} \quad C. \tag{9}$$

1. Unicità della soluzione. Dimostriamo che *l'equazione biarmonica*

$$\Delta\Delta u = 0$$

con le condizioni al contorno

$$u\,|_C = g(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s) \tag{3'}$$

ha un'unica soluzione.

Esistano due soluzioni u_1 e u_2. Consideriamone la differenza

$$v = u_1 - u_2.$$

La funzione v verifica l'equazione biarmonica (5') e le condizioni al contorno omogenee

$$v\,|_C = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_C = 0.$$

Applicando la formula di Green

$$\int_G (\Delta\varphi \cdot \psi - \varphi\Delta\psi)\, dS = \int_C \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) ds$$

alle funzioni $\varphi = v$ e $\psi = \Delta v$, otteniamo

$$\int_G (\Delta v)^2\, dS = 0,$$

da cui

$$\Delta v = 0.$$

Tenendo conto che $v\,|_C = 0$, abbiamo

$$v \equiv 0 \quad \text{e} \quad u_1 \equiv u_2.$$

Quindi, la funzione biarmonica è definita univocamente dalle condizioni al contorno (3').

2. Rappresentazione delle funzioni biarmoniche mediante funzioni armoniche. Dimostriamo il seguente teorema:

se u_1 e u_2 sono due funzioni armoniche in un dominio G, la funzione $u = xu_1 + u_2$ è biarmonica nel dominio G.

Per la dimostrazione usiamo l'identità

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Ponendo

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

troviamo

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{11}$$

Applicando ancora una volta l'operatore Δ e tenendo conto che $\Delta\Delta u_2 = 0$, otteniamo

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0.$$

Se il dominio G è tale che ogni retta parallela all'asse x intersechi la frontiera di G in non più di due punti, sussiste il teorema inverso:

per ogni funzione biarmonica assegnata nel dominio G esistono due funzioni armoniche u_1 e u_2 tali che

$$u = xu_1 + u_2.$$

È evidente che per la dimostrazione di questa affermazione è sufficiente stabilire la possibilità di considerare la funzione u_1 soddisfacente alle condizioni

$$\Delta u_1 = 0, \tag{12}$$

$$\Delta(u - xu_1) = 0. \tag{13}$$

Dalla condizione (13) e dalla formula (11) risulta

$$\Delta u = \Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{14}$$

L'equazione (14) è verificata dalla funzione

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, y)\, d\xi.$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\bar{u}_1 = \Delta\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}_1 = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0,$$

allora $\Delta\bar{u}_1$ dipende unicamente da y:

$$\Delta\bar{u}_1 = v(y).$$

Definiamo la funzione $\overline{\overline{u}}_1(y)$ in modo tale che

$$\Delta\overline{\overline{u}}_1 = \frac{\partial^2 \overline{\overline{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

e poniamo $u_1 = \bar{u}_1 + \overline{\overline{u}}_1$. Questa funzione verificherà, evidentemente, ambedue le condizioni (12) e (13).

Consideriamo un'altra forma per rappresentare le funzioni biarmoniche. Supponiamo che l'origine delle coordinate si trovi all'interno del dominio G e che la semiretta uscente dall'origine intersechi la frontiera di G in un solo punto. Allora *ogni funzione u, biarmonica in G, può essere rappresentata da due funzioni armoniche* u_1 *e* u_2 *nella forma*

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2, \tag{15}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2$ e r_0 è una costante data.

Questa affermazione si dimostra analogamente al caso precedente mediante l'identità (10) e le relazioni

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

3. Soluzione dell'equazione biarmonica per un cerchio. Consideriamo un cerchio di raggio r_0 e centro nell'origine delle coordinate, cercheremo la funzione biarmonica soddisfacente per $r = r_0$ alle condizioni al contorno (6). Come è stato mostrato precedentemente, si può rappresentare la funzione cercata sotto forma di somma

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2, \tag{15}$$

dove u_1 e u_2 sono due funzioni armoniche. Dalle condizioni al contorno troviamo

$$u_2 \,|_{r=r_0} = g. \tag{16}$$

Di qui è evidente che u_2 rappresenta la soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione di Laplace e può essere rappresentata dall'integrale di Poisson

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\, g\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)}. \tag{17}$$

Dalla seconda condizione al contorno ricaviamo

$$2r_0 u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = h. \tag{18}$$

È facile vedere per derivazione diretta che la funzione

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r} \tag{19}$$

verifica l'equazione di Laplace e perciò può essere espressa dall'integrale di Poisson

$$2r_0u_1+\frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)\,h\,d\alpha}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\alpha-\theta)}. \tag{20}$$

Derivando l'espressione (17) rispetto a r e sostituendo il valore $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ nella formula (20), otteniamo u_1. Sostituendo nella formula (15) u_1 e u_2 con le rispettive espressioni, otteniamo

$$u=\frac{1}{2\pi r_0}(r^2-r_0^2)^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-h\,d\alpha}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\alpha-\theta)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{g\,[r_0-r\cos(\alpha-\theta)]\,d\alpha}{[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\alpha-\theta)]^2}\right].$$

Capitolo V

PROPAGAZIONE DELLE ONDE NELLO SPAZIO

Il presente capitolo tratta il problema con le condizioni iniziali (problema di Cauchy) per l'equazione delle vibrazioni

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f, \quad u = u(M, t) \tag{1}$$

nello spazio infinito ($M = M(x, y, z)$) e nel piano ($M = M(x, y)$).

§ 1. Problema con le condizioni iniziali

1. Equazione delle vibrazioni nello spazio. Come esempio elementare di equazione di tipo iperbolico può servire l'equazione delle vibrazioni (1), spesso detta in fisica equazione di D'Alembert.

Come è stato mostrato nel capitolo II, l'equazione (1) descrive la propagazione del suono nei gas, il processo di vibrazione di una membrana; in questo caso l'equazione (1) ha la forma

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(x, y, t).$$

L'equazione (1) si ottiene anche risolvendo problemi di propagazione dei campi elettromagnetici in un mezzo non conduttore e problemi di teoria dell'elasticità (si veda Appendice I al capitolo V).

Per l'equazione (1) si studiano il problema con condizioni iniziali (problema di Cauchy) nello spazio infinito e problemi ai limiti in domini limitati.

In questo capitolo studieremo il problema di Cauchy nello spazio infinito:

risolvere l'equazione

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(M, t), \quad M = M(x, y, z) \tag{1}$$

per

$$t > 0, \quad -\infty < x, y, z < \infty,$$

in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \quad \text{per} \quad t = 0, \tag{2}$$

dove f, φ, ψ *sono funzioni date.*

Chiameremo soluzione dell'equazione (1) in un dominio dato, per $t > 0$, una funzione $u(M, t)$ continua con tutte le sue derivate che figurano nell'equazione (1), in tutti i punti del dominio considerato e per ogni $t > 0$.

Consideriamo le soluzioni particolari dell'equazione omogenea

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt}, \tag{3}$$

che godono di simmetria centrale rispetto a un punto M_0, cioè le soluzioni della forma

$$u(M, t) = u(r, t),$$

dove $r = r_{MM_0}$ è la distanza fra i due punti M e M_0. In questo caso l'equazione delle vibrazioni (3) si riduce all'equazione unidimensionale seguente per la funzione $v = ru$:

$$v_{rr} = \frac{1}{a^2} v_{tt}. \tag{4}$$

Infatti, se $u = u(r, t)$, l'operatore di Laplace in un sistema di coordinate sferiche avente come origine il punto M_0 (si veda il capitolo IV, § 1, n. 3) può essere trasformato in

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru),$$

come è facile provare derivando. Pertanto l'equazione (3) assume la forma $\frac{1}{r}(ru)_{rr} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$. Introducendo quindi la funzione $v = ru$, otteniamo per essa l'equazione (4). Se la funzione $u(r, t)$ è limitata per $r = 0$, allora la funzione $v = ru$ si annulla per $r = 0$, $v(0, t) = 0$. Perciò il problema di Cauchy per l'equazione (3) con le condizioni iniziali

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r) \tag{5}$$

si riduce al problema delle vibrazioni di una corda semilimitata ($0 \leqslant r < \infty$) con l'estremo fisso $r = 0$:

$$v_{rr} = \frac{1}{a^2} v_{tt}, \quad v(r, 0) = r\varphi(r), \quad v_t(r, 0) = r\psi(r), \quad v(0, t) = 0, \tag{6}$$

studiato nel capitolo II.

La soluzione generale dell'equazione (4) ha la forma

$$v(r, t) = f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

e di conseguenza

$$u(r,\ t)=\frac{1}{r}f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{r}f_2\left(t+\frac{r}{a}\right),$$

dove $f_1(\xi)$ e $f_2(\xi)$ sono due funzioni qualsiasi due volte derivabili. Le soluzioni particolari dell'equazione (3)

$$u_1=\frac{1}{r}f_1\left(t-\frac{r}{a}\right) \quad \text{e} \quad u_2=\frac{1}{r}f_2\left(t+\frac{r}{a}\right)$$

si chiamano onde sferiche; $u_1(r,\ t)$ è un'onda sferica divergente; $u_2(r,\ t)$ un'onda sferica convergente al punto $r=0$ ed a la velocità di propagazione delle onde. A differenza delle onde piane $f\left(t\pm\frac{x}{a}\right)$, un'onda sferica decresce in modo inversamente proporzionale alla distanza dal centro.

Quindi, la soluzione generale dell'equazione (3), nel caso di simmetria centrale, è presentabile sotto forma di somma di due onde sferiche.

Tenendo conto della condizione $v(0,\ t)=0$, troviamo $0=$ $=f_1(t)+f_2(t)$ oppure $f_2(t)=-f_1(t)=f(t)$ per tutti i valori di t, cioè

$$u(r,\ t)=\frac{1}{r}f\left(t+\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{a}\right) \tag{7}$$

e, in particolare,

$$u(0,\ t)=\frac{2}{a}f'(t). \tag{7'}$$

2. Metodo della media. Consideriamo nello spazio infinito il problema di Cauchy

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}=a^2\Delta u=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\ \ -\infty<x,\ y,\ z<\infty,\ \ t>0;\\ &u(M,\ 0)=\varphi(M),\quad u_t(M,\ 0)=\psi(M),\quad M=M(x,\ y,\ z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Supponiamo che la soluzione di questo problema esista e troviamone una rappresentazione integrale. Sia $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un punto fisso. Introduciamo un sistema di coordinate sferiche $(r,\ \theta,\ \varphi)$ avente origine nel punto M_0.

Consideriamo la funzione

$$\overline{u}(r,\ t)=M_r[u]=\frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S_r}\int u\,dS=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_r}\int u\,d\Omega \quad (dS=r^2\,d\Omega), \tag{9}$$

che è la media di u sulla sfera S_r di raggio r e centro nel punto M_0, $d\Omega=\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi$.

Si vede dall'espressione (9) che

$$u(M_0,\ t_0)=\bar{u}(0,\ t_0). \tag{10}$$

Mostriamo che la funzione $r\bar{u}(r, t) = v$, che gode di simmetria sferica rispetto al punto M_0, verifica l'equazione (4). Integriamo l'equazione (8) sul volume della sfera K_r limitata dalla sfera S_r:

$$\iiint_{K_r} \Delta u \, d\tau = \frac{1}{a^2} \iiint_{K_r} u_{tt} \, d\tau.$$

Per trasformare il primo membro dell'uguaglianza ottenuta, applichiamo la prima formula di Green (capitolo IV) per $v = 1$, $u = \bar{u}(r, t)$ e teniamo conto che la normale a S_r è diretta lungo il raggio $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}\right)$:

$$\iiint_{K_r} \Delta u \, d\tau = \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \, d\Omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\iint_{S_r} u \, d\Omega\right] = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \qquad (11)$$

$$\frac{1}{a^2} \iiint_{K_r} u_{tt} \, d\tau = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 d\rho \left[\iint_{S_r} u \, d\Omega\right] =$$

$$= \frac{4\pi}{a^2} \int_0^r \bar{u}_{tt}(\rho, t) \, \rho^2 \, d\rho. \qquad (12)$$

Derivando le espressioni (11) e (12) rispetto a r e ponendo $v = r\bar{u}$, otteniamo la formula (4). Dalla formula (7′) segue

$$u(M_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0) = \frac{2}{a} f'(t_0). \qquad (13)$$

Esprimiamo f in funzione di φ e ψ. Dopo aver derivato $\bar{u} = \frac{1}{r}\left[f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]$ rispetto a r e t otteniamo $(r\bar{u})_r + \frac{1}{a}(r\bar{u})_t = \frac{2}{a} f'\left(t + \frac{r}{a}\right) = \frac{2}{a} f'(t_0)$ per $t = 0$ e $r = at_0$. Di qui e dalle (13) e (9) segue

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r} \iint_{S_r} ru \, d\Omega + \frac{1}{a} \iint_{S_r} r \frac{\partial u}{\partial t} \, d\Omega\right]_{r=at_0,\, t=0}. \qquad (14)$$

3. Formula di Poisson. Partendo dalle condizioni iniziali (8) e omettendo l'indice 0 in M_0 e t_0, dalla (14) ricaviamo la formula di Poisson

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t} t \iint_{S_{at}} \varphi(P) \, d\Omega_P + t \iint_{S_{at}} \psi(P) \, d\Omega_P\right],$$

$$(dS_P = (at)^2 \, d\Omega_P), \qquad (15)$$

la quale, tenendo conto della (9), si può scrivere sotto la forma

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} t M_{at}[\varphi] + t M_{at}[\psi], \qquad (16)$$

dove

$$M_{at}[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{at}^M} \varphi \, d\Omega = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint\limits_{S_{at}^M} \varphi \, dS. \tag{17}$$

Qui $S_{at} = S_{at}^M$ è una sfera di raggio at e centro nel punto M.

Sia u_ψ la soluzione del problema (8) per $\varphi = 0$:

$$u_\psi (M, t) = tM_{at}[\psi]. \tag{18}$$

Dalla formula (16) si vede che la soluzione del problema (8) si può scrivere nella forma

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_\varphi + u_\psi, \tag{19}$$

dove

$$u_\varphi = tM_{at}[\varphi] \text{ *}). \tag{18'}$$

Dalla formula di Poisson, dedotta sotto l'ipotesi di esistenza della soluzione del problema (8), deriva l'unicità della suddetta soluzione. Supponendo infatti che il problema di Cauchy abbia due soluzioni u_1 e u_2, otteniamo per la loro differenza le condizioni iniziali $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Applicando alla funzione $u_1 - u_2$ le considerazioni precedenti, torniamo alla formula (15) nella quale $\varphi = 0$, $\psi = 0$ e, quindi, $u \equiv 0$ oppure $u_1 \equiv u_2$.

Mostriamo che la funzione $u(M, t)$ definita dalla formula di Poisson risolve effettivamente il problema di Cauchy (8) se $\varphi(x, y, z)$ è continua con le sue derivate fino a quelle del terzo ordine e $\psi(x, y, z)$ fino alle derivate seconde. Dimostriamo supponendo dapprima $\varphi = 0$, cioè che sia $u = u_\psi$. Introduciamo le nuove variabili α, β, γ, ponendo $\xi = x + at\alpha$, $\eta = y + at\beta$, $\zeta = z + at\gamma$. Si vede di qui che α, β, γ sono i coseni direttori del raggio vettore del punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ della sfera S_{at} ($\alpha = \cos(r, x)$ ecc.). Allora l'integrale su S_{at} si trasforma in integrale sulla sfera S_1 ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) di raggio unità, dove $dS_1 = d\Omega_1 = dS/a^2t^2$ e sotto il segno di integrale (15) si avrà

$$\psi(x + at\alpha, y + at\beta, z + at\gamma) = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

È facile vedere che

$$u_\psi = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \psi(\xi, \eta, \zeta) \, dS_1, \tag{20}$$

$$\Delta u_\psi = (u_\psi)_{xx} + (u_\psi)_{yy} + (u_\psi)_{zz} = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta}) \, dS_1 =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_{at}} \Delta\psi \, d\Omega, \tag{21}$$

*) Cfr. la (19) con la formula di D'Alembert.

poiché $\psi_{xx} = \psi_{\xi\xi}$ ecc. Derivando rispetto a t sotto il segno di integrale (20) avremo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a\,(\psi_\xi \alpha + \psi_\eta \beta + \psi_\zeta \gamma) = a\,\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$(u_\psi)_t = \frac{u_\psi}{t} + \frac{v}{t}, \qquad v = \frac{at^2}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dS_1 = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dS. \tag{22}$$

Derivando la (22) rispetto a t, troviamo $(t\,(u_\psi)_t)_t = t\,(u_\psi)_{tt} + (u_\psi)_t = (u_\psi)_t + v_t$, cioè

$$(u_\psi)_{tt} = \frac{1}{t}\, v_t. \tag{23}$$

La prima formula di Green dà

$$v = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dS = \frac{1}{4\pi a} \iiint_{K_{at}} \Delta\psi\, d\tau = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{at} \rho^2\, d\rho \iint_{S_\rho} \Delta\psi\, dS, \tag{24}$$

dove K_{at} è una sfera di raggio at e S_ρ una sfera di raggio ρ e centro nel punto $M(x, y, z)$. Calcoliamo la derivata, partendo dall'uguaglianza (21),

$$v_t = \frac{a^2 t^2}{4\pi} \iint_{S_{at}} \Delta\psi\, dS = a^2 t\, \Delta u_\psi.$$

Di qui e dalla (23) segue $(u_\psi)_{tt} = a^2\, \Delta u_\psi$, cioè u_ψ verifica l'equazione (8). È facile provare che la funzione $\partial u_\varphi / \partial t$ verifica anch'essa l'equazione (8) se ha derivate fino a quelle del terzo ordine.

Mostriamo che u_ψ, definita dalla formula (20), soddisfa le condizioni iniziali. Le formule (20) e (22) danno $u_\psi\,(M, 0) = 0$, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{u_\psi}{t} = \psi\,(M)$, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{v}{t} = 0$ poiché la funzione ψ è continua e tutti gli integrali sono limitati. Perciò, in accordo con la (22), $(u_\psi)_t = \frac{1}{t}\, u_\psi + \frac{1}{t}\, v \to \psi\,(M)$ per $t \to 0$, e analogamente $u_\varphi \to 0$ per $t \to 0$. Dalla formula (18′) per u_φ si vede che $(u_\varphi)_{tt} = 0$ per $t = 0$ e, di conseguenza, la funzione (16) verifica le condizioni (8). Abbiamo dimostrato così che la formula di Poisson (16) determina la soluzione del problema di Cauchy (8).

Dalla formula (16) risulta con chiarezza la dipendenza continua della soluzione del problema di Cauchy dalle condizioni iniziali.

4. Metodo della « discesa ». La formula (19) dedotta prima risolve nello spazio (x, y, z) l'equazione delle vibrazioni omogenea con condizioni iniziali che, in generale, sono funzioni arbitrarie delle variabili x, y, z. Se le funzioni iniziali φ e ψ non dipendono da z, è evidente che anche la funzione u definita dalla

formula (19), è indipendente dalla variabile z. Di conseguenza, questa funzione verificherà l'equazione

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

con le condizioni iniziali

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Quindi, la formula che fornisce la soluzione del problema spaziale permette di risolvere il problema nel piano.

Nella formula (15) si integra sulla sfera S_{at}^M. In virtù dell'indipendenza delle condizioni iniziali da z, l'integrazione sulla semisfera superiore si può sostituire con quella sul cerchio Σ_{at}^M che si ottiene per intersezione della sfera S_{at}^M dal piano (x, y) (fig. 72). L'elemento di superficie dS è legato all'elemento piano $d\sigma$ dalla relazione

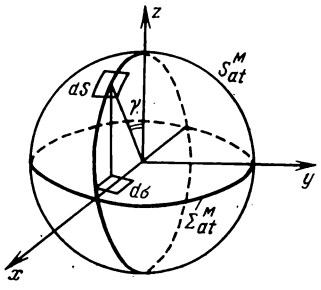


Fig. 72

$$d\sigma = dS \cos\gamma,$$

dove

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}.$$

Le stesse considerazioni riguardano anche l'integrazione sulla semisfera inferiore; quindi l'integrale sul cerchio va calcolato due volte.

Come risultato otteniamo la formula

$$u(M, t) = u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\right], \qquad (25)$$

nella quale si integra sul volume interno del cerchio di raggio at e centro nel punto (x, y).

Analogamente, se le funzioni iniziali φ e ψ dipendono dalla sola variabile x, la formula (19) consente di definire la funzione $u(x, t)$ che rappresenta la soluzione dell'equazione

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

con le condizioni iniziali

$u(x, 0) = \varphi(x)$,

$u_t(x, 0) = \psi(x)$.

A tal fine introduciamo un sistema di coordinate sferiche con l'asse polare coincidente con l'asse x. L'elemento di superficie dS sarà definito come segue:

$dS = r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = -r \, d\varphi \, d\xi$,

poiché

$\xi = x + r \cos \theta, \quad d\xi = -r \operatorname{sen} \theta \, d\theta$.

Integrando rispetto a φ nella formula di Poisson (15), otteniamo

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi\right].$$

Derivando nel primo integrale rispetto a t, otteniamo la formula di D'Alembert già nota dal capitolo II, § 2:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{26}$$

L'equazione delle vibrazioni a tre, due e, rispettivamente, una variabile indipendente spaziale spesso si chiama equazione delle onde sferiche, cilindriche e piane. Questa terminologia corrisponde completamente al metodo applicato sopra, detto *metodo della « discesa »* poiché nel risolvere l'equazione delle vibrazioni nel piano e sulla retta siamo partiti dal problema spaziale come « scendessimo » a un numero più piccolo di variabili. Le soluzioni ottenute per due e una variabile hanno carattere di onde cilindriche e piane.

Il metodo della « discesa » è applicabile non solo all'equazione delle vibrazioni, ma anche ad altri tipi di equazione e consente, in alcuni casi, di ricavare dalla formula che definisce la soluzione dell'equazione in più variabili una soluzione del problema per un'equazione in un numero più piccolo di variabili indipendenti.

5. Interpretazione fisica. Le formule (15) e (25) danno la possibilità di stabilire il quadro fisico della propagazione delle onde sferiche e cilindriche. Iniziamo dal caso di tre variabili in cui il carattere fisico del processo di propagazione differisce notevolmente, come vedremo da quanto segue, dal caso di due variabili spaziali.

Limitiamoci allo studio della propagazione di una perturbazione locale, quando lo stato iniziale (le funzioni $\varphi > 0$ e $\psi > 0$) è diverso da zero unicamente in un dominio limitato T_0. Consi-

deriamo dapprima la variazione di stato $u\ (M_0,\ t)$ in un punto M_0 esterno al dominio T_0 (fig. 73). Lo stato u nel punto M_0 all'istante t è definito in virtù della formula (15) dallo stato iniziale nei punti giacenti sulla sfera $S_{at}^{M_0}$ di raggio at e centro in M_0. La funzione $u\ (M_0,\ t)$ non è nulla nel solo caso in cui la sfera $S_{at}^{M_0}$ intersechi il dominio dei valori iniziali T_0. Supponiamo che d e D siano le distanze del punto M_0 dai punti più vicino e più

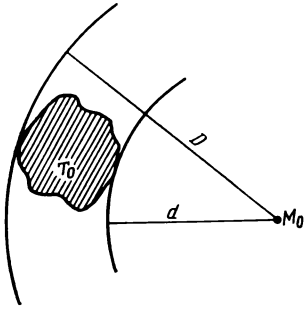


Fig. 73

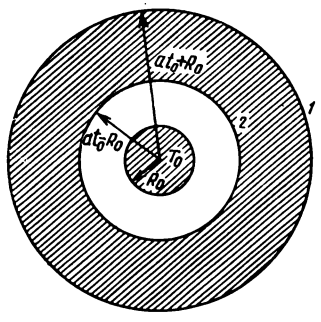


Fig. 74

lontano del dominio T_0, rispettivamente (fig. 73). È evidente che se t è sufficientemente piccolo $(t < t_1 = d/a)$, la sfera $S_{at}^{M_0}$ non interseca il dominio T_0 e gli integrali di superficie nella formula (15) sono nulli, vale a dire la perturbazione non è arrivata ancora al punto M_0. A partire dall'istante $t_1 = d/a$ fino all'istante $t_2 = D/a$ la sfera $S_{at}^{M_0}$ $(t_1 < t < t_2)$ interseca il dominio T_0 e, in generale, gli integrali di superficie nella formula (15) sono diversi da zero: il punto M_0 si trova in stato di eccitazione. All'ulteriore aumentare di t la sfera $S_{at}^{M_0}$ comprenderà in sé il dominio T_0 e gli integrali di superficie saranno nulli: la perturbazione ha superato il punto M_0. Quindi, se una perturbazione locale si propaga nello spazio tridimensionale non si hanno effetti successivi.

Consideriamo ora il quadro spaziale istantaneo della perturbazione $u\ (M,\ t_0)$ ad un istante t_0. I punti M in stato di eccitazione sono caratterizzati dal fatto che le sfere $S_{at_0}^{M}$ intersecano il dominio T_0 delle perturbazioni iniziali. In altre parole, ciò significa che il luogo geometrico dei punti W nei quali la perturbazione differisce da zero è composto dai punti M appartenenti alle sfere $S_{at_0}^{P}$ di raggio at_0 e centro nei punti P del dominio T_0. Gli inviluppi della famiglia delle sfere $S_{at_0}^{P}$ servono da frontiera al dominio W. L'inviluppo esterno si chiama fronte anteriore, e quello interno fronte posteriore dell'onda propagantesi. Nella fig. 74

sono rappresentati i fronti anteriore e posteriore dell'onda (*1* e *2*) nel caso in cui il dominio T_0 è una sfera di raggio R_0.

In tal modo, una perturbazione iniziale localizzata nello spazio produce in ogni punto dello spazio M_0 un'azione localizzata nel tempo; in questo caso si verifica una propagazione dell'onda con fronti anteriore e posteriore nettamente marcati (*principio di Huygens*).

Passiamo al caso di due variabili. Supponiamo che la perturbazione iniziale sia data in un dominio S_0 del piano (x, y). Consideriamo la variazione di stato $u(M_0, t)$ nel punto M_0 che si trova all'esterno del dominio S_0. Lo stato $u(M_0, t)$ nel punto M_0 all'istante t è definito secondo la (25) dai valori iniziali nei punti P appartenenti al cerchio $\Sigma_{at_0}^{M_0}$ di raggio at_0 e centro nel punto M_0. Negli istanti $t < t_1 = d/a$ (d è la distanza del punto M_0 dal punto più vicino nel dominio S_0) la funzione $u(M_0, t)$ è nulla, cioè la perturbazione non è arrivata ancora al punto M_0. Se $t > t_1$, allora $u(M_0, t) \neq 0$. Ciò significa che a partire dall'istante $t = t_1$ si produce nel punto M_0 una perturbazione, la quale, in generale, dapprima cresce e in seguito, a cominciare da un certo istante, decresce a poco a poco fino a zero (per $t \to \infty$). In questo fenomeno di conseguenza sta la differenza del caso piano da quello spaziale. L'influenza di perturbazioni iniziali localizzate, nel piano, non è localizzata nel tempo ed è caratterizzata da effetti successivi fortemente duraturi. Il principio di Huygens qui non si verifica.

Il quadro istantaneo delle perturbazioni nel piano ha il fronte anteriore nettamente marcato, ma è privo di fronte posteriore. Si può considerare il problema bidimensionale come quello spaziale in cui le perturbazioni iniziali sono date nel cilindro infinito e non dipendono da una terza coordinata. Questo schema consente di immaginare facilmente il processo degli effetti successivi.

6. Metodo della riflessione. Il problema con condizioni iniziali per l'equazione delle vibrazioni nel caso di domini limitati da piani può essere risolto con il metodo delle riflessioni.

Consideriamo il problema per il semispazio $z > 0$:

trovare la soluzione dell'equazione delle vibrazioni

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

che verifica le condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) &= \psi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \quad (z \geqslant 0)$$

e la condizione al contorno

$$u|_{z=0} = 0 \quad \text{oppure} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

La soluzione di questo problema è data dalla formula (15) se le condizioni iniziali vengono prolungate in modo dispari a tutto lo spazio rispetto a z (per $u\,|_{z=0} = 0$)

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = -\psi(x, y, -z)$$

o in modo pari $\left(\text{per } \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0\right)$

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = \psi(x, y, -z).$$

Mostriamo che per il prolungamento dispari, rispetto alla variabile z, delle funzioni φ e ψ la condizione al contorno $u\,|_{z=0} = 0$ si verifica automaticamente. Infatti,

$$u(P, t) = u(x, y, 0, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^P} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\, ds + \iint\limits_{S_{at}^P} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\, ds\right] = 0,$$

poiché gli integrali di superficie estesi alle sfere con centro nei punti del piano $z = 0$ sono nulli per funzioni φ e ψ dispari.

Analogamente si può risolvere il problema per lo strato piano $0 \leqslant z \leqslant l$ con condizioni al contorno di prima e di seconda specie

$$u = 0 \text{ per } z = 0 \text{ e } z = l$$

oppure

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{per} \quad z = 0 \quad \text{e} \quad z = l$$

e con condizioni iniziali corrispondenti.

La formula (15) fornisce immediatamente la soluzione del problema se le condizioni iniziali vengono prolungate in modo dispari (o pari) relativamente ai piani $z = 0$ e $z = l$. Le funzioni iniziali φ e ψ così definite saranno periodiche di periodo $2l$ nella variabile z (cfr. capitolo II, § 2, n. 7).

Se nello strato $0 < z < l$ le funzioni iniziali φ e ψ sono funzioni locali, diverse da zero nel dominio T_0, le funzioni prolungate saranno non nulle nella serie di domini T_n che si ottengono da T_0 mediante il metodo delle riflessioni speculari. La funzione $u(M, t)$, per ogni M e t, viene rappresentata come somma di un numero di termini finito, definiti dalle perturbazioni in T_n (cfr. capitolo II, § 2, n. 7). Il significato fisico di questo risultato è che in un intervallo di tempo finito si produce un numero finito di riflessioni dalle pareti $z = 0$ e $z = l$. Analogamente si può risolvere il problema del parallelepipedo.

§ 2. Formula integrale

1. Deduzione della formula integrale. Nel risolvere l'equazione della vibrazione di una corda

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f$$

con il metodo delle onde propagantisi ci siamo serviti largamente

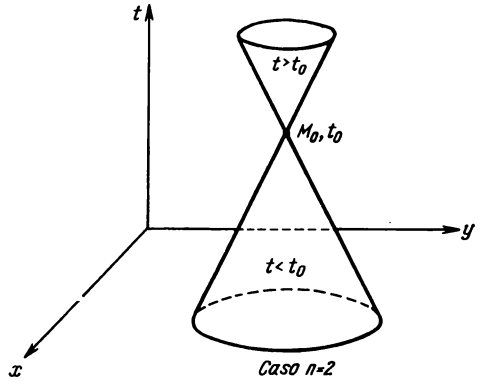


Fig. 75

della nozione di *angolo caratteristico*. Passando alla soluzione dell'equazione della vibrazione nel piano o nello spazio

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f, \tag{1}$$

consideriamo la superficie

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = |t - t_0|,$$

detta *cono caratteristico* per il punto M_0 e l'istante t_0. La totalità dei punti dello spazio delle « fasi » (M, t) in cui giunge un segnale uscente dal punto M_0 all'istante t_0 e propagantesi a velocità a è definita dall'equazione

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t - t_0 \quad (t > t_0)$$

e rappresenta la calotta superiore del cono caratteristico del punto M_0. Analogamente, un segnale uscito dal punto M all'istante t arriva al punto M_0 all'istante t_0 se

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t_0 - t \quad (t < t_0).$$

Il luogo geometrico di questi punti (M, t) forma la calotta inferiore del cono caratteristico (fig. 75).

Per definire nel punto $(M_0,\ t_0)$ la funzione $u\ (M,\ t)$ rappresentante la soluzione dell'equazione (1), introduciamo in luogo di t il tempo locale t^* del punto M_0, ponendo

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$$

e lasciando immutate le coordinate geometriche. Usando il sistema di coordinate sferiche $(r,\ \theta,\ \varphi)$ legato al punto M_0, otteniamo un nuovo sistema di variabili

$$r^* = r, \quad \theta^* = \theta, \quad \varphi^* = \varphi, \quad t^* \quad t - \left(t_0 - \frac{r}{a}\right).$$

Stabiliamo l'equazione cui soddisfa la funzione

$$u\,(r,\ \theta,\ \varphi,\ t) = u\left(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^* + t_0 - \frac{r}{a}\right) = U\,(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*).$$

L'operatore di Laplace nelle coordinate sferiche ha la forma

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Esprimiamo le derivate della funzione u mediante le derivate della funzione U:

$$u_r = U_{r^*} + \frac{1}{a}U_{t^*},$$

$$u_{rr} = U_{r^*r^*} + \frac{2}{a}U_{r^*t^*} + \frac{1}{a^2}U_{t^*t^*},$$

$$u_\theta = U_{\theta^*}; \quad u_{\theta\theta} = U_{\theta^*\theta^*},$$

$$u_\varphi = U_{\varphi^*}; \quad u_{\varphi\varphi} = U_{\varphi^*\varphi^*},$$

$$u_t = U_{t^*}; \quad u_{tt} = U_{t^*t^*}.$$

L'equazione (1) si trasforma in

$$\Delta U = -\frac{2}{ar^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^* U_{t^*}) - F\,(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*), \tag{2}$$

dove

$$F\,(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*) = f\,(r,\ \theta,\ \varphi,\ t).$$

Supponiamo che il punto $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ appartenga a un corpo T limitato dalla superficie S. Considerando la (2) come equazione di Laplace non omogenea in cui t^* funge da parametro, ricorriamo alla formula fondamentale di Green (capitolo IV). Applichiamola

al dominio T, ponendo $t^* = 0$ *):

$$4\pi U(M_0, 0) = \iint_S \left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right] dS +$$

$$+ \iiint_T \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau + \iiint_T \frac{F}{r^*}\, d\tau.$$

Il punto M_0 è un punto singolare del sistema di coordinate sferiche. È naturale perciò considerare gli integrali di volume come limiti per $\varepsilon \to 0$ dei rispettivi integrali estesi al volume $T - T_\varepsilon$, dove T_ε è una sfera di raggio ε e centro nel punto M_0. Trasformiamo l'integrale di volume

$$I_\varepsilon = \iiint_{T-T_\varepsilon} \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau =$$

$$= \iiint_{T-T_\varepsilon} \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) \operatorname{sen}\theta^*\, dr^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Integrando nella variabile r^*, otteniamo

$$I_\varepsilon = \iint_S \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\cos(\widehat{n, r^*})\, dS - \iint_{S_\varepsilon} \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\, dS,$$

poiché

$$dS_n = dS\cos(\widehat{n, r^*}) = r^{*2}\operatorname{sen}\theta^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Il secondo termine in I_ε tende a zero per $\varepsilon \to 0$ poiché l'area della superficie S_ε vale $4\pi\varepsilon^2$. Quindi, il limite di I_ε per $\varepsilon \to 0$ è uguale a

$$I_0 = \iiint_T \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau = \iint_S \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr^*}{dn} dS\ **),$$

poiché

$$\cos(\widehat{n, r^*}) = \frac{dr^*}{dn},$$

il che dà

$$4\pi U(M_0, 0) = \iint_S \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr^*}{dn}\right) dS + \iiint_T \frac{F}{r^*}\, d\tau.$$

---

*) In virtù della convenzione approvata nel capitolo IV, i segni nella formula corrispondono alla normale esterna.

**) In questa trasformazione noi partiamo dal fatto che $d\tau = (r^*)^2\, d\Omega\, dr$, integriamo in r^* e quindi facciamo la sostituzione $d\Omega = \frac{dS}{(r^*)^2}$.

Torniamo alle vecchie variabili e alla funzione u:

$$u(M,\ t) = U(M,\ t^*) \quad \left(t = t^* + t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}\right),$$

cosicché

$$U(M_0,\ 0) = u(M_0,\ t_0),$$

e anche

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr}{dn}.$$

Come risultato otteniamo per la funzione $u(M_0,\ t_0)$ la *formula integrale* seguente:

$$u(M_0,\ t_0) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{dr}{dn}\right\} dS_M + \frac{1}{4\pi}\int\int_T\int \frac{[f]}{r}\, d\tau_M, \qquad (3)$$

che spesso si chiama formula di Kirchhoff *). Qui le espressioni fra parentesi quadra indicano che il valore delle funzioni va calcolato per $t^* = 0$, cioè per $t = t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}$ in modo che $[f] = f\left(M,\ t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$.

2. Conseguenze della formula integrale. La formula (3) trova la sua applicazione alla soluzione di numerosi problemi. Come primo esempio consideriamo il problema con condizioni iniziali:

trovare la soluzione dell'equazione delle vibrazioni

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0$$

nello spazio infinito se sono assegnate le condizioni iniziali

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x,\ y,\ z),$$

$$u_t\,|_{t=0} = \psi(x,\ y,\ z).$$

La calotta inferiore del «cono» caratteristico $r = a(t_0 - t)$ del punto $(M_0,\ t_0)$ interseca la varietà $t = 0$ sulla sfera $S_{at_0}^{M_0}$ $(r = at_0)$ di raggio at_0 e centro nel punto M_0. Ricorriamo alla formula (3) ponendovi $S = S_{at_0}^{M_0}$. Per ogni funzione $v(M,\ t)$ i valori

*) La formula di Kirchhoff è stata generalizzata da S. L. Sobolev per le equazioni di tipo iperbolico in un numero pari di variabili. La formula di Kirchhoff-Sobolev consente di costruire la soluzione per il problema con condizioni iniziali per la suddetta equazione (S. V. Sobolev, Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS, 1933).

$[v]$ sulla sfera $S_{at_0}^{M_0}$ hanno la forma

$$[v] = v\left(M,\ t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}\right) = v\,(M,\ 0), \quad \text{poiché } r_{MM_0} = at_0.$$

Perciò, se il punto M giace sulla sfera $S_{at_0}^{M_0}$, allora

$$[u]_S = u\,(M,\ 0) = \varphi\,(M),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_S = \frac{\partial u}{\partial t}\,(M,\ 0) = \psi\,(M),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S = \frac{\partial u}{\partial r}\,(M,\ 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,(M).$$

Inoltre,

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\varphi).$$

Sostituendo questa espressione nella formula (3), abbiamo

$$u\,(M_0,\ t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{at_0}^{M_0}} \left\{\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\varphi) + \frac{1}{ar}\,\psi\right\} dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}} r\varphi\, d\Omega + \frac{1}{a}\iint\limits_{S_r^{M_0}} r\psi\, d\Omega\right]_{r=at_0},$$

da cui, omettendo in M_0 e t_0 gli indici 0, ricaviamo la formula di Poisson

$$u\,(M,\ t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi\,(P)}{r_{MP}}\, dS + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{S_{at}^{M}} \frac{\psi\,(P)}{r_{MP}}\, dS\right] \quad (r_{MP} = at) \tag{4}$$

(cfr. la (15), § 1).

Come altro esempio consideriamo ora la soluzione di un'equazione d'onda non omogenea con condizioni iniziali nulle. Scegliendo, come prima, $S = S_{at_0}^{M_0}$, vediamo che l'integrale di superficie nella formula (3) si annulla, per cui abbiamo

$$u\,(M_0,\ t_0) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{T_{at_0}^{M_0}} \frac{[f]}{r}\, d\tau_M, \tag{5}$$

dove $T_{at_0}^{M_0}$ è una sfera di raggio at_0 e centro nel punto M_0. Indaghiamo in dettaglio il caso in cui il secondo membro è una funzione periodica del tempo

$$f\,(M,\ t) = f_0\,(M)\, e^{i\omega t},$$

dove ω è una data frequenza delle vibrazioni. La formula (5) dà

$$u(M_0,\ t_0) = e^{i\omega t_0} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{T_{at_0}^{M_0}} f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r}\, d\tau_M$$

$$\left(k = \frac{\omega}{a},\ r = r_{MM_0}\right). \tag{6}$$

Supponiamo che $f_0(M)$ sia una funzione locale, cioè una funzione non nulla soltanto all'interno di un dominio T. Se M_0 giace all'esterno del dominio T e se la distanza da M_0 al punto più vicino in T vale d, l'integrale T_{at_0} è nullo per $t_0 < d/a$. Per questi valori la perturbazione non riesce ad arrivare al punto M_0. Se la distanza fra M_0 e il punto più lontano di T vale D, allora l'integrale a secondo membro, negli istanti $t_0 > D/a$, è costante e si trasforma in integrale esteso a tutto il dominio T. Quindi, in ogni punto M_0, a partire dall'istante $t_0 = D/a$, si producono delle vibrazioni periodiche di ampiezza

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{T} f_0(M) \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}}\, d\tau_M, \tag{7}$$

cosicché

$$u(M_0,\ t_0) = v(M_0)\, e^{i\omega t_0}.$$

Sostituendo direttamente l'espressione di u (per $t_0 > D/a$) nell'equazione delle vibrazioni, vediamo che la funzione $v(M)$ deve verificare l'equazione

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(M) \qquad (k > \omega/a), \tag{8}$$

che chiameremo in seguito *equazione d'onda* (si veda il capitolo VII). Spesso essa è detta equazione di Helmholtz.

Consideriamo la formula (3) nel caso di vibrazioni stazionarie in cui

$$u(M,\ t) = v(M)\, e^{i\omega t},$$

dove $v(M)$ è l'ampiezza delle vibrazioni, soddisfacente all'equazione d'onda (8).

In questo caso abbiamo

$$[u] = u\left(M,\ t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right) = v(M)\, e^{i(\omega t - kr)},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial v}{\partial n}\, e^{i(\omega t - kr)}, \qquad \frac{1}{a}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = ikv(M)\, e^{i(\omega t - kr)},$$

$$[f] = f_0(M)\, e^{i(\omega t - kr)}.$$

La sostituzione di queste espressioni nella (3) conduce alla formula integrale seguente per l'equazione d'onda (8):

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] dS_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint_T f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r} d\tau_M \quad (r = r_{MM_0}), \tag{9}$$

che spesso si chiama formula di Kirchhoff.

Per $k = 0$ ($\omega = 0$ rappresenta un caso statico) la formula (9) diventa la formula fondamentale di Green (capitolo IV. § 2) per l'equazione di Laplace non omogenea.

§ 3. Vibrazioni di volumi limitati

1. Schema generale del metodo di separazione delle variabili. Onde stazionarie. Il problema delle vibrazioni di volumi limitati consiste in quanto segue:

trovare la soluzione dell'equazione

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - q(M)\, u = \rho(M)\, u_{tt}, \quad k > 0, \quad q \geqslant 0, \tag{1}$$

dove

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$M = M(x, y, z)$, *all'interno di un volume* T *limitato dalla superficie* Σ, *che soddisfa le condizioni complementari*

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \text{ in } T + \Sigma, \tag{2}$$

$$u|_\Sigma = 0 \text{ per } t \geqslant 0. \tag{3}$$

Nel caso di un mezzo omogeneo (k = costante, ρ = costante) l'equazione (1) per $q = 0$ diventa

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad \left(a^2 = \frac{k}{\rho} \right).$$

Con problemi di questo tipo abbiamo a che fare studiando le vibrazioni di una membrana (caso di due variabili geometriche indipendenti), le vibrazioni acustiche dei gas, processi elettromagnetici in mezzi non conduttori. Un'importanza particolare presentano i problemi legati alla generazione di vibrazioni elettromagnetiche nei risonatori vuoti chiusi (endovibratori, klystroni, magnetroni ecc.).

Osserviamo che l'omogeneità della condizione al contorno (3) non limita la generalità. Infatti, il caso

$$u|_S = \mu, \tag{3'}$$

dove μ è una funzione arbitraria del punto P, appartenente alla superficie S, e del tempo t, si riduce facilmente al caso di una condizione al contorno omogenea con il metodo esposto nel § 3 del capitolo II per una variabile e consiste nel considerare la deviazione dalla funzione data. Analoga è l'impostazione del secondo e del terzo problema ai limiti.

Cercheremo la soluzione $u(M, t)$ dell'equazione omogenea (1) sotto le condizioni (2) e (3) mediante il metodo di separazione delle variabili. Nel seguito ci limiteremo all'esposizione dello schema formale di soluzione. A tal fine consideriamo il problema ausiliario fondamentale (cfr. § 3, capitolo II):

trovare una soluzione non banale dell'equazione omogenea

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = \rho u_{tt} \quad \text{in} \quad T,\ t > 0$$
$$(k > 0,\quad \rho > 0,\quad q \geqslant 0), \tag{1*}$$

soddisfacente alla condizione al contorno omogenea

$$u\,|_{\Sigma} = 0 \tag{3}$$

rappresentabile sotto forma di prodotto

$$u(M, t) = v(M)\, T(t). \tag{4}$$

Sostituendo la presunta soluzione (4) nell'equazione (1) e separando, come di solito, le variabili, otteniamo le equazioni seguenti per $v(M)$ e $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0, \quad v \not\equiv 0; \\ &v\,|_{\Sigma} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{6}$$

Per la funzione $v(M)$ otteniamo il problema degli autovalori (problema di Sturm-Liouville):

trovare i valori del parametro λ per i quali esistono soluzioni non banali del problema:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0 \quad (k > 0,\ q \geqslant 0,\ \rho > 0), \\ &v|_{\Sigma} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

e determinare anche queste soluzioni. I detti valori del parametro λ si chiamano autovalori, e le soluzioni non banali corrispondenti, *autofunzioni del problema* (5).

Soffermiamoci in dettaglio su questo problema, analogo al problema fondamentale del § 3, capitolo II. Nel caso in questione l'equazione per le autofunzioni è un'equazione alle derivate parziali per cui è difficile ottenere una rappresentazione esplicita delle autofunzioni nel dominio arbitrario T. Nel seguito (nn. 2 e 3) saranno considerati esempi di domini T per i quali è possibile ottenere una rappresentazione esplicita, anche se ciò richiede l'in-

troduzione di una classe nuova di funzioni speciali. Qui studieremo le proprietà generali delle autofunzioni e degli autovalori e applicheremo lo schema formale del metodo di separazione delle variabili. Elenchiamo queste proprietà.

1. Esiste un insieme numerabile di autovalori $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, cui corrispondono le autofunzioni

$$v_1(x, y, z),\ v_2(x, y, z),\ \ldots,\ v_n(x, y, z),\ \ldots$$

All'aumentare dell'indice n gli autovalori λ_n crescono indefinitamente: $\lambda_n \to \infty$ per $n \to \infty$.

2. Per $q \geqslant 0$ tutti gli autovalori λ sono positivi:

$$\lambda_n > 0.$$

3. Le autofunzioni $\{v_n\}$ sono mutuamente ortogonali di peso $\rho(x, y, z)$ nel dominio T:

$$\int_T v_m(M)\, v_n(M)\, \rho(M)\, d\tau_M = 0 \quad (m \neq n), \tag{7}$$

$$M = M(x, y, z); \quad d\tau_M = dx\, dy\, dz.$$

4. *Teorema di sviluppabilità. Una funzione arbitraria $F(M)$, derivabile con continuità due volte e soddisfacente alla condizione al contorno*

$$F = 0 \quad su \quad \Sigma$$

è sviluppabile in serie continua assolutamente convergente di autofunzioni $\{v_n(M)\}$:

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M),$$

dove F_n sono i coefficienti dello sviluppo.

La dimostrazione delle proprietà 1 e 4 è basata, di solito, sulla teoria delle equazioni integrali. Passiamo alla dimostrazione delle proprietà 2 e 3 la quale non chiede un apparato matematico speciale. Dimostriamo l'ortogonalità delle autofunzioni $\{v_n\}$ (proprietà 3). Supponiamo che $v_n(M)$ e $v_m(M)$ siano due autofunzioni corrispondenti a due autovalori distinti λ_n e λ_m:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v_m}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial v_m}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial v_m}{\partial z}\right) - q v_m + \lambda_m \rho v_m = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial v_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial v_n}{\partial z}\right) - q v_n + \lambda_n \rho v_n = 0,$$

dove $v_m = 0$ e $v_n = 0$ su S. Moltiplicando la prima equazione per $v_n(M)$ e sottraendo da essa la seconda equazione moltiplicata per

v_m (M), troviamo

$$\int\int\int_T \{v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_m) - v_m \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n)\}\, d\tau +$$

$$+ (\lambda_m - \lambda_n) \int\int\int_T v_n v_m \rho\, d\tau = 0.$$

Di qui, dopo trasformazioni analoghe a quelle che si usano nella deduzione della seconda formula di Green *), otteniamo

$$\int\int_\Sigma \left(v_n k \frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m k \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) d\sigma + (\lambda_m - \lambda_n) \int\int\int_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0.$$

In virtù delle condizioni al contorno $v_m = 0$ e $v_n = 0$ su Σ abbiamo

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int\int\int_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0,$$

da cui risulta che per $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\int\int\int_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0 \quad (m \neq n),$$

vale a dire le autofunzioni corrispondenti a autovalori distinti sono mutuamente ortogonali di peso ρ (M).

Quando abbiamo studiato il problema ai limiti analogo per una variabile indipendente

$$\begin{aligned} X'' + \lambda \rho X &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(l) &= 0 \end{aligned}$$

è stato dimostrato che a ogni autovalore corrisponde un'autofunzione normalizzata. Nel caso di due e tre variabili indipendenti questa circostanza non sussiste. Come si vede dagli esempi delle autofunzioni per il rettangolo e il cerchio considerati più avanti (nn. 2 e 3), a un medesimo autovalore possono corrispondere più autofunzioni. Tuttavia, come deriva dalla teoria delle equazioni integrali, a ciascun autovalore può corrispondere soltanto un numero finito di autofunzioni linearmente indipendenti. Supponiamo che a un autovalore λ_n corrisponda un sistema di funzioni linearmente indipendenti $v_n^{(1)}, v_n^{(2)}, \ldots, v_n^{(m)}$. È evidente

*) In questa formula figurano le derivate normali delle autofunzioni sulla superficie Σ. Per giustificare questa formula in relazione alle superfici di Ljapunov si veda V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. IV, Editori Riuniti, Roma, 1979.

che ogni combinazione lineare di queste funzioni

$$\bar{v}_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_n^{(i)}$$

è anch'essa un'autofunzione per lo stesso autovalore λ_n. Applicando il noto procedimento *di ortogonalizzazione* *), si possono costruire le funzioni $\bar{v}_n^{(1)}, \ldots, \bar{v}_n^{(m)}$ che sono combinazioni lineari delle funzioni iniziali e sono mutuamente ortogonali. Quindi, se le autofunzioni corrispondenti a un autovalore λ_n non sono mutuamente ortogonali, possiamo ortogonalizzarle e ottenere un nuovo sistema di autofunzioni mutuamente ortogonali e corrispondenti allo stesso λ_n.

La totalità di questi sistemi di autofunzioni per λ_n distinti forma il sistema ortogonale di autofunzioni del problema ai limiti considerato

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda \rho v = 0,$$

$$v = 0 \quad \text{su} \quad \Sigma.$$

Il numero

$$\| v_n \| = \left[\int\int\int_T v_n^2 \rho \, d\tau \right]^{1/2}$$

si dice *norma* dell'autofunzione. Moltiplicando ciascuna funzione v_n per $\frac{1}{\| v_n \|}$, otteniamo il sistema di autofunzioni normalizzate a uno.

Per dimostrare la positività degli autovalori (proprietà 2) è sufficiente applicare la prima funzione di Green

$$\int\int\int_T (k \operatorname{grad} v_n)^2 \, d\tau = - \int\int\int_T v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n) \, d\tau +$$

$$+ \int\int_\Sigma v_n k \frac{\partial v_n}{\partial n} \, d\sigma = - \int\int\int_T q v_n^2 \, d\tau + \lambda_n \int\int\int_T v_n^2 \rho \, d\tau.$$

Di qui si vede che per $q \geqslant 0$ gli autovalori λ_n sono positivi.

Nel seguito useremo il teorema di sviluppabilità (proprietà 4) rimandando per dimostrazione alla parte corrispondente delle equazioni integrali. Sia

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M).$$

---

*) Si veda, ad esempio, V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. IV, Editori Riuniti, Roma, 1979.

Di qui ricaviamo, con i metodi usuali, tenendo conto della condizione di ortogonalità (7), i coefficienti dello sviluppo

$$F_n = \frac{\iiint_T F(M)\, v_n(M)\, \rho\, d\tau}{\iiint_T v_n^2 \rho\, d\tau}. \tag{8}$$

Torniamo ora all'equazione alle derivate parziali. La soluzione dell'equazione

$$T_n'' + \lambda_n T_n = 0$$

ha la forma

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t,$$

in modo che la soluzione del problema ausiliario fondamentale in esame sarà data dal prodotto

$$u_n(M, t) = T_n(t)\, v_n(M) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t)\, v_n(M).$$

È naturale cercare la soluzione generale del problema di partenza sotto forma di somma

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{A_n}\, t + \\ + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t)\, v_n(M). \tag{9}$$

Verificando le condizioni iniziali (2)

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(M),$$

$$u_t(M, 0) = \psi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}\, v_n(M)$$

e usando il teorema di sviluppabilità (proprietà 4), troviamo

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n \sqrt{\lambda_n} = \psi_n,$$

dove φ_n e ψ_n sono i coefficienti di Fourier delle funzioni $\varphi(M)$ e $\psi(M)$ nel loro sviluppo in sistema di funzioni $v_n(M)$ ortogonali di peso $\rho(M)$. Abbiamo terminato così la costruzione formale della soluzione del problema iniziale.

L'interpretazione fisica della soluzione ottenuta è completamente analoga al caso di una variabile. Le soluzioni particolari

$$u_n(M, t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t)\, v_n(M)$$

rappresentano le *onde stazionarie* che possono esistere all'interno del volume limitato T.

I « profili » delle onde stazionarie, dati dalle funzioni $v_n(M)$ nei diversi istanti, differiscono solo per un fattore di proporzionalità. Le curve e le superfici (in due o tre variabili, rispettivamente) lungo le quali $v_n(M) = 0$ si chiamano *curve* (superfici) *di nodo* dell'onda stazionaria $v_n(M)$. I punti in cui $v_n(M)$ raggiunge un massimo o un minimo relativo sono detti *ventri* di quest'onda *). La soluzione generale è rappresentata dalla somma infinita di queste onde stazionarie. La possibilità di rappresentazione della soluzione generale sotto forma di addendi di questo tipo non significa altro che la possibilità di rappresentazione di una vibrazione qualsiasi sotto forma di sovrapposizione di onde stazionarie **).

In tal modo, il problema della vibrazione delle membrane o dei volumi si riduce di fatto alla ricerca delle autofunzioni corrispondenti. Nei nn. 2 e 3 considereremo le vibrazioni delle membrane rettangolare e circolare prestando attenzione soprattutto alla costruzione delle autofunzioni. Come è stato già detto sopra, la ricerca delle autofunzioni in forma analitica esplicita è legata a grandi difficoltà se si tratta di domini di forma complicata. Nel caso di domini arbitrari, si usano metodi approssimati per la costruzione delle autofunzioni. Esistono numerosi metodi approssimati basati su equazioni integrali, principi variazionali, differenze finite.

2. Vibrazioni di una membrana rettangolare. Come è stato indicato nel § 1 del capitolo II, il processo di vibrazione di una membrana omogenea piana è descritto dall'equazione delle vibrazioni

$$u_{tt} = a^2 \Delta u. \tag{10}$$

Supponiamo che nel piano (x, y) sia collocata una membrana rettangolare di lati b_1 e b_2, fissata agli orli ed eccitata mediante uno spostamento iniziale e una velocità iniziale. Per trovare la funzione $u(x, y, t)$ che caratterizza lo spostamento della membrana dalla posizione di equilibrio, dobbiamo risolvere l'equazione delle vibrazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{10'}$$

*) Se vengono prodotte vibrazioni in una membrana coperta di sabbia, quest'ultima passerà dai ventri alle curve di nodo, formando le cosiddette figure di Kladny che riproducono le curve di nodo delle autofunzioni.

**) Alla giustificazione del metodo di separazione per il caso di più variabili sono dedicati uno scritto di O. A. Ladyženskaja (Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS 85, 3 (1952)) e il lavoro di V. A. Iljin, *Sulla solubilità dei problemi misti per le equazioni iperboliche e paraboliche* (Successi delle scienze matematiche 15, fasc. 2, 1960).

con le condizioni iniziali date

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ y,\ 0) &= \varphi(x,\ y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ 0) &= \psi(x,\ y) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e le condizioni al contorno

$$u(0,\ y,\ t) = 0, \quad u(b_1,\ y,\ t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x,\ 0,\ t) = 0, \quad u(x,\ b_2,\ t) = 0. \tag{13}$$

Come al solito, cerchiamo la soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili, ponendo

$$u(x,\ y,\ t) = v(x,\ y)\ T(t). \tag{14}$$

Portando la (14) nella (10) e separando le variabili, otteniamo per la funzione $T(t)$ l'equazione

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \tag{15}$$

e per la funzione $v(x,\ y)$ il problema ai limiti seguente:

$$\left.\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v &= 0; \\ v(0,\ y) = 0, \quad v(b_1,\ y) &= 0; \\ v(x,\ 0) = 0, \quad v(x,\ b_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Quindi, il problema stesso degli autovalori consiste nella risoluzione di un'equazione omogenea alle derivate parziali, con condizioni al contorno omogenee. Risolveremo questo problema sempre con il metodo di separazione delle variabili, ponendo

$$v(x,\ y) = X(x)\ Y(y).$$

Separando le variabili otteniamo i problemi unidimensionali seguenti per gli autovalori:

$$\left.\begin{aligned} X'' + \nu X &= 0, \\ X(0) = 0, \quad X(b_1) &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} Y'' + \mu Y &= 0, \\ Y(0) = 0, \quad Y(b_2) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

dove ν e μ sono separazioni costanti delle variabili legate dalla relazione $\mu + \nu = \lambda$. In questo caso le condizioni al contorno per le funzioni $X(x)$ e $Y(y)$ derivano dalle condizioni corrispondenti per la funzione v. Per esempio, dalla condizione

$$v(0,\ y) = X(0)\ Y(y) = 0$$

risulta che $X(0) = 0$ poiché $Y(y) \not\equiv 0$ (cerchiamo soluzioni non banali).

Studiando sopra le vibrazioni delle corde abbiamo avuto già a che fare con problemi simili a (17) e (18). Le soluzioni dei problemi (17) e (18) hanno la forma

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b_1} x, \quad Y_m(y) = \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b_2} y;$$

$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2; \qquad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2.$$

Quindi, agli autovalori

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2,$$

corrispondono le autofunzioni

$$v_{n,m} = A_{n,m} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b_1} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b_2} y,$$

dove $A_{n,m}$ è un fattore costante. Consideriamolo tale che la norma della funzione $v_{n,m}$ di peso 1 sia uguale a uno:

$$\int_0^{b_1}\int_0^{b_2} v_{n,m}^2 \, dx\, dy = A_{n,m}^2 \int_0^{b_1} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{b_1} x \, dx \int_0^{b_2} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi}{b_2} y \, dy = 1.$$

Di qui risulta

$$A_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}.$$

L'ortogonalità delle funzioni $\{v_{n,m}\}$ è immediata e non necessita di dimostrazione. Di conseguenza, le funzioni

$$v_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b_1} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b_2} y \tag{19}$$

formano un sistema ortonormale di autofunzioni della membrana rettangolare.

Il numero di autofunzioni appartenenti a $\lambda_{n,m}$ (molteplicità di $\lambda_{n,m}$) dipende dal numero di soluzioni numeriche intere n e m dell'equazione

$$\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2 = \lambda_{n,m}.$$

Il sistema di autofunzioni ottenuto è tale che ogni funzione $F(x, y)$, derivabile con continuità due volte e soddisfacente alla condizione al contorno, può essere sviluppata in serie assolutamente e uniformemente convergente rispetto a $v_{n,m}$. Questa affermazione si può giustificare con un riferimento alla teoria delle serie di Fourier multiple.

Mostriamo che il sistema (19) contiene tutte le autofunzioni del problema degli autovalori in esame. Supponiamo che esista

un'autofunzione u_0 appartenente all'autovalore λ_0. Poiché la funzione u_0 è ortogonale a tutte le autofunzioni appartenenti ad altri valori di λ, allora nel suo sviluppo nel sistema (19) rimarrà soltanto un numero finito di termini corrispondenti alle autofunzioni che appartengono all'autovalore $\lambda_{n,m} = \lambda_0$. Pertanto u_0 è una combinazione lineare solo di quelle funzioni della (19)

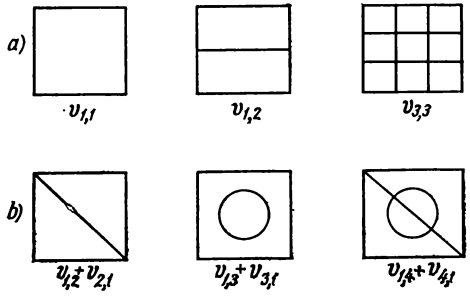


Fig. 76

che corrispondono a $\lambda_{n,m} = \lambda_0$. In tal modo, tutte le funzioni della membrana rettangolare sono date dalla formula (19).

Tornando al problema iniziale per l'equazione (10) vediamo che le soluzioni particolari

$$u_{n,m} = v_{n,m}(x, y)\,(\overline{B}_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}}\, at + \overline{\overline{B}}_{n,m} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_{n,m}}\, at)$$

rappresentano onde stazionarie il cui profilo è dato dalle autofunzioni $v_{n,m}$. I luoghi geometrici dei punti all'interno del rettangolo nei quali le autofunzioni si annullano si chiamano curve di nodo. Per semplicità, consideriamo un quadrato di lato b ($b_1 = b_2$). Le curve di nodo della funzione

$$v_{n,m} = \frac{2}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b}\, x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b}\, y$$

sono rette parallele agli assi coordinati (fig. 76, *a*).

Per autovalori multipli la combinazione lineare di autofunzioni sarà anch'essa un'autofunzione. Le sue curve di nodo possono avere forma assai complicata (fig. 76, *b*).

La soluzione cercata dell'equazione (10) sotto le condizioni aggiuntive (11)-(13) ha la forma

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{B}_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}}\, at + \overline{\overline{B}}_{n,m} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_{n,m}}\, at)\, v_{n,m}(x, y),$$

e ponendo

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x),$$

otteniamo per definizione di $y(x)$ un'equazione di funzioni cilindriche dell'n-esimo ordine (si veda Complemento II, parte I)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{25}$$

con le condizioni al contorno

$$y(x_0) = 0 \quad (x_0 = \sqrt{\lambda} r_0), \tag{26}$$
$$| y(0) | < \infty.$$

La soluzione generale dell'equazione delle funzioni cilindriche ha la forma

$$y(x) = d_1 J_n(x) + d_2 N_n(x), \tag{27}$$

dove $J_n(x)$ è la funzione di Bessel e N_n è la funzione di Neumann dell'n-esimo ordine (si veda Complemento II, parte I). Dalla seconda condizione risulta $d_2 = 0$. La prima condizione dà

$$J_n(\sqrt{\lambda} r_0) = 0 \text{ oppure } J_n(\mu) = 0 \quad (\mu = \sqrt{\lambda} r_0). \tag{28}$$

Se $\mu_m^{(n)}$ è l'm-esima radice dell'equazione $J_n(\mu) = 0$, allora

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{29}$$

A questo autovalore appartiene l'autofunzione

$$R_{n,m} = y(\sqrt{\lambda} r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right). \tag{30}$$

Diamo le seguenti proprietà delle autofunzioni (30) *):

1. Le autofunzioni $R(r)$ appartenenti ad autovalori distinti λ sono ortogonali di peso r:

$$\int_0^{r_0} r R_{nm_1}(r) R_{nm_2}(r)\, dr = 0 \quad (m_1 \neq m_2)$$

ossia

$$\int_0^{r_0} r J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0} r\right) J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} r\right) dr = 0. \tag{34}$$

*) Si veda Complemento II, parte I, § 2.

2. La norma di queste funzioni vale

$$\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2. \tag{31'}$$

In particolare, la norma della funzione $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)$ vale

$$\int_0^{r_0} r\left[J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)\right]^2 dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_1(\mu_m^{(0)})\right]^2. \tag{32}$$

3. Ogni funzione $f(r)$ continua nell'intervallo $(0, r_0)$, avente le derivate prima e seconda continue a tratti e soddisfacente alle condizioni al contorno del problema, può essere sviluppata in serie assolutamente e uniformemente convergente

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right), \tag{33}$$

dove i coefficienti dello sviluppo sono dati dalla formula

$$f_m = \frac{\int_0^{r_0} rf(r)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2}. \tag{34}$$

Tornando al problema degli autovalori della membrana circolare avremo per l'autovalore

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$$

due autofunzioni

$$\overline{v}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cos n\theta, \quad \overline{\overline{v}}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\operatorname{sen} n\theta. \tag{35}$$

Prendendo la loro combinazione lineare avremo

$$v_{n,m}(r,\theta) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)(A_{n,m}\cos n\theta + B_{n,m}\operatorname{sen} n\theta). \tag{36}$$

Calcoliamo la norma dell'autofunzione $v_{n,m}$; al tempo stesso dimostreremo così l'ortogonalità delle autofunzioni, la quale deriva anche dalla teoria generale. Per semplificare i calcoli limitiamoci

alle autofunzioni $\bar{v}_{n,m}$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \bar{v}_{n_1 m_1}\bar{v}_{n_2 m_2} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{r_0} J_{n_1}\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{r_0} r\right) J_{n_2}\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{r_0} r\right) r\,dr \int_0^{2\pi} \cos n_1\theta \cos n_2\theta\,d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ per } n_1 \neq n_2, \\ 0 \text{ per } n_1 = n_2, \quad m_1 \neq m_2, \\ \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2 \pi \text{ per } n_1 = n_2 = n \neq 0 \text{ e } m_1 = m_2 = m, \\ \frac{r_0^2}{2}\left[J_0'(\mu_m^{(n)})\right]^2 2\pi \text{ per } n_1 = n_2 = 0 \text{ e } m_1 = m_2 = m. \end{cases} \tag{37}$$

Condizioni analoghe si verificano per la funzione

$$\bar{\bar{v}}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \operatorname{sen} n\theta.$$

L'espressione della norma si può scrivere sotto la forma

$$\int\int_\Sigma v_{n,m}^2\,d\sigma = \frac{r_0^2}{2}\pi\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2, \quad (d\sigma = r\,dr\,d\theta), \tag{38}$$

dove

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{per} \quad n = 0, \\ 1 & \text{per} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Dalla teoria generale segue che

ogni funzione continua $F(r, \theta)$ con le derivate prime e seconde continue, soddisfacente alle condizioni al contorno del problema può essere sviluppata in serie assolutamente e uniformemente convergente

$$F(r, \theta) = \sum_{n,m} \left(A_{n,m}\bar{v}_{n,m}(r, \theta) + B_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}(r, \theta)\right) \tag{39}$$

di autofunzioni del problema degli autovalori per il cerchio.

I coefficienti dello sviluppo vanno calcolati mediante le formule seguenti:

$$\left.\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} F(r, \theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\theta r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2}, \\ B_{n,m} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} F(r, \theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \operatorname{sen} n\theta r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

È da notare che la funzione

$$v_{0,\,m}(r,\,\theta) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\,r\right)$$

è indipendente da θ.

Se la funzione data F dipende esclusivamente da r, cioè $F = F(r)$, allora la serie rappresentante lo sviluppo di F in autofunzioni conterrà le sole funzioni $v_{0,m}$:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,\,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\,r\right), \tag{41}$$

dove

$$A_{0,\,m} = \frac{\int_0^{r_0} F(r)\, J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\,r\right) r\,dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}. \tag{42}$$

Tutti gli altri coefficienti $A_{n,m}$ e $B_{n,m}$ sono nulli.

Tornando al problema iniziale delle vibrazioni di una membrana con uno spostamento iniziale e velocità iniziale, possiamo scriverne la soluzione nella forma

$$u(r,\,\theta,\,t) = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} \bar{v}_{n,\,m}(r,\,\theta)\left(A_{n,\,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\,t + B_{n,\,m}\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{sen}\,\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\,t\right) + \sum_{n,\,m=0}^{\infty} \bar{\bar{v}}_{n,\,m}(r,\,\theta)\times$$

$$\times\left(C_{n,\,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\,t + D_{n,m}\,\mathrm{sen}\,\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\,t\right).$$

I coefficienti $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ vengono ricavati dalle condizioni iniziali

$$u(r,\,\theta,\,0) = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} (A_{n,\,m}\bar{v}_{n,\,m} + C_{n,\,m}\bar{\bar{v}}_{n,\,m}) = f_1(r,\,\theta),$$

$$u_t(r,\,\theta,\,0) = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} (B_{n,\,m}\bar{v}_{n,\,m} + D_{n,\,m}\bar{\bar{v}}_{n,\,m})\,\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r,\,\theta)$$

mediante le formule

$$A_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} f_1(r,\theta)\, J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)\cos n\theta r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\sqrt{\lambda_{n,m}}r_0)]^2},$$

$$C_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} f_2(r,\theta)\, J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)\,\text{sen}\, n\theta r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\sqrt{\lambda_{n,m}}r_0)]^2}.$$

Formule analoghe sussistono per $a\sqrt{\lambda_{n,m}}B_{n,m}$ e rispettivamente, per $a\sqrt{\lambda_{n,m}}D_{n,m}$.

Problemi al capitolo V

1. Risolvere il problema con condizioni iniziali per l'equazione delle vibrazioni $u_{tt} = a^2\,\Delta u$ nello spazio supponendo che la velocità iniziale sia ovunque nulla e che lo spostamento iniziale $u\,|_{t=0} = \varphi$ abbia la forma

a) $\varphi = \begin{cases} 1 & \text{all'interno della sfera unitaria,} \\ 0 & \text{all'esterno della sfera unitaria} \end{cases}$

oppure

b) $\varphi = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi}{2r_0}\, r & \text{all'interno della sfera di raggio } r_0, \\ 0 & \text{all'esterno della sfera di raggio } r_0. \end{cases}$

2. Risolvere il problema delle vibrazioni del semispazio $z > 0$ sotto condizioni al contorno di prima o seconda specie se sono assegnate
a) una perturbazione locale, cioè la velocità iniziale e lo spostamento iniziale in un dominio T_0;
b) una forza concentrata agente secondo una legge arbitraria.
3. Risolvere il problema 3 per lo strato $-l \leqslant z \leqslant l$.
4. Risolvere l'equazione delle vibrazioni nel dominio rappresentante un cuneo il cui angolo di apertura vale $\pi/2$ e in generale π/n (n intero) se sono assegnate condizioni al contorno omogenee di prima o seconda specie, nonché la velocità iniziale e lo spostamento iniziale.
5. Dedurre l'analogo della formula integrale (3) del § 2 per l'equazione

$u_{tt} = a^2\,\Delta u + cu$, dove c = costante.

Considerare il caso $c < 0$ e trovare la soluzione del problema con condizioni iniziali per un'equazione non omogenea. Dare un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.
6. Determinare la funzione $u(\rho, \varphi, t)$ che caratterizza le vibrazioni di una membrana sotto l'azione dell'impulso K concentrato
a) nel centro di una membrana circolare;
b) in un punto qualsiasi di una membrana circolare;
c) in un punto qualsiasi di una membrana rettangolare.
7. Trovare le autofrequenze e autofunzioni delle membrane aventi forma di
a) semicerchio;
b) corona circolare;

c) settore circolare;
d) settore anulare.
Considerare il primo e secondo problema ai limiti.

8. Trovare le vibrazioni stazionarie di una membrana circolare (membrana del microfono) sotto l'azione di una forza periodica distribuita sulla membrana con densità costante $f = A$ sen ωt. Risolvere lo stesso problema se $f = A\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)$ sen ωt, dove c è il raggio della membrana.

9. Dedurre l'equazione di propagazione del suono in un mezzo moventesi a velocità costante. Trasformare l'equazione ottenuta e passare a un sistema di coordinate che si muove con il mezzo.

APPENDICI AL CAPITOLO V

I. *Riduzione delle equazioni della teoria dell'elasticità a equazioni delle vibrazioni*

Lo scopo della teoria dell'elasticità è quello di studiare con metodi matematici deformazioni e moti nei corpi elastici. Le deformazioni e i moti generati da forze esterne si possono caratterizzare mediante il *vettore di spostamento* $\boldsymbol{u}$ le cui proiezioni sugli assi coordinati x, y, z indicheremo con $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ e $w(x, y, z, t)$. Questi spostamenti si producono in un corpo elastico sotto l'azione di forze interne (*sforzi*) che costituiscono il tensore simmetrico degli sforzi

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

dove σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} sono le componenti della forza (sforzo) agente sull'unità d'area dell'elemento superficiale perpendicolare all'asse x; analogamente, τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} e τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z sono le componenti degli sforzi agenti sull'unità d'area degli elementi superficiali perpendicolari agli assi y e z. Le componenti σ_x, σ_y e σ_z sono dette *sforzi normali*, e τ_{xy}, τ_{xz} ecc. *sforzi di scorrimento*. Considerando un elemento di volume, costruendone l'equazione del moto abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dove ρ è la densità volumetrica nel punto (x, y, z), e X, Y, Z sono le componenti delle forze volumetriche esterne. Il legame

fra gli sforzi nella deformazione e le loro caratteristiche sono dati dalla legge di Hooke, la quale si scrive come segue:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left\{\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2}\right\}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\left\{\varepsilon_y + \frac{\theta}{m-2}\right\}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\left\{\varepsilon_z + \frac{\theta}{m-2}\right\}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In questo caso le grandezze

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

costituiscono il tensore simmetrico di deformazione

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Nelle formule (2) abbiamo introdotto le seguenti notazioni: G è il *modulo di spostamento*, m il coefficiente che caratterizza la *compressione* trasversale del corpo rispetto alla sua dilatazione longitudinale, $\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

Alle equazioni (1) e (2) si devono associare ancora condizioni al contorno (sulla frontiera sono assegnati spostamenti u, v, w o forze superficiali ecc., ad esempio) su cui non ci soffermeremo qui.

Le equazioni (1) e (2) formano un sistema completo di equazioni differenziali alle derivate parziali per gli sforzi e le deformazioni. Sostituendo le espressioni degli sforzi della (2) nelle equazioni del moto (1) e tenendo conto delle relazioni (3), otteniamo il sistema di equazioni degli spostamenti

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right\} + X, \\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta v + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\} + Y, \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta w + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right\} + Z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Spesso in luogo delle costanti G e m si introducono le cosiddette *costanti di Lamé* λ e μ legate alle prime dalle relazioni

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2}{m-2}G.$$

Ciò permette di scrivere il sistema di equazioni precedente sotto forma di una sola equazione vettoriale

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il vettore di spostamento, di componenti u, v e w, $\boldsymbol{F}$ il vettore delle forze volumetriche, di componenti X, Y, Z. Di solito, l'equazione (5) si chiama equazione di Lamé.

Mostriamo che le equazioni (5) si possono ridurre ad equazioni d'onda per funzioni scelte in modo appropriato *).

Il vettore arbitrario $\boldsymbol{F}$ si può sempre rappresentare sotto forma di somma

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \boldsymbol{L},$$

dove U è un potenziale scalare e $\boldsymbol{L}$ vettoriale.

Poniamo

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

dove

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi + U, \qquad \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}.$$

Con una semplice sostituzione è facile provare che il vettore $\boldsymbol{u}$ così definito verifica effettivamente le equazioni dell'elasticità (4).

Se le forze volumetriche non esistono, per i potenziali Φ e $\boldsymbol{A}$ otteniamo due equazioni delle vibrazioni omogenee

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi, \qquad \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{A}.$$

L'equazione delle vibrazioni per il potenziale vettoriale $\boldsymbol{A}$ si scinde in alcuni casi (in un sistema di coordinate cartesiane, ad esempio) in tre equazioni scalari. Tuttavia la questione della riduzione delle equazioni dell'elasticità ad equazioni delle vibrazioni scalari separate non può essere studiata a fondo senza ricorso a condizioni al contorno le quali possono legare componenti diverse e presentare con ciò difficoltà notevoli per una scissione completa delle equazioni.

II. *Equazioni del campo elettromagnetico*

1. Equazioni del campo elettromagnetico e condizioni al contorno. Il campo elettromagnetico è caratterizzato dai vettori intensità $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ dei campi elettrico e magnetico e dai vettori $\boldsymbol{D}$

*) S. L. Sobolev, *Alcune questioni della teoria della propagazione delle vibrazioni*; Franck e Mises, *Differential and Integral Equations in Physics Mathematical.*

e $\boldsymbol{B}$ d'induzione elettrica e magnetica. Il sistema completo di equazioni di Maxwell che legano queste grandezze ha la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{j}$ è la densità per volume delle correnti, $\boldsymbol{j}^{(e)}$ la densità di correnti provenienti dall'azione di forze elettromotrici esterne, ρ la densità di volume delle cariche, c la velocità della luce nel vuoto. Nel seguito supporremo spesso $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

A queste equazioni si devono associare le cosiddette equazioni materiali del campo

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{7}$$

dove ε è la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, σ la conduttività del mezzo. Nel seguito supporremo il mezzo omogeneo ed isotropo. In questo caso ε = costante, μ = costante, σ = costante. Considereremo spesso i processi elettromagnetici nel vuoto dove $\varepsilon = \mu = 1$ e $\sigma = 0$ sotto la condizione di assenza di cariche e correnti. In questo caso le equazioni di Maxwell si rendono più semplici

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Le equazioni (1) e (4) sono compatibili poiché ρ e $\boldsymbol{j}$ sono legate dalla relazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

esprimente la legge di conservazione della carica elettrica.

Le leggi del campo elettromagnetico date in forma differenziale dalle equazioni (1)-(4) si possono esprimere in forma integrale

$$\oint_C H_s \, ds = \frac{4\pi}{c} \int\int_\Sigma i_n \, d\sigma, \tag{1'}$$

$$\oint_C E_s \, ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int\int_\Sigma B_n \, d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \tag{2'}$$

pove

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}_{sp} + \boldsymbol{j} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{8}$$

è la corrente totale e $\boldsymbol{j}_{sp} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ la corrente di spostamento. Si integra sul contorno C e sulla superficie Σ che si appoggia su questo contorno; $\Phi = \int\int_{\Sigma} B_n \, d\sigma$ è il flusso di induzione che attraversa il contorno C. Indicando con T un volume chiuso e con Σ la superficie che lo delimita, avremo al posto delle equazioni (3) e (4)

$$\int\int_{\Sigma} B_n \, d\sigma = 0, \tag{3'}$$

$$\int\int_{\Sigma} D_n \, d\sigma = 4\pi \int\int\int_{T} \rho \, d\tau = 4\pi e, \tag{4'}$$

dove e è la carica totale all'interno del volume T.

Le equazioni (1')-(4') hanno un significato fisico semplice e rappresentano l'espressione matematica dei dati sperimentali fondamentali che servirono di base alla deduzione delle equazioni di Maxwell. Così, l'equazione (1') è la generalizzazione della nota legge di Biot-Savart, l'equazione (2') esprime la legge di induzione magnetica di Faraday e l'equazione (4') può essere dedotta direttamente dalla legge di Coulomb. L'equazione (3') è conseguenza della chiusura delle linee di forza del campo magnetico.

Se il mezzo non è omogeneo, all'equazione di Maxwell si devono associare condizioni di coniugazione. Sulla frontiera di separazione dei due mezzi (1) e (2) devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)} \tag{9}$$

(continuità delle componenti tangenziali del vettore $\boldsymbol{E}$),

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)} \tag{10}$$

(continuità delle componenti tangenziali del vettore $\boldsymbol{H}$) e anche

$$B_{n_1}^{(1)} = B_{n_2}^{(2)} \tag{11}$$

(continuità delle componenti normali del vettore $\boldsymbol{B}$),

$$D_{n_1}^{(1)} - D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu \quad \text{oppure} \quad \varepsilon_1 E_{n_1}^{(1)} - \varepsilon_2 E_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \tag{12}$$

dove $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}_2$ sono due normali alla superficie di separazione fra i mezzi, con $\boldsymbol{n}_1$ diretta all'interno del primo mezzo e $\boldsymbol{n}_2$ all'interno del secondo, ν la densità superficiale delle cariche. Queste condizioni si deducono facilmente dalle equazioni (1')-(4').

Le equazioni di Maxwell assieme alle condizioni al contorno consentono di definire univocamente il campo elettromagnetico nello spazio a partire da un dato stato iniziale del campo. In questo caso, per definire univocamente il campo è sufficiente usare le condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo (9) e (10).

Se il processo elettromagnetico è statico, cioè non variabile con il tempo, le equazioni di Maxwell diventano

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}^{(e)},$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0.$$

Se, inoltre, il mezzo è privo di conduttività, cioè se $\sigma = 0$, si ottengono due sistemi di equazioni indipendenti per i campi elettrico e magnetico

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \end{aligned}\right\} \quad \text{(equazione dell'elettrostatica)},$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}^{(e)}, \\ &\operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(equazione della magnetostatica)}.$$

Le equazioni elettrostatiche sono state già considerate nel capitolo IV e nelle Appendici al capitolo IV.

Nel caso di un mezzo omogeneo è facile ottenere equazioni per ciascuno dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ separatamente. Supponiamo $\rho = 0$, $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

Applicando l'operazione rot all'equazione (1), abbiamo

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{E},$$

da cui, in virtù dell'equazione (2) e della relazione $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H}$, ricaviamo

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

ossia

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad \left(a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\right), \tag{13}$$

poiché

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Analogamente si deduce l'equazione per $\boldsymbol{E}$

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{14}$$

In particolare, l'equazione (13) o (14) sarà verificata dalle componenti E_x, E_y, E_z e H_x, H_y, H_z

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{15}$$

dove u è una delle componenti E_x, E_y, E_z o H_x, H_y, H_z.

Il carattere del processo è determinato dalle proprietà del mezzo. Se il mezzo non è conduttore ($\sigma = 0$), otteniamo l'equazione ordinaria delle vibrazioni

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{16}$$

vale a dire i processi elettromagnetici si propagano in un mezzo non conduttore senza smorzamento alla velocità $a = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ e, in particolare, nel vuoto alla velocità della luce c.

Se il mezzo gode di grande conduttività e se si possono trascurare le correnti di spostamento rispetto a quelle di conduttività, allora si avrà un'equazione di tipo parabolico

$$\Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{17}$$

Nel caso generale in cui le correnti di conduttività e di spostamento sono dello stesso ordine, l'equazione (15) è un'equazione di tipo iperbolico descrivente processi di propagazione accompagnati da smorzamento dovuto alla dissipazione dell'energia in seguito alla conduttività.

Per i processi stazionari, ad esempio nei problemi di diffrazione,

$$u = v(x, y, z)\, e^{i\omega t},$$

otteniamo un'equazione di tipo ellittico

$$\Delta v + (k^2 - iq^2)\, v = 0, \tag{18}$$

dove

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}; \quad q^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \tag{19}$$

I campi statici, come è stato indicato nel capitolo IV, sono descritti dall'equazione di Laplace.

2. Potenziali del campo elettromagnetico. Per definire il campo elettromagnetico dobbiamo trovare sei grandezze che sono le componenti dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$. In alcuni casi, però, si può ridurre questo problema alla ricerca di quattro e talvolta di un numero minore di grandezze. A tale scopo vanno introdotti nel seguente modo i potenziali del campo vettoriale $\boldsymbol{A}$ e scalare φ. Consideriamo l'equazione di Maxwell in un mezzo omogeneo, nel vuoto ad esempio. Dall'equazione (3)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$$

segue che il vettore H è solinoidale e perciò può essere rappresentato mediante l'altro vettore A nella forma

$$H = \operatorname{rot} A. \tag{20}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (2)

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t},$$

otteniamo

$$\operatorname{rot}\left[E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right] = 0,$$

vale a dire il vettore $E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ è potenziale e perciò può essere rappresentato sotto forma di gradiente di una funzione scalare φ

$$E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{21}$$

da cui segue

$$E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}.$$

I potenziali vettoriale A e scalare φ così dedotti non sono definiti univocamente. Infatti, si vede dalle formule (20) e (21) che si ottengono gli stessi campi sostituendo A e φ con i potenziali

$$A' = A + \operatorname{grad} F, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t},$$

dove F è una funzione qualsiasi. Per eliminare questa indeterminazione, ai potenziali A e φ va aggiunta una condizione

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{22}$$

che si dice spesso condizione di Lorentz. Mostriamo che se questa condizione è soddisfatta i potenziali A e φ verificano le equazioni

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{23}$$

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j, \tag{24}$$

dove ρ e j sono date densità di carica e corrente.

Sostituendo le espressioni (20) e (21) nell'equazione (1)

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \tag{1}$$

e usando l'identità vettoriale

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta A,$$

avremo

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \Delta \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$

da cui in virtù della condizione (22) deriva l'equazione (24). Portando quindi l'espressione (21) nella quarta equazione di Maxwell

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{4}$$

e tenendo conto della condizione (22), otteniamo per φ l'equazione (23).

Nel caso di un mezzo conduttore omogeneo ($\sigma \neq 0$) i potenziali si introducono mediante le relazioni

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{25}$$

I potenziali $\boldsymbol{A}$ e φ sono legati da

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\varphi = 0 \tag{26}$$

e verificano le equazioni

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}, \tag{27}$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{28}$$

per le quali vale quanto detto nei riguardi delle equazioni (23) e (24).

Se non esistono cariche libere ($\rho \equiv 0$), il potenziale $\varphi = 0$ e i vettori del campo si esprimono mediante il solo vettore potenziale $\boldsymbol{A}$ soddisfacente alla condizione aggiuntiva

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0.$$

In alcuni casi i campi elettromagnetici si possono descrivere mediante un potenziale vettoriale che ha una sola componente non nulla.

Alcuni esempi verranno considerati nel seguito (si veda anche Appendice I al capitolo VII).

3. Campo elettromagnetico di un oscillatore.

1. Nella teoria della radiazione delle onde elettromagnetiche spesso si ricorre alla nozione di oscillatore o vibratore. Questa nozione è strettamente legata alla rappresentazione delle correnti lineari. Un oscillatore si presenta come una corrente lineare di lunghezza infinitesimale.

Consideriamo una corrente rettilinea L la cui intensità varia con il tempo. Nel caso più semplice si suppone che l'intensità di corrente sia inalterata lungo il conduttore.

La corrente costante lungo il conduttore è dovuta all'esistenza agli estremi di cariche variabili con il tempo. Per analogia con

il dipolo elettrostatico rappresentante l'insieme di due cariche $+e$ e $-e$, un oscillatore si può caratterizzare dal momento

$$\boldsymbol{p}(t) = e(t)\,\boldsymbol{l}. \tag{1}$$

L'intensità di corrente nell'oscillatore, evidentemente, vale

$$J(t) = \dot{e}(t),$$

cosicché

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = J(t)\,\boldsymbol{l}. \tag{2}$$

Il prodotto $J(t)\,\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}_0(t)$ si chiama momento di corrente.

2. Definiamo il campo elettrico eccitato dall'oscillatore di momento

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 f(t) \tag{3}$$

nello spazio infinito supponendo $\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ (nel vuoto).

Consideriamo il problema dell'eccitazione del campo elettromagnetico da una corrente rettilinea L, il cui caso limite è l'oscillatore.

Fuori dalla corrente L il campo elettromagnetico è definito dalle equazioni di Maxwell

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sulla linea di corrente L i vettori del campo $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{E}$ devono avere una singolarità caratterizzata dal fatto che la circuitazione lungo una circonferenza indefinitamente piccola K_ε e comprendente la linea di corrente L ha il seguente valore:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} J, \tag{5}$$

dove $J = J(t)$ è l'intensità di corrente.

Da questa condizione risulta che la componente H_s ha sulla corrente una singolarità della forma

$$H_s \approx \frac{2J}{c\rho}, \tag{6}$$

dove $\rho = |\overrightarrow{M_0P}|$, M_0 è un punto sulla linea L, P un punto su K_ε (per $\rho = \varepsilon$).

Per determinare univocamente il campo si devono associare condizioni iniziali che supponiamo nulle.

Nel risolvere questo problema è opportuno introdurre i potenziali $\boldsymbol{A}$ e φ mediante i quali i campi si esprimono, come abbiamo

visto (si veda la pag. 451), nel seguente modo:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} q, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e, inoltre,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Il potenziale vettoriale fuori della corrente L verifica l'equazione delle vibrazioni omogenea

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane facendo coincidere l'asse z con la linea di corrente L. Poniamo

$$\boldsymbol{A} = A\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{z}^0,$$

dove $\boldsymbol{z}^0$ è il vettore unitario dell'asse z.

È evidente che la funzione $A\,(x,\ y,\ z)$ verifica, fuori della linea di corrente L, l'equazione omogenea delle vibrazioni

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{10}$$

Per precisare la singolarità del vettore $\boldsymbol{A}$ sulla corrente, serviamoci della condizione (6). Dall'equazione (7) segue

$$H_s = \frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Servendoci quindi della condizione (6) troviamo che la funzione $\boldsymbol{A}\,(x,\ y,\ z)$ deve avere nei punti della linea L una singolarità della forma

$$A \approx \frac{2J}{c} \ln \rho. \tag{11}$$

Cercheremo il potenziale A sotto la forma

$$A\,(P,\ t) = \int_L A_1\,(P,\ M,\ t)\,dl_M \quad (P = P\,(x,\ y,\ z)), \tag{12}$$

dove $\boldsymbol{A}_0\,(P,\ M,\ t) = A_1\,(P,\ M,\ t)\,\boldsymbol{dl}_M$ è il vettore potenziale della corrente elementare dell'oscillatore il cui momento vale $J_0 = J\,dl$.

Affinché il potenziale A abbia la singolarità necessaria, la funzione $A_0\,(P,\ M,\ t)$ deve godere di singolarità della forma

$$A_0\,(P,\ M,\ t) \approx \frac{J_0\,(t)}{cR_{PM}}. \tag{13}$$

Supponendo infatti che A_0 abbia una tale singolarità e calcolando mediante la formula (12) il valore di A in prossimità della corrente L $(0 < z < l)$, otteniamo

$$A \approx J \int_0^l \frac{1}{cR_{MP}}\, d\zeta = \frac{J}{c} \int_0^l \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \left[z - \zeta + \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2} \right]_0^l = \frac{J}{c} \ln \frac{z - l + \sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \frac{(l-z)\left[-1 + 1 + \frac{\rho^2}{2(l-z)^2} + \dots \right]}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2J}{c} \ln \rho + \dots,$$

dove i puntini di sospensione indicano termini che non diventano infiniti per $\rho = 0$.

3. In tal modo la funzione A_0 $(P,\ M,\ t)$ deve verificare nelle variabili P $(x,\ y,\ z)$ e t l'equazione delle vibrazioni

$$\Delta A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

ovunque, tranne il punto M in cui deve avere una singolarità della forma

$$A_0 \approx \frac{J_0(t)}{cR_{MP}}. \tag{15}$$

Le condizioni iniziali sono nulle in virtù di quanto detto sopra.

La soluzione di questo problema è rappresentata, come abbiamo visto nel capitolo V, sotto forma di potenziale ritardato

$$A_0(M, P, t) = \frac{J_0\left(t - \frac{R_{MP}}{c}\right)}{cR_{MP}}. \tag{16}$$

Come è stato detto precedentemente, il momento di corrente vale

$$\boldsymbol{J}_0(t) = J(t)\, d\boldsymbol{l} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{p}_0 \mathring{f}(t). \tag{17}$$

Quindi, il potenziale vettoriale dell'oscillatore si può sempre rappresentare nella forma

$$A_0 = \frac{\boldsymbol{p}_0 \mathring{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}. \tag{18}$$

Spesso al posto del potenziale vettoriale si usa il potenziale polarizzato o il vettore hertziano $\boldsymbol{\Pi}$, ponendo

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t}. \tag{19}$$

Anche il vettore Π verifica l'equazione

$$\Delta\Pi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

ed è legato al potenziale scalare dalla relazione

$$\varphi = -\text{div}\,\Pi. \tag{21}$$

I vettori del campo E e H si esprimono in funzione del potenziale polarizzato mediante le formule

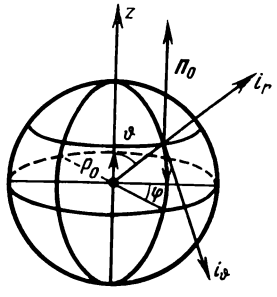


Fig. 77

$$E = \text{grad div}\,\Pi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \text{rot rot}\,\Pi, \tag{22}$$

$$H = \frac{1}{c}\,\text{rot}\frac{\partial\Pi}{\partial t}. \tag{23}$$

Tenendo conto della relazione (18), otteniamo la seguente espressione del potenziale polarizzato per l'oscillatore:

$$\Pi_0 = \frac{p_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad \text{o} \quad \Pi_0 = \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{24}$$

4. Per il calcolo dei campi E e H passiamo a un sistema di coordinate sferiche (r, ϑ, φ) alla cui origine collochiamo l'oscillatore e facciamo coincidere l'asse z ($\vartheta = 0$) con la direzione del vettore p_0 (fig. 77). Indichiamo con i_r, i_ϑ, i_φ i vettori unitari del sistema di coordinate sferiche in esame.

Il vettore Π_0 parallelo al vettore p può essere rappresentato nella forma

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_0 = \Pi_0 \cos\vartheta\, i_r - \Pi_0 \operatorname{sen}\vartheta\, i_\vartheta, \\ &\Pi_0 = |\Pi_0|. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Sostituendo l'espressione (25) nelle formule (22) e (23), usando l'espressione dell'operatore differenziale rot F in coordinate sferiche

$$\text{rot}\,F = \frac{1}{r\operatorname{sen}\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\operatorname{sen}\vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right] i_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right] i_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right] i_\varphi$$

e tenendo conto che $\Pi_0 = \Pi_0(r, t)$, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} &E_r = -\frac{2\cos\vartheta}{r}\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}, \\ &E_\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\right), \quad E_\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} &H_r = 0, \quad H_\vartheta = 0, \\ &H_\varphi = -\operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\, \partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Dalle equazioni (26) e (27) risulta che i campi elettrico e magnetico dell'oscillatore sono mutuamente perpendicolari.

5. Consideriamo il caso particolare in cui il momento di dipolo dipende periodicamente dal tempo

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t}.$$

Allora le formule (26) e (27) danno

$$\left.\begin{aligned} &E_r = 2\cos\vartheta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\Pi_0, \\ &E_\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \\ &H_\varphi = ik \operatorname{sen}\vartheta\left(ik - \frac{1}{r}\right)\Pi_0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

dove

$$\Pi_0 = p_0 \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t}. \tag{29}$$

Partendo dalla formula (28) si possono stabilire facilmente le caratteristiche di struttura del campo dell'oscillatore. A distanze piccole rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$ ($kr \ll 1$) nelle formule (28) ci si può limitare a un solo termine. Le formule che si ottengono in questo caso per l'intensità di campo elettrico corrispondono al campo del dipolo statico il cui momento elettrico p è uguale al valore istantaneo del momento dell'oscillatore $p(t)$. Per l'intensità di campo magnetico si ha un'espressione corrispondente alla legge di Biot-Savart. A grandi distanze dal dipolo $R \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) nella formula (28) si possono trascurare tutti i termini di ordine superiore a $1/r$. In questo caso abbiamo

$$E_r = 0, \quad E_\vartheta = H_\varphi = -k^2 \operatorname{sen}\vartheta \Pi_0, \tag{30}$$

vale a dire il campo diventa trasversale relativamente alla direzione di propagazione. Domini lontani in cui il campo di radiazione diventa trasversale si chiamano *zone d'onda dell'oscillatore*. Per calcolare il *flusso di energia* attraverso una superficie sferica di raggio R e centro nell'oscillatore, bisogna calcolare il vettore di Umov-Poynting

$$S = \frac{c}{4\pi} |[\boldsymbol{EH}]| = \frac{c}{4\pi} EH$$

ed integrare questa espressione sulla sfera.

Dalle formule (29) e (30) segue che nella zona d'onda la parte reale dei vettori H_φ e E_ϑ sarà definita dall'espressione

$$H_\varphi = E_\vartheta = -\frac{\omega^2 \operatorname{sen} \vartheta}{c^2 r} p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

da cui

$$S = \frac{p_0^2 \omega^4}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{r^2 c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Il flusso di energia attraverso una sfera di raggio R durante un periodo totale $T = 2\pi/\omega$ sarà dato dall'espressione

$$\sum = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} SR^2 \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2p_0^2 \omega^4}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left(t - \right.$$

$$\left. - \frac{R}{c}\right) dt$$

ossia

$$\sum = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}.$$

L'energia irradiata dall'oscillatore armonico è proporzionale alla quarta potenza della frequenza

$$\sum \sim \omega^4$$

ossia

$$\sum \sim \frac{1}{\lambda^4},$$

dove λ è la lunghezza d'onda.

Capitolo VI

PROPAGAZIONE DI CALORE NELLO SPAZIO

§ 1. Propagazione di calore nello spazio illimitato

1. Funzione di influenza termica. Nel capitolo III è stato mostrato che il processo di propagazione del calore in uno spazio isotropo omogeneo è definito dall'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right), \tag{1}$$

dove $u\ (M,\ t)$ è la temperatura del punto $M\ (x,\ y,\ z)$ all'istante t, ρ è la densità, c il coefficiente di calore specifico, k = costante ed $a^2 = k/c\rho$ coefficienti di conduzione di calore e di temperatura. L'equazione (1) ammette anche un'interpretazione dal punto di vista della diffusione. In questo caso u è la concentrazione di sostanza diffondente, $a^2 = D$ il coefficiente di diffusione.

Consideriamo nello spazio illimitato il problema seguente: *risolvere l'equazione della conduzione termica non omogenea*

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho} \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right), \qquad -\infty < x,\ y,\ z < \infty,\ t > 0, \tag{2}$$

(*f è la densità di sorgenti di calore*) *sotto la condizione iniziale*

$$u\ (x,\ y,\ z,\ 0) = \varphi\ (x,\ y,\ z). \tag{3}$$

La soluzione di questo problema si può rappresentare sotto la forma

$$u = u_1 + u_2,$$

dove u_1 è la soluzione dell'equazione omogenea (1) con condizioni iniziali non omogenee, u_2 la soluzione dell'equazione non omogenea (2) con condizioni iniziali nulle. Nello studio dei problemi unidimensionali corrispondenti abbiamo visto che per la loro soluzione è sufficiente determinare la funzione di sorgente.

Costruiamo la funzione di sorgente per l'equazione della conduzione termica nello spazio illimitato.

Dimostriamo preliminarmente il seguente lemma, del quale ci serviremo nel seguito.

Se la soluzione dell'equazione $\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$ *dipende unicamente da* r *e* t, *allora la funzione* $v = ru$ *verifica l'equazione*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4}$$

Scrivendo l'operatore di Laplace in coordinate sferiche, vediamo infatti che la funzione $u = u(r, t)$ verifica l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ oppure } \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

ponendo quindi $ru = v$, otteniamo per v l'equazione (4) *).

Supponiamo che all'origine delle coordinate sia collocata una sorgente di calore, di azione continua e di intensità costante q, mentre nel resto dello spazio la temperatura sia uguale a zero

$$u(r, 0) = 0 \text{ per } r \neq 0.$$

È evidente che in questo caso la temperatura u è funzione delle sole r e t.

L'esistenza di una sorgente di calore per $r = 0$ significa che il flusso di calore nell'unità di tempo attraverso la sfera S_ε (di centro in $r = 0$ e raggio ε) è uguale a q per $\varepsilon \to 0$, cioè

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[- \int\int_{S_\varepsilon} k \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \right] = q.$$

Poiché la derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ è costante in virtù della simmetria sulla superficie S_ε, allora

$$- k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \Big|_{r=\varepsilon} \to q \text{ per } \varepsilon \to 0,$$

il che vuol dire che la derivata $\frac{\partial u}{\partial r}$ per $r = 0$ ha una singolarità della forma $-q/4\pi k r^2$. Di conseguenza, la funzione stessa per $r = 0$ deve avere una singolarità della forma

$$u \sim \frac{q}{4\pi k r},$$

in modo che il prodotto $ru = v$ resti limitato per $r = 0$.

La funzione v definita dalle condizioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0, \\ &v(r, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

*) Si confronti con il n. 1, § 1 del capitolo V.

è data dalla formula

$$v(r,\ t) = v_0\left[1 - \Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right] = q\frac{1}{4\pi k}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

(si veda la formula (33), capitolo III, § 3). Di conseguenza, la soluzione del problema della propagazione della temperatura per una sorgente di calore ad azione continua e intensità q, collocata all'origine delle coordinate ($r = 0$), ha la forma

$$u(r,\ t) = qU(r,\ t) = q\frac{1}{4\pi k}\frac{1}{r}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha, \qquad (6)$$

dove $U(r,\ t)$ è la temperatura corrispondente alla sorgente unitaria ($q = 1$).

Per passare al caso di una sorgente istantanea, consideriamo una sorgente di intensità q, collocata nel punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ e avente azione continua durante l'intervallo di tempo τ.

Questa sorgente equivale a due sorgenti di intensità $+q$ e $-q$ di cui la prima si mette in azione per $t = 0$ e la seconda per $t = \tau$. La distribuzione delle temperature in questo caso è data dalla formula

$$u_\tau(r,\ t) = q\,[U(r,\ t) - U(r,\ t - \tau)].$$

Nell'intervallo di tempo τ si emana la quantità di calore $Q = q\tau$ e perciò

$$u_\tau(r,\ t) = \frac{Q}{\tau}[U(r,\ t) - U(r,\ t - \tau)].$$

Passando al limite per $\tau \to 0$ e supponendo Q costante, troviamo

$$u_0(r,\ t) = \lim_{\tau \to 0} u_\tau(r,t) = Q\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi k r}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\, \frac{r}{4a^2\sqrt{a^2 t^3}}\, a^2$$

ossia

$$u_0(r,\ t) = \frac{Q}{c\rho}\, G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta),$$

dove

$$G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \times$$

$$\times\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}}. \qquad (7)$$

Qui $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$ è la *funzione di influenza della temperatura* della sorgente istantanea di calore. Essa rappresenta la temperatura nel punto x, y, z all'istante t prodotta da una sorgente puntuale di intensità $Q = c\rho$, collocata all'istante $t = 0$ nel punto (ξ, η, ζ).

È facile vedere che

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1. \tag{8}$$

Infatti, l'integrale triplo (8) si può rappresentare come prodotto di tre integrali ciascuno dei quali vale uno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 1 \quad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

La formula (7) mostra che la funzione di influenza G gode della *proprietà di simmetria*

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t; x, y, z),$$

che esprime il principio di reciprocità: l'azione nel punto (x, y, z) della sorgente sita nel punto (ξ, η, ζ) è uguale all'azione nel punto (ξ, η, ζ) della stessa sorgente collocata nel punto (x, y, z). Tuttavia questa simmetria non sussiste per la variabile t, ciò che esprime l'irreversibilità nel tempo dei processi termici.

Determiniamo la forma della funzione di influenza G nel caso bidimensionale. Supponiamo che sulla retta parallela all'asse z e passante per il punto (ξ, η) sia collocata una sorgente lineare infinita di intensità $\overline{Q}$ = costante riferita all'unità di lunghezza. La funzione di influenza G_2 di questa sorgente non dipende da z ed è completamente caratterizzata dai suoi valori nel piano (x, y). Calcoliamo la funzione G_2. La quantità di calore emanata sull'elemento $d\zeta$ valga

$$dQ = \overline{Q}\, d\zeta;$$

allora la distribuzione della temperatura nello spazio è data dall'integrale

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{Q} d\zeta}{c\rho}\, G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta).$$

Calcolando l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}\, d\zeta = 2\sqrt{a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 2\sqrt{\pi a^2 t} \left(\alpha = \frac{\zeta - z}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

otteniamo

$$\bar{u} = \frac{\bar{Q}}{c\rho} G_2,$$

dove

$$G_2(x,\ y,\ t;\ \xi,\ \eta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}}. \qquad (8')$$

Confrontando questa funzione con la formula (7), ne vediamo la similitudine strutturale.

Analogamente si può ottenere un'espressione della funzione di sorgente nel caso unidimensionale. Considerando una sorgente piana infinita di densità costante $\bar{\bar{Q}}$, abbiamo

$$\bar{\bar{u}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\bar{Q}}\, d\eta\, d\zeta}{c\rho} G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \frac{\bar{\bar{Q}}}{c\rho} G_1(x,\ t,\ \xi),$$

dove

$$G_1(x,\ t;\ \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

è la funzione di sorgente per una sola dimensione.

Nel capitolo III sono stati dati i grafici che caratterizzano il comportamento della funzione di influenza $G(x,\ t;\ \xi)$. La caratteristica qualitativa della funzione di sorgente data nel capitolo III resta valida anche nel caso spaziale.

2. Propagazione di calore nello spazio illimitato. Applichiamo ora la funzione di sorgente sopra ottenuta alla soluzione del problema della propagazione di una temperatura iniziale nello spazio illimitato.

Si chiede di trovare la soluzione dell'equazione

$$u_t = a^2\, \Delta u, \quad -\infty < x,\ y,\ z < \infty, \quad t > 0, \qquad (1)$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$u(x,\ y,\ z,\ 0) = \varphi(x,\ y,\ z). \qquad (3)$$

Lo stato iniziale della temperatura si può rappresentare, evidentemente, come sovrapposizione dell'azione delle sorgenti istantanee che creano la temperatura iniziale. Consideriamo l'elemento di volume $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ contenente il punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$. Per creare la temperatura iniziale $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ è necessario collocare nel volume $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ la quantità di calore $dQ = c\rho\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Questa quantità di calore concentrata creerà nel punto (x, y, z) all'istante t la temperatura

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta,) = G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) \times$$

$$\times \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (9)$$

In virtù del principio di sovrapposizione la soluzione del problema considerato può essere ottenuta integrando l'espressione (9) su tutto lo spazio

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (10)$$

La formula (10) è stata dedotta in base a considerazioni intuitive che non ne definiscono i limiti di applicabilità e non hanno rigore dimostrativo.

Dimostriamo che

se una funzione φ *è continua a tratti e limitata,* $|\varphi| < A$, *allora la funzione* u, *definita dall'espressione*

$$u(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int\int e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \times$$

$$\times \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad (10')$$

1) *è limitata in tutto lo spazio:* $|u| < A$;

2) *rappresenta la soluzione dell'equazione della conduzione termica per* $t > 0$;

3) *per* $t = 0$ *è continua nei punti di continuità della funzione* φ *e soddisfa la condizione* $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$.

Per dimostrare che la (10′) verifica l'equazione (1), ricorriamo a un noto lemma (si veda il § 3 del capitolo III).

Se $U(x, y, z, t; \xi)$ *per ogni valore del parametro* ξ *è una soluzione dell'equazione* $\mathcal{L}(u) = 0$, *dove* $\mathcal{L}(u)$ *è un operatore differenziale lineare, allora anche la funzione*

$$u(x, y, z, t) = \int U(x, y, z, t; \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

è una soluzione dell'equazione $\mathcal{L}(u) = 0$ *se le sue derivate che figurano nell'operatore* $\mathcal{L}(u)$ *si possono calcolare per derivazione sotto il segno di integrale.*

Nel caso in esame $U = G$ verifica l'equazione della conduzione termica qualunque siano ξ, η, ζ e $t > 0$. Come è noto, la derivazione rispetto al parametro sotto il segno di integrale impropio è possibile se: 1) la derivata rispetto al parametro della funzione

integranda è continua e 2) l'integrale ottenuto per derivazione formale converge uniformemente.

Dopo aver integrato formalmente rispetto a x l'integrale (10') otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int \left(-\frac{x-\xi}{2a^2t}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (11)$$

La funzione integranda è continua per $\bar{t} > t > 0$ e l'esistenza del fattore $e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ garantisce la convergenza uniforme se la funzione φ è limitata: $|\varphi| < A$. Otterremo risultati analoghi con un'altra derivazione rispetto a x e una derivazione rispetto a t; lo stesso vale per derivazione rispetto a y e z. Quindi, la funzione G verifica tutte le condizioni del lemma per $t > 0$. Di conseguenza, la funzione u per $t > 0$ verifica l'equazione della conduzione termica.

La limitatezza della funzione u definita dalla formula (10') che riscriveremo nella forma

$$u(M,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int G(M,\ M',\ t)\, \varphi(M')\, d\tau_{M'}$$

$(M = M(x,\ y,\ z),\quad M' = M'(\xi,\ \eta,\ \zeta))$,

può essere stabilita direttamente tenendo conto dell'uguaglianza (8):

$$|u| < A \int_{-\infty}^{\infty}\int\int G\, d\tau = A. \qquad (12)$$

Passiamo alla dimostrazione della continuità di $u(x,\ y,\ z,\ t)$ per $t = 0$.

Consideriamo il punto $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ che è un punto di continuità della funzione φ e dimostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|u(M,\ t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \text{ per } |\overline{MM}_0| < \delta(\varepsilon) \text{ e } t < \delta(\varepsilon). \qquad (13)$$

Costruiamo il dominio ausiliario T_1 contenente il punto M_0; le sue dimensioni verranno determinate più avanti; indichiamo con T_2 il resto dello spazio. Tenendo conto delle uguaglianze

$$u(M,\ t) = \int_{T_1}\int\int G(M,\ M',\ t)\, \varphi(M')\, d\tau_{M'} +$$

$$+ \int_{T_2}\int\int G(M,\ M',\ t)\, \varphi(M')\, d\tau_{M'},$$

$$\varphi(M_0) = \iiint_{T_1} G(M, M', t)\,\varphi(M_0)\,d\tau_{M'} +$$

$$+ \varphi(M_0) \iiint_{T_2} G(M, M', t)\,d\tau_{M'},$$

e anche della positività della funzione $G(M, M', t)$ avremo

$$| u(M, t) - \varphi(M_0) | \leqslant J_1 + J_2, \tag{14}$$

dove

$$J_1 = \iiint_{T_1} G(M, M', t)\,|\,\varphi(M') - \varphi(M_0)\,|\,d\tau_{M'}, \tag{15}$$

$$J_2 = 2A \iiint_{T_2} G(M, M', t)\,d\tau_{M'}. \tag{16}$$

Dalla continuità della funzione φ nel punto fisso M_0 deriva quanto segue: qualunque sia $\eta > 0$ esiste sempre un $\delta'(\eta) > 0$ tale che

$$| \varphi(M') - \varphi(M_0) | < \eta, \text{ se } | \overline{M'M_0} | < \delta'(\eta).$$

Di conseguenza, se il diametro del dominio T_1 non è superiore a $\delta'(\varepsilon/3)$, allora

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{3} \iiint_{T_1} G\,d\tau_{M'} < \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\infty}^{\infty}\int\int G\,d\tau = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Soffermiamoci ora in dettaglio sulla scelta del dominio T_1. Come T_1 possiamo considerare una sfera di centro nel punto $M(x, y, z)$, comoda per stimare l'integrale J_2. La stima (17) dell'integrale J_1 resta valida se il raggio di questa sfera vale

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\,\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \text{ e se } | \overline{MM_0} | < \rho_0.$$

Passando a un sistema di coordinate sferiche avente come origine il punto M, otteniamo

$$\iiint_{T_1} G\,d\tau = 4\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int_0^{\rho_0} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} r^2\,dr =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\rho_0}{2\sqrt{a^2t}}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 1 \quad \left(\alpha = \frac{r}{2\sqrt{a^2t}}\right),$$

poiché

$$\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Quindi,

$$\int\int_{T_2}\int G\, d\tau = 1 - \int\int_{T_1}\int G\, d\tau \to 0 \text{ per } \overrightarrow{t \to 0},$$

vale a dire per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un $\delta''(\varepsilon)$ tale che

$$\int\int_{T_2}\int G\, d\tau < \frac{\varepsilon}{3A},$$

e, di conseguenza,

$$J_2 < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{18}$$

purché $t < \delta''(\varepsilon)$.

Considerando il più piccolo fra i numeri $\frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ e $\delta''(\varepsilon)$, indicandolo con $\delta(\varepsilon)$, avremo la disuguaglianza

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \text{ per } |\overline{MM_0}| < \delta(\varepsilon) \text{ e } t < \delta(\varepsilon), \tag{13}$$

la quale dimostra la continuità di $u(M, t)$ per $t = 0$ in ogni punto M_0 di continuità della funzione $\varphi(M)$.

Risolviamo ora l'equazione non omogenea

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho}, \qquad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0,$$

con la condizione iniziale nulla $u(x, y, z, 0) = 0$. Consideriamo il punto (ξ, η, ζ) all'istante $\tau < t$. La quantità di calore emanata nell'elemento $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ durante il tempo $d\tau$ vale

$$dQ = f\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

e genera nel punto (x, y, z) all'istante t la temperatura

$$\frac{1}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Usando il principio di sovrapposizione, possiamo scrivere la soluzione del problema posto nella forma

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t \int\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{1}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) \times$$

$$\times f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau. \tag{19}$$

Non ci soffermiamo qui sulla dimostrazione della validità di questa formula e sulla precisazione delle condizioni per la sua applicabilità.

I problemi per il semispazio con condizioni al contorno di prima e di seconda specie si risolvono con il metodo di riflessione.

§ 2. Propagazione di calore in volumi limitati

1. Schema del metodo di separazione delle variabili. Prima abbiamo studiato la propagazione di calore nello spazio illimitato. Per lo studio della propagazione di calore in un corpo limitato è necessario associare all'equazione e alla condizione iniziale le condizioni al contorno del corpo, che nei casi più semplici rappresentano condizioni al contorno di prima, seconda o terza specie.

Consideriamo il problema elementare con condizioni al contorno omogenee di prima specie:

risolvere l'equazione della conduzione termica

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{all'interno di } T \quad \text{per } t > 0 \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

e la condizione al contorno

$$u \mid_{\Sigma} = 0,$$

dove Σ è la frontiera del dominio T.

La soluzione di questo problema si può ottenere con il metodo usuale di separazione delle variabili esposto in applicazione all'equazione $u_{tt} = a^2 \Delta u$ nel capitolo V, § 3; questo metodo si applica analogamente al problema in questione.

Consideriamo il problema ausiliario seguente:

trovare la soluzione non banale dell'equazione

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad T \quad \text{per } t > 0, \tag{2}$$

che verifica la condizione al contorno omogenea

$$u \mid_{\Sigma} = 0$$

ed è rappresentabile sotto forma di prodotto

$$u(M, t) = v(M)\, T(t) \not\equiv 0.$$

Separando le variabili nel modo usuale, otteniamo le condizioni seguenti che definiscono le funzioni $v(M)$ e $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v + \lambda v = 0 \quad \text{in } T, \quad v(M) \not\equiv 0, \\ v = 0 \ \text{su } \Sigma \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{4}$$

Per la funzione v abbiamo il problema di determinare gli autovalori, con il quale abbiamo avuto a che fare studiando le vibrazioni di volumi limitati (si veda il capitolo V, § 3, n. 1).

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ autofunzioni del problema (3). Le funzioni $\{v_n\}$ formano un sistema ortogonale.

Le funzioni corrispondenti $T_n(t)$ hanno la forma

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t},$$

e il problema ausiliario ha la soluzione non banale seguente:

$$u_n(M, t) = C_n v_n(M)\, e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{5}$$

La soluzione generale del problema iniziale può essere rappresentato nella forma

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M). \tag{6}$$

Essendo soddisfatta la condizione iniziale

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \tag{7}$$

troviamo i coefficienti

$$C_n = \frac{\int_T \varphi(M')\, v_n(M')\, d\tau_{M'}}{\| v_n \|^2},$$

dove

$\| v_n \| = \left[\int_T v_n^2(M')\, d\tau_{M'} \right]^{1/2}$ è la norma della funzione v_n.

La funzione (6) rappresenta la soluzione del problema.

L'equazione

$$u_t - a^2\Delta u = f(M, t) \quad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right) \tag{8}$$

sotto condizioni al contorno omogenee e con condizioni iniziali può essere risolta anch'essa con il metodo di separazione delle variabili.

Ponendo, come al solito,

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, v_n(M) \tag{9}$$

e sviluppando la funzione $f(M, t)$ rispetto alle autofunzioni $v_n(M)$

$$f(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, v_n(M), \quad f_n(t) =$$

$$= \frac{1}{\| v_n \|^2} \int_T f(M', t)\, v_n(M')\, d\tau_{M'}, \tag{10}$$

otteniamo per definizione di $T_n(t)$ l'equazione

$$T_n' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t) \tag{11}$$

con la condizione iniziale $T_n(0) = 0$ se $u(M, 0) = 0$, la cui soluzione ha la forma

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Di qui ricaviamo

$$u(M, t) = \int_0^t \int_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\| v_n \|^2} \right\} f(M', \tau)\, d\tau_{M'}\, d\tau. \tag{13}$$

L'espressione fra parentesi graffa corrisponde, evidentemente, alla funzione di influenza di una sorgente istantanea di intensità $Q = c\rho$ collocata nel punto M' all'istante τ:

$$G(M, t, M', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\| v_n \|^2} e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)}. \tag{14}$$

La soluzione del primo problema ai limiti $\bar{u}$ per l'equazione della conduzione termica con condizioni al contorno non omogenee $\bar{u} \mid_\Sigma = \mu$ si riduce facilmente alla soluzione u di un'equazione non omogenea con condizioni al contorno omogenee $u \mid_\Sigma = 0$ ponendo

$$\bar{u} = u + \Phi, \tag{15}$$

dove Φ è una funzione arbitraria (sufficientemente liscia) che assume i valori μ su Σ (si veda il capitolo III, § 2). È assai frequente il caso di condizioni al contorno costanti, $\mu_0 =$ costante, il quale si riduce al problema con condizioni al contorno omogenee introducendo la funzione

$$\bar{u} = u + \mu_0 \quad (\Phi = \text{costante} = \mu_0)$$

che rappresenta una deviazione dalla soluzione stazionaria.

In tal modo, la difficoltà principale nella risoluzione dei problemi di propagazione di calore in un dominio limitato consiste nella ricerca di autofunzioni e autovalori per il dato dominio.

La forma della soluzione (6), ottenuta con il metodo di separazione delle variabili, è comoda per lo studio di uno stadio sufficientemente sviluppato del processo per t grande. Infatti, gli autovalori λ_n, per ogni dominio, crescono rapidamente al crescere dell'indice n. Perciò, se $t > 0$ la serie converge rapidamente e, a partire da un certo istante, il primo termine non nullo comincia a prevalere sulla somma degli altri termini

$$u\ (M,\ t) \approx C_1 v_1\ (M)\ e^{-a^2\lambda_1 t}. \tag{16}$$

Ciò corrisponde al fatto fisico che, indipendentemente dalla distribuzione iniziale, a partire da un certo istante nel corpo si stabilisce un regime di temperatura « regolare » per il quale il « profilo » della temperatura non varia con il tempo e l'ampiezza decresce esponenzialmente all'aumentare del tempo. Questo fatto costituisce la base dei metodi non stazionari per determinare il coefficiente di conduzione termica. Misurando infatti la temperatura del corpo in un punto qualsiasi M_0, troviamo

$$\ln \mid u\ (M_0,\ t) \mid \approx -a^2\lambda_1 t + \ln \mid C_1 v_1\ (M) \mid. \tag{17}$$

Il grafico di questa funzione viene rappresentato, a partire da un certo istante, da una retta di coefficiente angolare $-a^2\lambda_1$. Se è dato il valore λ_1 dipendente dalla forma del dominio in esame, si può trovare il coefficiente di conduzione termica.

2. Raffreddamento di un cilindro circolare. Consideriamo il problema del raffreddamento di un cilindro indefinitamente lungo di raggio r_0, avente una temperatura iniziale, se sulla sua superficie si mantiene la temperatura nulla. Supponiamo che la temperatura iniziale non dipenda da z (l'asse z coincide con l'asse del cilindro). Allora anche nel seguito la temperatura non dipenderà, evidentemente, da z e varierà soltanto nella sezione trasversale S del cilindro. Considerando in questa sezione un sistema di coordinate polari avente come origine il centro del cerchio S, avremo il problema di determinare una funzione $u\ (r,\ \varphi,\ t)$ che verifichi l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{18}$$

con la condizione iniziale

$$u\ (r,\ \varphi,\ 0) = \Phi\ (r,\ \varphi) \tag{19}$$

e la condizione al contorno

$$u\ (r_0,\ \varphi,\ t) = 0. \tag{20}$$

Come abbiamo visto, la soluzione di un problema di questo tipo può essere rappresentata sotto la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M), \tag{21}$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le autofunzioni del problema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad v \not\equiv 0, \\ &v(r_0, \varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Questo problema degli autovalori è stato già esaminato studiando le vibrazioni di una membrana circolare (si veda il capitolo V, § 3). A ciascun autovalore

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \tag{23}$$

corrispondono due autofunzioni

$$\bar{v}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi \quad \text{e} \quad \bar{\bar{v}}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\operatorname{sen} n\varphi, \tag{24}$$

i quadrati della norma delle quali valgono

$$\| \bar{v}_{nm} \|^2 = \| \bar{\bar{v}}_{nm} \|^2 = \pi \frac{\varepsilon_n r_0^2}{2} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0, \end{cases} \tag{25}$$

dove $\mu_m^{(n)}$ è l'm-esima radice dell'equazione

$$J_n(\mu) = 0. \tag{26}$$

Usando le espressioni di v e λ, otteniamo

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (\bar{C}_{nm}\cos n\varphi + \bar{\bar{C}}_{nm}\operatorname{sen} n\varphi) \times$$

$$\times J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{-a_2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{27}$$

dove i coefficienti $\bar{C}_{nm}$ e $\bar{\bar{C}}_{nm}$ sono definiti dalla funzione iniziale

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi \, r\, d\varphi\, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}, \\ \bar{\bar{C}}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\operatorname{sen} n\varphi \, r\, d\varphi\, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}, \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Se la temperatura iniziale Φ dipende unicamente da r, la serie doppia (27) viene sostituita dalla serie

$$u(r,\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{29}$$

dove

$$C_m = \frac{2\int_0^{r_0} \Phi(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} \qquad (J_1 = -J_0'), \tag{30}$$

e $\mu_m^{(0)}$ è l'm-esima radice dell'equazione $J_0(\mu) = 0$.

Soffermiamoci in dettaglio sul problema del raffreddamento di un cilindro uniformemente riscaldato la cui superficie è a temperatura nulla. Se la temperatura iniziale è

$$u(r,\ 0) = \Phi = u_0,$$

allora

$$C_m = \frac{2u_0 \int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} = \frac{2u_0}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}, \tag{30'}$$

poiché $\alpha J_0(\alpha) = [\alpha J_1(\alpha)]'$. Otteniamo così

$$\frac{u(r,\ t)}{u_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} e^{-(\mu_m^{(0)})^2\theta} \qquad \left(\rho = \frac{r}{r_0},\ \theta = \frac{a^2 t}{r_0^2}\right). \tag{31}$$

Le tabelle delle funzioni cilindriche (si veda la tabella 3 alla pag. 738) danno i valori numerici sia per le radici $\mu_m^{(0)}$ che per $J_1(\mu_m^{(0)})$.

In particolare,

$$\mu_1^{(0)} = 2{,}40, \quad J_1(\mu_1^{(0)}) = 0{,}52,$$
$$\mu_2^{(0)} = 5{,}52, \quad J_1(\mu_2^{(0)}) = 0{,}34.$$

La serie (31) converge rapidamente e per t grande ci si può limitare al primo termine della detta serie. In particolare, sull'asse del cilindro si ha

$$\frac{u(r,\ t)}{u_0}\bigg|_{r=0} = \frac{2}{2{,}40 \cdot 0{,}52} e^{-(2{,}40)^2\theta} = 1{,}60 e^{-5{,}760} \qquad \left(\theta = \frac{a^2 t}{r_0}\right). \tag{32}$$

3. Calcolo delle dimensioni critiche. È stato mostrato nel capitolo III che il processo di diffusione di un gas instabile, la cui velocità di disintegrazione è proporzionale alla concentrazione, conduce all'equazione

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \qquad (\beta < 0). \tag{33}$$

Grande interesse presentano i processi di diffusione in presenza di *reazioni a catena*. La caratteristica delle reazioni a catena è che le particelle della sostanza diffondente si « riproducono » entrando in reazione con il mezzo circostante. Così, ad esempio, negli urti fra i neutroni e i nuclei d'uranio « attivi » si produce una reazione di scissione dei nuclei, accompagnata dalla comparsa di neutroni nuovi il cui numero supera uno. Questi neutroni, a loro volta, entrano in reazione con altri nuclei attivi suscitandone la scissione con emissione di nuovi neutroni ecc. In tal modo avviene un processo di moltiplicazione di neutroni che ha il carattere della reazione a catena.

Considerando il detto processo nell'« approssimazione della diffusione » otteniamo la seguente equazione

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta > 0), \tag{33''}$$

poiché la reazione a catena è equivalente all'esistenza di sorgenti di una sostanza diffondente (neutroni) proporzionali alla concentrazione (densità di neutroni).

Studiamo il seguente problema:

trovare la soluzione dell'equazione

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad \text{all'interno di } T, \tag{33}$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$u(M, 0) = \varphi(M) \tag{34}$$

e alla condizione al contorno

$$u \mid_{\Sigma} = 0. \tag{35}$$

La sostituzione

$$u(M, t) = \bar{u}(M, t)\, e^{\beta t} \tag{36}$$

trasforma l'equazione (33) nella (1); in questo caso le condizioni iniziali e al contorno restano invariate. Quindi, la funzione cercata ha la forma

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(\beta - a^2 \lambda_n) t} v_n(M), \tag{37}$$

dove C_n sarà definito dalla funzione iniziale in base alla formula (10). Nel caso $\beta < 0$ (diffusione con disintegrazione) gli esponenti della serie (37) sono inferiori agli esponenti corrispondenti della serie (6). Ciò significa che in presenza di disintegrazione la concentrazione decresce più rapidamente che nel caso di diffusione pura ($\beta = 0$). Nel caso $\beta > 0$ (diffusione con moltiplicazione), se almeno uno degli esponenti $\beta - a^2\lambda > 0$, cioè se $\beta > a^2\lambda_1$, con il tempo la concentrazione, in generale ($C_1 \neq 0$), crescerà esponenzialmente (reazione a catena). La grandezza β è una caratteristica della sostanza (coefficiente di moltiplicazione) e λ_1 di-

pende notevolmente dalla forma e dalle dimensioni del dominio. Diremo che il dominio T_{cr} ha per β data le *dimensioni critiche* se $\lambda_1 = \beta/a^2$. Definiamo le dimensioni critiche per uno strato infinito, per il cilindro e la sfera.

1. *Strato infinito* $0 \leqslant x \leqslant l$. Supponendo il problema unidimensionale, abbiamo (si veda il capitolo II, § 3)

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Lo spessore critico dello strato l_{cr} a partire dal quale si produrrà il processo di aumento rapido della concentrazione u è dato dalla condizione

$$l_{cr} = \frac{a\pi}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{3{,}14a}{\sqrt{\beta}} \quad (\beta > 0). \tag{38}$$

2. *Cilindro infinito.* Considerando il problema come piano, vediamo che il valore più piccolo λ corrisponde a un'autofunzione godente di simmetria radiale e vale

$$\lambda_1^{(0)} = \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_0}\right)^2 \quad (\mu_1^{(0)} = 2{,}4048).$$

Di qui ricaviamo la seguente formula che definisce il diametro critico:

$$d_{cr} = \frac{2\mu_1^{(0)}a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{4{,}80a}{\sqrt{\beta}}. \tag{39}$$

3. *Sfera.* Il valore più piccolo λ corrisponde a un'autofunzione godente di simmetria sferica e vale

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2, \tag{40}$$

da cui ricaviamo l'espressione che dà il diametro critico

$$D_{cr} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{6{,}28a}{\sqrt{\beta}}. \tag{41}$$

§ 3. Problemi ai limiti per domini a frontiere mobili

1. Formula di Green per l'equazione della conduzione termica e funzione di sorgente. Per l'equazione della conduzione termica si possono porre problemi ai limiti per domini a frontiera variabile con il tempo.

Per semplicità, considereremo questo problema per l'equazione di una variabile geometrica

$$\mathscr{L}(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0, \tag{1}$$

sebbene tutto quanto esposto più avanti possa essere esteso al caso di più variabili.

Consideriamo il dominio $BAEF$ (fig. 78) delimitato dalle caratteristiche AB ed EF (t = costante) e dalle curve definite mediante le equazioni

$x = \chi_1(t)$ (per AE)

e

$x = \chi_2(t)$ (per BF).

Il primo problema ai limiti per questo dominio consiste nel determinare la soluzione dell'equazione (1), che verifica le condizioni iniziale e al contorno

$$\left.\begin{aligned} &u = \varphi(x) \quad \text{su} \quad AB, \\ &u\,|_{x=\chi_1(t)} = \mu_1(t), \quad u\,|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dal principio del valore massimo segue immediatamente che questo problema non può avere più di una soluzione continua. Analogamente si possono impostare altri problemi ai limiti.

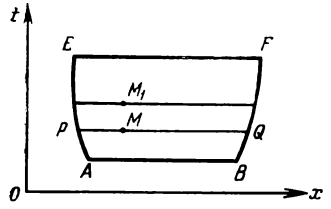


Fig. 78

Stabiliamo la formula di Green per l'equazione (1) e una rappresentazione integrale delle soluzioni di questo problema.

Consideriamo l'operatore

$$\mathscr{M}(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\,; \tag{3}$$

integrando l'espressione

$$\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi) = a^2 (\psi\varphi_x - \varphi\psi_x)_x - (\varphi\psi)_t$$

su un dominio $PABQ$ (fig. 78), dove $\varphi(x, t)$ e $\psi(x, t)$ sono due funzioni arbitrarie derivabili un numero sufficiente di volte, e usando la formula di Green otteniamo

$$\int\int [\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi)]\, dx\, dt = \oint \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right],$$

dove il primo integrale è esteso al contorno chiuso $PABQ$. Se $\mathscr{L}(\varphi) = 0$ e $\mathscr{M}(\psi) = 0$, allora scrivendo in modo particolareggiato il secondo membro, abbiamo

$$\int_{PQ} \varphi\psi\, dx = \int_{AB} \varphi\psi\, dx + \int_{BQ} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right] -$$

$$- \int_{AP} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]. \tag{4}$$

Supponiamo che $\varphi(x, t) = u(x, t)$ sia una soluzione dell'equazione della conduzione termica $\mathscr{L}(u) = 0$ e che $\psi = G_0(x, t, \xi, \tau)$ sia la funzione di sorgente di questa equazione sulla retta infinita

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - \tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \tag{5}$$

detta spesso *soluzione fondamentale dell'equazione della conduzione termica*. La funzione $G_0(x, t, \xi, \tau)$ verifica l'equazione $\mathscr{L}(G_0) = 0$ nelle variabili x, t e l'equazione coniugata $\mathscr{M}(G_0) = 0$ nelle variabili ξ, τ.

Sia $M(x, t)$ un punto interno, fisso, del dominio $BAEF$ in cui vogliamo definire il valore della funzione $u(x, t)$ e sia M_1 un punto di coordinate x, $t + h$, dove $h > 0$. Tracciando per il punto M la caratteristica PQ, sosti-

tuendo nella formula (4) x con ξ e t con τ e applicandola quindi al dominio $ABQP$ (fig. 78) e alle funzioni

$$\varphi = u(\xi, \tau) \quad \text{e} \quad \psi(\xi, \tau) = G_0(x, t+h, \xi, \tau), \tag{6}$$

avremo

$$\int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi =$$

$$= \int_{PABQ} \left[u(\xi, \tau) G_0(x, t+h, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau \right]. \tag{7}$$

Passando al limite per $h \longrightarrow 0$, tenendo conto della continuità della funzione $G_0(x, t+h, \xi, \tau)$ relativamente ad h e della derivata $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ su $PABQ$ e partendo dall'uguaglianza

$$\lim_{h \to 0} \int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = u(x, t)\ ^*), \tag{8}$$

se (x, t) giace sulla semiretta PQ, otteniamo la formula integrale fondamentale

$$u(x, t) = \int_{PABQ} u(\xi, \tau) G_0(x, t, \xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ \int_{BQ+PA} a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau, \tag{9}$$

che fornisce una rappresentazione di arbitrarie soluzioni dell'equazione della conduzione termica. Riscriviamola ancora una volta in modo più dettagliato

$$u(x, t) = \int_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} u(\xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ a^2 \int_{BQ+PA} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau -$$

$$- a^2 \int_{BQ+PA} u(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \right) d\tau. \tag{9'}$$

Questa formula non dà soluzioni dei problemi ai limiti poiché il calcolo del secondo membro chiede la conoscenza non soltanto della funzione u, ma anche di $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ lungo gli archi AE e BF.

Una trasformazione simile a quella che abbiamo usato per l'equazione di Laplace nell'introdurre la funzione di sorgente consente di eliminare $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ da questa formula.

Supponiamo che v sia una soluzione dell'equazione coniugata $\mathcal{M}(v) = 0$, la quale si annulla su PQ, e che u sia la soluzione dell'equazione $\mathcal{L}(u) = 0$.

*) Si veda il capitolo III, § 3.

Applicando la formula (4) alle funzioni v ed u nel dominio $PABQ$, otteniamo

$$0 = \int_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, v(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\tau \right]. \tag{10}$$

Sottraendo dalla formula (9) l'uguaglianza (10) avremo

$$u(x, t) = \int_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau \right], \tag{11}$$

dove

$$G(x, t, \xi, \tau) = G_0(x, t, \xi, \tau) - v. \tag{12}$$

Se la funzione v è tale che

$G = 0$ su PA e BQ,

allora si ottiene una rappresentazione integrale di $u(x, t)$ nella forma

$$u(x, t) = \int_{AB} u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int_{AP} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau - a^2 \int_{BQ} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau. \tag{13}$$

La formula (13) è la soluzione del problema ai limiti (1)-(2) nelle cui condizioni sono assegnati i valori della funzione u su AP, BQ e sulla retta AB.

Soffermiamoci in dettaglio sulla funzione G. Essa è data dalla rappresentazione (12) dove la funzione $v(\xi, \tau)$ è definita dalle seguenti condizioni:

1°. $v(\xi, \tau)$ è definita nel dominio $PABQ$, e per $\tau < t$ verifica l'equazione coniugata $\mathscr{M}(v) = 0$;

2°. $v = 0$ su PQ, cioè per $\tau = t$;

3°. $v(\xi, \tau) = -G_0(x, t, \xi, \tau)$ su PA e QB.

In virtù di queste condizioni la funzione v dipende dai parametri x, t in modo che $v = v(x, t, \xi, \tau)$ e per determinarla occorre risolvere il problema ai limiti per l'equazione $\mathscr{M}(v) = 0$, ciò che equivale alla soluzione di un problema ai limiti del tipo (2) per l'equazione $\mathscr{L}(u) = 0$, come si vede con chiarezza cambiando il segno di τ. Quindi, rappresentando la funzione $u(x, t)$ mediante la formula (11) che fornisce la soluzione del problema ai limiti (2), la difficoltà principale è legata alla ricerca della funzione $v(x, t, \xi, \tau)$.

Consideriamo la funzione $\bar{v}(x, t, \xi, \tau)$ definita dalle condizioni:

1°. $\bar{v}(x, t, \xi, \tau)$ è definita nel dominio $PABQ$ per $t > \tau$ e come funzione delle variabili x, t verifica l'equazione della conduzione termica $\mathscr{L}(v) = 0$.

2°. $\bar{v} = 0$ su AB, cioè per $t = \tau$.

3°. $\bar{v} = -G_0$ su AP e BQ.

Dimostriamo che $v(x, t, \xi, \tau) = \bar{v}(x, t, \xi, \tau)$.

Consideriamo la funzione $\bar{G}(x, t, \xi, \tau) = G_0 + \bar{v}$. È evidente che per ogni soluzione $\bar{u}$ dell'equazione $\mathscr{M}(u) = 0$ sussiste una formula analoga alla (9)

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \int_{BQPA} \bar{u} G_0\, dx + a^2 \left(\bar{u} \frac{\partial G_0}{\partial x} - G_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dt, \tag{9''}$$

e anche una formula analoga alla (13)

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \int_{PQ} \bar{u} \bar{G}\, dx + a^2 \int_{BQ} \bar{u} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}\, dt - a^2 \int_{AP} \bar{u} \frac{\partial \bar{G}_0}{\partial x}\, dt. \tag{13'}$$

Queste formule si possono ricavare dalle (9) e (13) cambiando il segno di τ, poiché in questo caso l'equazione $\mathscr{M} = 0$ si trasforma nell'equazione $\mathscr{L} = 0$.

Applicando la formula (13) al dominio $PQRS$ (fig. 79), dove RS è un segmento di retta corrispondente all'ordinata θ, $t > \theta > \tau$, e alla soluzione $u(x, t) = \overline{G}(x, t, \xi, \theta)$ continua in questo dominio dell'equazione $\mathcal{L}(u) = 0$, otteniamo

$$\overline{G}(x, t, \xi, \tau) = \int_{RS} \overline{G}(x', \theta, \xi, \tau)\, G(x, t, x', \theta)\, dx',$$

poiché gli integrali estesi a RP e SQ sono nulli in virtù della condizione 3°.

Applicando analogamente la formula (13′) al dominio $ARSB$ e alla soluzione continua in questo dominio $\overline{u}(\xi, \tau) = G(x, t, \xi, \tau)$ dell'equazione $\mathcal{M}(u) = 0$, otteniamo

$$G(x, t, \xi, \tau) = \int_{RS} G(x, t, x', \theta)\, \overline{G}(x', \theta, \xi, \tau)\, dx',$$

poiché gli integrali su BS e AR sono nulli. Il confronto di queste formule mostra che

$$G(x, t, \xi, \tau) \equiv \overline{G}(x, t, \xi, \tau).$$

Questa uguaglianza dimostra che la funzione G, considerata come funzione delle variabili x e t, ha per $t = \tau$ e $x = \xi$ una singolarità, caratteristica della

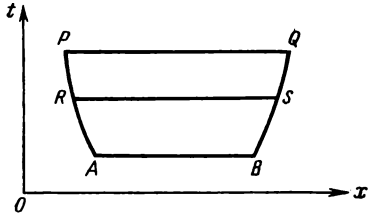


Fig. 79

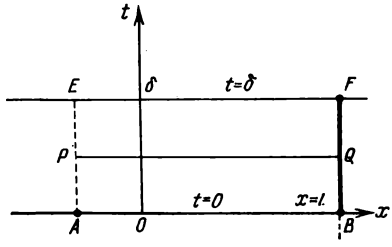


Fig. 80

funzione di sorgente, si annulla per $t = \tau$ e $x \neq \xi$, verifica l'equazione $\mathcal{L}_{x,t}(G) = 0$ all'interno del dominio $APQB$ e diventa nulla su AP e BQ. È naturale chiamare questa funzione *funzione di influenza della sorgente puntuale* per l'equazione della conduzione termica nel dominio $APQB$.

Dunque, *ogni soluzione dell'equazione della conduzione termica può essere rappresentata dalla formula* (13) *mediante una funzione di sorgente.*

Se è data l'equazione non omogenea $\mathcal{L}(u) = f(x, t)$, allora al secondo membro della formula (13) si deve aggiungere il termine

$$\int\int_S G(x, t, \xi, \tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

2. Risoluzione di un problema ai limiti. La formula (13) dedotta sopra fornisce la soluzione del problema ai limiti per un segmento limitato con estremi mobili. Se gli estremi del segmento AB sono fissi, gli archi AE e BF vanno sostituiti con segmenti di retta paralleli all'asse t. In questo caso il dominio S ha forma di un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati. Dalla formula generale (11) si può dedurre, mediante un passaggio al limite, la formula di Poisson che fornisce la soluzione dell'equazione della conduzione termica con condizioni iniziali assegnate sulla retta infinita.

Supponiamo che in una parte della striscia limitata da due caratteristiche $t = 0$ e $t = \delta$ passanti per i punti A ed E (fig. 80) le funzioni u e u_x verifichi-

no le disuguaglianze

$$| u(x, t) | e^{-Kx^2} < N$$

e

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| e^{-Kx^2} < N, \qquad (A)$$

dove $K > 0$ e $N > 0$ sono due numeri. Sostituiamo l'arco BQ con il segmento di retta $x = l$, dove l è un numero positivo che nel seguito faremo crescere indefinitamente. In questo caso partiremo dalla formula (9) riscritta come segue:

$$u(x, t) = \int_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau - u(\xi, \tau) \frac{x-\xi}{2(t-\tau)}\, d\tau \right].$$

Consideriamo l'integrale esteso al segmento BQ

$$\int_{BQ} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=l} - u(l, \tau) \frac{x-l}{2(t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= \int_0^t a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=l} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}}\, d\tau -$$

$$- \int_0^t u(l, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}} (x-l)\, d\tau}{4\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}\,(t-\tau)} = I_1 + I_2$$

e mostriamo che esso tende a zero per $l \longrightarrow \infty$.

Diamo la stima dell'integrale I_1 per l grande

$$| I_1 | \leqslant \frac{N a^2}{2\sqrt{\pi a^2}}\, e^{Kl^2 - \frac{l^2}{16a^2\delta}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}} \quad \left(\text{se } x < \frac{l}{2} \text{ e } (t-\tau) < \delta \right).$$

È evidente che $| I_1 | \longrightarrow 0$ per $l \longrightarrow \infty$ poiché K è un numero fisso e δ può essere piccolo a piacere, ad esempio, tale che

$$K < \frac{1}{16a^2\delta}.$$

Analogamente si dimostra che $| I_2 | \to 0$ per $l \to \infty$.

Se per la funzione $u(x, t)$ e la sua derivata $\frac{\partial u}{\partial x}$ le disuguaglianze (A) si verificano anche per valori negativi di x, allora si può considerare come curva AE il segmento di retta $x = -l$ e, riprendendo le suddette considerazioni, vedere che passando al limite l'integrale su PA nella formula (9) tende a zero. Come risultato otteniamo la formula di Poisson che abbiamo già dedotto nel capitolo III, § 3 *)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{t}}\, u(\xi, 0)\, d\xi.$$

*) Le considerazioni citate non si possono considerare come deduzione di questa formula in quanto siamo partiti da essa nel dedurre la formula (9).

Considerando un dominio seminfinito e supponendo che per la funzione di sorgente $G(x, t, \xi, \tau)$ siano soddisfatte le disuguaglianze (A), mediante considerazioni analoghe troviamo

$$u(x, t) = -\int_{PA} a^2 \mu(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x_A} d\tau + \int_{x_A}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x, t, \xi, 0)\, d\xi, \tag{14}$$

dove

$\mu(t) = u(x_A, t)$ e $\varphi(x) = u(x, 0)$.

Come è facile provare, la funzione di sorgente per la retta seminfinita $x \geqslant 0$ può essere ottenuta con il metodo della riflessione e vale

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right],$$

poiché essa è rappresentabile nella forma (12), verifica l'equazione della conduzione termica nelle variabili x, t e si annulla per $x = 0$:

$G(0, t, \xi, \tau) = 0$.

Calcoliamo la derivata

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

riportandone il valore nella (14), otteniamo la formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \times$$

$$\times \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t} \frac{a^2 x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau, \tag{15}$$

la quale definisce la funzione $u(x, t)$ che verifica l'equazione

$u_t = a^2 u_{xx}$ $\quad (0 < x < \infty,\ t > 0)$

e le condizioni aggiuntive

$u(x, 0) = \varphi(x)$,
$u(0, t) = \mu(t)$ $\quad (0 < x < \infty)$.

3. Funzione di sorgente per un segmento. La soluzione dell'equazione della conduzione termica sul segmento limitato $0 < x < l$ è data dalla formula (11) la quale dopo la sostituzione degli archi PA e BQ con segmenti di retta e spostando l'origine delle coordinate nel punto A diventa

$$G(x, t; \xi, \tau) = a^2 \int_0^{t} \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} \mu_1(\tau)\, d\tau - a^2 \int_0^{t} \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=l} \mu_2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{l} G(x, t, \xi, 0)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

dove

$$\mu_1(t) = u(0, t), \quad \mu_2(t) = u(l, t), \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

La funzione di sorgente $G(x, t, \xi, \tau)$ per un segmento di retta può essere costruita con il metodo della riflessione. Collocando le sorgenti positive nei punti $2nl + \xi$ e quelle negative nei punti $2nl - \xi$, rappresentiamo la funzione di sorgente mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G_0(x, t, 2nl+\xi, \tau) - G_0(x, t, 2nl-\xi, \tau)], \tag{16}$$

dove

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

è la funzione di sorgente per la retta infinita.

La convergenza della serie e la verifica delle condizioni al contorno $G|_{x=0} = 0$ e $G|_{x=l} = 0$ si possono stabilire senza difficoltà alcuna.

Nel § 2 del capitolo III abbiamo ottenuto un'altra forma per la rappresentazione della funzione di sorgente

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{17}$$

Dimostriamo l'equivalenza di ambedue le rappresentazioni.

La formula (17) si può considerare come sviluppo in serie di Fourier di seni della funzione $G(x, t, \xi, \tau)$ sull'intervallo $(0, l)$

$$G(x, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x, t, \tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{1} \xi. \tag{18}$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier G_n della funzione G definita dalla serie (16)

$$G_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t, \xi, \tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^l G_0(x, t, 2nl+\xi_1, \tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi_1 \, d\xi_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^l G_0(x, t, 2nl-\xi_2, \tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi_2 \, d\xi_2 \right\}.$$

Introducendo nuove variabili di integrazione

$$\xi' = 2nl + \xi_1 \quad \text{e} \quad \xi'' = 2nl - \xi_2,$$

otteniamo

$$G_n=\frac{2}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{2nl}^{(2n+1)l} G_0(x,\ t,\ \xi',\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi'\,d\xi'+\right.$$

$$+\left.\int_{(2n-1)l}^{2nl} G_0(x,\ t,\ \xi'',\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi''d\xi''\right.,$$

da cui segue

$$G_n=\frac{2}{l}\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x,\ t,\ \xi,\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{l}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Introduciamo la variabile

$$\lambda=\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}}.$$

Allora

$$d\lambda=\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}};\ \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi=\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}(x+2\sqrt{a^2(t-\tau)}\,\lambda)=$$

$$=\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}\,\lambda+\cos\frac{\pi n}{l}x\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}\,\lambda;$$

$$G_n=\frac{2}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}\cos\frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}\,\lambda\,d\lambda+$$

$$+\frac{2}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}\,\lambda\,d\lambda.$$

Il secondo integrale è nullo poiché sotto il segno di integrale figura una funzione dispari relativamente all'origine delle coordinate.

Il primo integrale rappresenta un caso particolare dell'integrale

$$I(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda\,d\lambda,$$

uguale a

$$I(\alpha,\ \beta)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

Nel caso considerato $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}$, di modo che

$$I = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)}$$

e

$$G_n = \frac{2}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x.$$

Sostituendo l'espressione trovata dei coefficienti di Fourier G_n nella formula (18), otteniamo immediatamente la seconda rappresentazione (17) per la funzione di sorgente G. Abbiamo così dimostrato l'equivalenza delle due rappresentazioni distinte (16) e (17).

§ 4. Potenziali termici

1. Proprietà dei potenziali termici a strato semplice e doppio. Come abbiamo visto, ogni soluzione dell'equazione della conduzione termica può essere rappresentata nella forma (fig. 79)

$$u(x, t) = \int_{AB} G_0 u \, d\xi - \int_{AP} G_0 u \, d\xi +$$

$$+ \int_{BQ} G_0 u \, d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau.$$

Studiamo i termini separati di questa somma e dimostriamo soprattutto che ciascuno di essi verifica separatamente l'equazione della conduzione termica. Infatti, il primo termine rappresenta l'integrale di Poisson per il quale ciò è stato già dimostrato.

Dimostriamo che per i punti interni del dominio $PABQ$ l'equazione della conduzione termica è verificata dagli integrali

$$V = a^2 \int_{AP} G_0 \nu \, d\tau = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) \, d\tau \qquad (\xi = \chi_1(\tau)),$$

$$W = 2a^2 \int_{AP} \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \mu \, d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) \, d\tau.$$

Le funzioni V e W sono dette potenziali termici (a strato semplice o doppio, rispettivamente).

Le derivate delle funzioni V e W si calcolano per derivazione sotto il segno di integrale poiché la sostituzione che rientra nella derivazione rispetto a t è nulla. Ad esempio,

$$G_0(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \mu(\tau)\,|_{\tau=t} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0$$

per il fatto che $x \neq \chi_1(t)$. In tal modo, la derivazione rispetto ai parametri x, t si riferirà alla funzione G_0 che rappresenta la soluzione dell'equazione della conduzione termica. Lo studio degli altri termini si effettua analogamente.

Consideriamo ora il comportamento delle funzioni V e W sulla curva AP ($x = \chi_1(t)$). È evidente che l'integrale V è continuo quando il punto (x, t) descrive la curva AP poiché questo integrale converge uniformemente (si veda il capitolo IV, § 5). Dimostriamo che W ha una discontinuità passando per la curva AP e che

$$W|_{x=\chi_1(t)+0} = W|_{x=\chi_1(t)} + \mu(t),$$

$$W|_{x=\chi_1(t)-0} = W|_{x=\chi_1(t)} - \mu(t).$$

Questa dimostrazione verrà condotta sotto l'ipotesi di derivabilità delle funzioni $\chi_1(t)$ e $\mu(t)$.

Consideriamo dapprima W di densità costante $\mu(t) = \mu_0$

$$W^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_0 \, d\tau$$

e l'integrale ausiliario

$$\widetilde{V}^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_0 \, d\tau,$$

che è, in virtù della suddetta osservazione, una funzione continua nei punti dell'arco AP.

La differenza $W^0 - \widetilde{V}^0$ si calcola direttamente

$$W^0(x, t) - \widetilde{V}^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \right] \mu_0 \, d\tau = \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\chi_1(t_0)}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\alpha_0} e^{-\alpha^2} \, d\alpha \quad \left(\alpha = \frac{x - \chi_1(\tau)}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}} \right),$$

dove

$\alpha_0 = +\infty$, se $x > \chi_1(t)$,

$\alpha_0 = 0$, se $x = \chi_1(t) = x_0$,

$\alpha_0 = -\infty$, se $x < \chi_1(t)$.

Per $x \to x_0 \pm 0$ otteniamo

$$[W^0(x_0 \pm 0, t) - W^0(x_0, t)] - [\widetilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \widetilde{V}(x_0, t)] =$$

$$= \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\pm\infty} e^{-\alpha^2} \, d\alpha = \pm \mu_0.$$

In virtù della continuità di $\widetilde{V}$ abbiamo

$$\widetilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \widetilde{V}(x_0, t) = 0.$$

In tal modo

$$W^0(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu_0.$$

Se $\mu(t)$ non è costante, allora

$$W(x, t) = W^0(x, t) - \psi(x, t),$$

dove

$$\psi(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} [\mu(t) - \mu(\tau)]\, d\tau.$$

Per l'ipotesi di derivabilità della funzione $\mu(t)$, questo integrale ha la stessa singolarità di V per $\tau = t$, converge uniformemente e rappresenta una funzione continua sulla curva AP. Quindi, il limite di $W(x, t)$ per $x = x_0 \pm 0$ vale

$$W(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu,$$

come dovevasi dimostrare.

È facile capire che la derivata $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t)$ è discontinua per $x = x_0$, come $W(x, t)$. Questa derivata vale

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

ed è uguale a $-W(x, t)$ di densità

$$\mu(t) = \frac{\nu(t)}{2}.$$

Ne segue che

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 \pm 0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) \pm \frac{\nu(t)}{2},$$

dove l'integrale

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x_0 - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x_0-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

è uguale alla semisomma delle derivate di V a destra e sinistra del punto x_0

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 + 0, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x_0 - 0, t)\right].$$

È da notare che la funzione $V(x, t)$ non ha derivata nel punto stesso x_0.

Con ciò terminiamo lo studio dei potenziali lungo la curva AP. Le loro proprietà lungo la curva BQ sono completamente analoghe.

2. Risoluzione dei problemi ai limiti. I potenziali termici rappresentano un apparato analitico comodo per la soluzione dei problemi ai limiti.

Consideriamo anzitutto il primo probema ai limiti per il dominio semilimitato $x \geqslant \chi(t)$:

trovare la soluzione dell'equazione

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{per} \quad x \geqslant \chi_1(t), \quad t \geqslant t_0,$$

che verifica le condizioni

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \geqslant \chi_1(t_0);$$

$$u[\chi_1(t); t] = \mu(t), \quad t \geqslant t_0$$

Senza perdita di generalità, si può supporre $\varphi(x) = 0$ poiché, calcolando la differenza fra $u(x, t)$ e una soluzione arbitraria dell'equazione della conduzione termica $v(x, t)$ soddisfacente alla stessa condizione iniziale, otteniamo una nuova funzione per la quale $\varphi(x) = 0$ e la condizione al contorno resta la stessa.

Supponendo che la riduzione alla condizione iniziale nulla sia già stata effettuata, rappresentiamo la soluzione sotto la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2} W(x, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \overline{\mu}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(t)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \overline{\mu}(\tau)\, d\tau;$$

questa funzione verifica l'equazione per $x > \chi_1(t)$, è limitata all'infinito e ha valore iniziale nullo per ogni $\overline{\mu}(t)$. Per $x = \chi_1(t)$ questa funzione è discontinua e il suo valore limite per $x = \chi_1(t) + 0$ deve essere uguale a $\mu(t)$, ossia

$$\frac{\overline{\mu}(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \overline{\mu}(\tau)\, d\tau = \mu(t).$$

Questa relazione è un'equazione integrale di Volterra di seconda specie per la ricerca della funzione $\overline{\mu}(\tau)$ che definisce la soluzione cercata $u(x, t)$. L'esistenza di una soluzione ha sempre luogo in virtù della teoria generale, se la curva $x = \chi_1(t)$ è data da una funzione derivabile.

Questa equazione diventa più semplice se la frontiera del dominio considerato è fissa: $\chi_1(t) = x_0$. In questo caso l'integrale si annulla e

$$\overline{\mu}(t) = 2a^2 \mu(t),$$

cosicché la soluzione cercata ha la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \frac{x - x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

Abbiamo incontrato due volte questa formula (si vedano i capitoli III, § 3 e VI, § 3, n. 2); ma solo qui abbiamo dimostrato che questa funzione verifica l'equazione e le condizioni aggiuntive.

Il secondo e il terzo problema ai limiti si risolvono analogamente mediante un potenziale. Consideriamo il problema ai limiti per un dominio limitato e assumiamo le condizioni aggiuntive seguenti:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \chi_1(0) < x < \chi_2(0),$$

$$u[\chi_1(t); t] = \mu_1(t), \qquad u[\chi_2(t); t] = \mu_2(t) \qquad (t > 0).$$

Supponendo ridotto a zero il valore iniziale, $\varphi(x) = 0$, rappresentiamo la soluzione sotto la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2}(W_1 + W_2) = \int_{0}^{t} \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \overline{\mu}_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t} \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_2(\tau), \tau)\, \overline{\mu}_2(\tau)\, d\tau.$$

Questa funzione verifica l'equazione e la condizione iniziale nulla qualunque siano le funzioni $\overline{\mu}_1(t)$ e $\overline{\mu}_2(t)$. Essa è discontinua per $x = \chi_1(t)$ e $x = \chi_2(t)$ e i suoi valori limite per $x = \chi_1(t) + 0$ e $x = \chi_2(t) - 0$ devono essere uguali a $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$, il che dà un sistema di equazioni

$$\frac{\overline{\mu}_1(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \overline{\mu}_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \overline{\mu}_2(\tau)\, d\tau = \mu_1(t);$$

$$-\frac{\overline{\mu}_2(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_2(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \overline{\mu}_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_2(t) - \chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \overline{\mu}_2(\tau)\, d\tau = \mu_2(t).$$

Questo sistema è un sistema di equazioni integrali di Volterra e ha sempre soluzione.

Problemi al capitolo VI

1. Una sfera di raggio R_0 è riempita all'istante iniziale di gas la cui concentrazione vale u_0; fuori della sfera la concentrazione di gas è nulla. Trovare la funzione u che caratterizza il processo di diffusione del gas nello spazio infinito. Risolvere lo stesso problema per il semispazio in presenza della frontiera $z = 0$ impenetrabile al gas.

2. Risolvere il problema del riscaldamento di una sfera di raggio R_0 se la temperatura iniziale è nulla e se sulla frontiera si mantiene una temperatura costante.

3. Trovare la temperatura di una palla sulla superficie della quale si ha scambio di calore con il mezzo circostante a temperatura nulla se la temperatura iniziale è costante e vale u_0.

4. Un solido omogeneo è limitato da due sfere concentriche di raggi a e $2a$. La superficie interna del solido è isolata termicamente e sulla sua superficie esterna si produce uno scambio di calore con un mezzo a temperatura nulla. Trovare la distribuzione di temperatura nel solido all'istante t se la sua temperatura iniziale vale u_0.

5. Dedurre l'equazione della diffusione in un mezzo dotato di velocità costante. Scrivere l'espressione della funzione di sorgente nello spazio infinito.

6. Considerare il problema stazionario della diffusione in un mezzo mobile supponendo costante la velocità del moto e trascurando la diffusione lungo la direzione del moto del mezzo (problema dell'attacco di gas). Scrivere la funzione di sorgente per il semispazio supponendo che il piano $z = 0$ sia impenetrabile al gas.

7. Costruire la funzione di sorgente termica per uno strato limitato dai piani $z = 0$ e $z = l$, e anche per un cuneo di angolo d'apertura π/n (n numero intero) sotto condizioni al contorno nulle. Analizzare la soluzione.

8. Trovare la funzione di influenza della sorgente istantanea di calore di intensità Q distribuita uniformemente sulla superficie sferica di raggio a.

9. Risolvere il problema del riscaldamento di un cilindro infinito la cui temperatura iniziale è nulla e sulla cui superficie si mantiene una temperatura costante. Usando le tabelle delle funzioni di Bessel, definire il

« profilo » della temperatura (considerando sul raggio dieci punti) e la temperatura media nella sezione per grandi intervalli di tempo. Costruire i grafici corrispondenti.

10. Considerare il problema della magnetizzazione di un cilindro infinito da parte di un campo magnetico costante parallelo all'asse del cilindro. Usando le tabelle delle funzioni di Bessel, calcolare il flusso di induzione attraverso la sezione cilindrica trasversale.

11. Costruire la funzione di sorgente istantanea puntuale di calore per un dominio cilindrico infinito di sezione arbitraria sotto condizioni al contorno di prima specie. Considerare il caso particolare della sezione trasversale circolare.

Suggerimento. Rappresentare la soluzione sotto la forma

$$u(M,\ z,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z,\ t)\,\psi_n(M),$$

dove $\psi_n(M)$ è un'autofunzione della sezione trasversale del cilindro.

APPENDICI AL CAPITOLO VI

I. *Diffusione di una nube*

Consideriamo il processo di diffusione di una nube di gas formata dall'esplosione di un proiettile.

All'esplodere del proiettile si emana una quantità di fumo Q che si propaga da tutte le parti formando una nube. La nube cresce dapprima per schiarirsi in seguito ai bordi; la sua parte scura non trasparente diminuisce, tutta la nube diventa più chiara, comincia a « sciogliersi » ed, infine, sparisce. Questo quadro è particolarmente netto durante una giornata limpida sullo sfondo del cielo azzurro.

Il processo di diffusione della nube di fumo si può interpretare come processo di diffusione del fumo prodotto da una sorgente istantanea puntuale di intensità Q nello spazio infinito. Questo processo di diffusione è di carattere non molecolare, bensì turbolento; gli corrisponde un coefficiente effettivo di diffusione turbolento D. Qui trascuriamo la spartizione iniziale del fumo e praticamente inessenziale l'influenza della terra. Sotto queste ipotesi la concentrazione del fumo è data dalla formula

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \qquad (D = a^2),$$

se l'origine delle coordinate coincide con il punto di esplosione del proiettile.

Soffermiamoci sulla questione della visibilità della nube di fumo. Il tempo in cui la nube « si scioglie » completamente dipende dall'assorbimento della luce nell'atmosfera e dalla soglia di sen-

sibilità dell'apparecchio di misura (occhio, pellicola fotografica ecc.).

Come è noto, l'intensità, della luce passante attraverso strati di gas omogenei vale pressappoco

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

dove I_0 è l'intensità della luce iniziale, $\alpha = \alpha_0 u$ il coefficiente di assorbimento proporzionale alla concentrazione del gas assorbente (α_0 = costante), u la concentrazione del gas in uno strato, l lo spessore dello strato.

Se esistono due strati l_1 e l_2 con concentrazione di gas distinta u_1 e u_2, allora

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 u_1 l_1} e^{-\alpha_0 u_2 l_2} = I_0 e^{-\alpha_0 (u_1 l_1 + u_2 l_2)}.$$

Ne risulta con chiarezza che l'intensità della luce passante attraverso una nube con concentrazione di fumo costantemente variabile sarà definita dalla formula

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 \int u\, dl}.$$

La visibilità della nube è data dal rapporto I/I_0 dipendente dalla grandezza $\int u\, dl$.

Sia δ la soglia di sensibilità dello strumento di osservazione; allora per

$$\frac{I_0 - I}{I_0} < \delta \text{ o } \frac{I}{I_0} > 1 - \delta$$

la nube diventa invisibile; per

$$\frac{I_0 - I}{I_0} > 1 - \delta \text{ o } \frac{I}{I_0} < \delta$$

la nube sembra assolutamente non trasparente. Se

$$\delta < \frac{I}{I_0} < 1 - \delta,$$

l'osservatore vede la nube in parte trasparente. Il grado di trasparenza dipende dalla grandezza del rapporto

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha_0 \int u\, dl},$$

cioè dal valore dell'integrale $\int u\, dl$.

Facciamo coincidere l'asse z con la direzione di osservazione e supponiamo che l'osservatore si trovi all'infinito. In questo caso la nube si proietta sul piano (x, y). Per valutare la visibilità delle diverse parti della nube corrispondenti ai punti del

piano (x, y), calcoliamo l'integrale

$$\int u\, dl = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z, t)\, dz =$$

$$= Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\, dz =$$

$$= Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}.$$

Se la quantità di fumo nella direzione di osservazione è piccola, cioè se

$$\int u\, dl < \frac{\delta}{\alpha_0}, \quad \text{allora} \quad \frac{I}{I_0} > 1-\delta,$$

e la parte corrispondente è completamente trasparente. Se la quan-

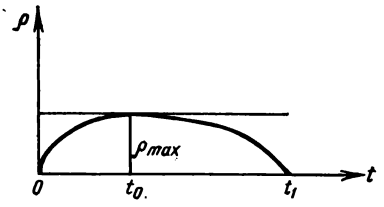


Fig. 81

tità di fumo nella direzione di osservazione è grande, cioè se

$$\int u\, dl > \frac{\Delta}{\alpha_0}, \quad \text{allora} \quad \frac{I}{I_0} < e^{-\Delta} = \delta,$$

vale a dire che con una scelta appropriata di $\Delta = \ln\frac{1}{\delta}$ la parte corrispondente non è assolutamente trasparente. Per

$$\frac{\delta}{\alpha_0} \leqslant \int u\, dl < \frac{\Delta}{\alpha_0}$$

la condizione

$$\alpha_0 \int u\, dl = \delta \text{ ossia } \alpha_0 Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^2 e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} = \delta$$

$(\rho^2 = x^2 + y^2)$

definisce la frontiera della nube oltre la quale la nube è invisibile. Il raggio della nube, evidentemente, vale

$$\rho = 2\sqrt{-Dt \ln\frac{\delta 4\pi Dt}{Q\alpha_0}} \quad \text{(fig. 81)}.$$

Per piccoli valori di t il raggio della nube (ρ) è piccolo e cresce con t; per

$$t = t_0 = \frac{\alpha_0 Q}{4\pi e \delta D}$$

raggiunge il massimo

$$\rho_{max} = 2\sqrt{Dt_0} = \sqrt{\frac{\alpha_0 Q}{\pi e \delta}},$$

per $t > t_0$ il raggio della nube ρ diminuisce e per

$$t_1 = \frac{Q\alpha_0}{\delta 4\pi D}$$

si annulla (la nube scompare).

Osservando il processo di scioglimento della nube, si può trovare il coefficiente di diffusione turbolento D nell'atmosfera libera (mediante, ad esempio, la formula per t_1 o per t_0).

II. *Smagnetizzazione di un cilindro con avvolgimento*

Consideriamo il problema della smagnetizzazione di un cilindro con avvolgimento. Questo problema compare in relazione alla teoria del galvanometro balistico *).

Nell'attaccare o staccare il campo magnetico, nell'avvolgimento si produce una corrente di induzione. Per un'impostazione rigorosa del problema si deve tener conto dell'influenza inversa di questa corrente sul campo all'interno del cilindro. Tuttavia questa azione frenatrice dell'avvolgimento si trascura di solito, e il problema si risolve sotto condizioni al contorno semplificate.

Prima di tutto occupiamoci di questa impostazione semplificata. Consideriamo un cilindro infinito di raggio R sulla cui superficie si trova un avvolgimento. Il cilindro è collocato in un campo magnetico omogeneo H_0, parallelo all'asse del cilindro Oz. All'istante $t = 0$ il campo è staccato.

All'interno del cilindro sarà verificata, evidentemente, l'equazione

$$\Delta H = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t} \quad (H = H_z), \tag{1}$$

dove

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

In virtù della simmetria assiale del campo

$$H_z = H(r, t),$$

*) B. A. Vvedenskij, Žurnal Russkogo fiziko-chimičeskogo obščestva (Rivista della Società fisico-chimica russa) 55, 1 (1923).

l'equazione (1) può essere riscritta sotto la forma

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1'}$$

Se si trascura l'influenza della corrente indotta nell'avvolgimento sul processo di smagnetizzazione del cilindro, la condizione al contorno sulla superficie avrà la forma

$$H(R, t) = 0 \quad (t > 0). \tag{2}$$

Per $t = 0$

$$H(r, 0) = H_0. \tag{2'}$$

La soluzione dell'equazione (1') con la condizione al contorno (2) si ottiene senza difficoltà mediante il metodo di separazione delle variabili (si veda la pag. 473).

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2H_0}{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})} e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2 a^2 t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Qui J_0 e J_1 sono le funzioni di Bessel d'ordine zero e del primo ordine, $\mu_k^{(0)}$ è la k-esima radice dell'equazione

$$J_0(\mu) = 0. \tag{4}$$

Siccome a^2 è assai grande, allora per t sufficientemente grande ci si può limitare nella formula (3) al primo termine (regime regolare)

$$H(r, t) \cong 1{,}60 \cdot H_0 e^{-5{,}77 \frac{a^2}{R^2} t} J_0\left(2{,}4 \frac{r}{R}\right). \tag{5}$$

Ne segue che il flusso di induzione è

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^R \mu H(r, t)\, r\, dr \cong \frac{4}{\mu_1^2} \Phi_0 e^{-\mu_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{6}$$

dove Φ_0 è il flusso iniziale (per $t = 0$) e $\mu_1 = \mu_1^{(0)}$.

La formula (6) serve ai calcoli pratici nelle misure con il galvanometro balistico.

Per determinare il dominio di applicabilità di questa formula, bisogna risolvere il suddetto problema tenendo conto dell'azione frenatrice da parte dell'avvolgimento *).

La forza elettromotrice dell'induzione sul contorno (spira) L, come è noto, vale

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = \oint_L E_l\, dL.$$

*) Questo problema è stato risolto da V. N. Nikitina.

Trasformiamo l'integrale di contorno, applicando a tale scopo il teorema di Stokes, la seconda equazione di Maxwell e l'equazione (1):

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = \int_S\int \text{rot}_z E\, dS = -\frac{\mu}{c}\int_S\int \frac{\partial H}{\partial t}\, dS =$$

$$= -\frac{c}{4\pi\sigma}\int_S\int \Delta H\, dS = -\frac{c}{4\pi\sigma}\oint_L \frac{\partial H}{\partial \nu}\, dl$$

ossia

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\frac{cR}{2\sigma}\frac{dH}{d\nu}(R, t). \tag{7}$$

Qui S è la sezione trasversale del cilindro, L il contorno che delimita S, ν la normale a L.

Le condizioni al contorno sulla superficie cilindrica si scrivono come condizioni di salto del campo

$$H(R-0, t) - H(R+0, t) = \frac{4\pi}{c} nJ,$$

dove J è la corrente di induzione nell'avvolgimento, n il numero di spire per unità di lunghezza del cilindro. Di qui, tenendo conto che $H(R+0, t) = 0$ e che

$$J = \frac{\mathcal{E}^{\text{ind}}}{\rho l},$$

dove ρ è la resistenza lineare dell'avvolgimento, l la lunghezza di una spira, ricaviamo

$$H(R, t) = H(R-0, t) = \frac{4\pi}{c} n \frac{\mathcal{E}^{\text{ind}}}{\rho l}. \tag{8}$$

Confrontando le relazioni (7) e (8), troviamo infine la condizione al contorno

$$H(R, t) + \frac{n}{\rho\sigma} H_r(R, t) = 0.$$

In tal modo dobbiamo risolvere l'equazione

$$H_{rr} + \frac{1}{r} H_r = \frac{1}{a^2} H_t \tag{9}$$

sotto le condizioni aggiuntive

$$H(r, 0) = H_0,$$

$$H(R, t) + \alpha H_r(R, t) = 0 \quad \left(\alpha = \frac{n}{\rho\sigma}\right).$$

Cercheremo la soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili, ponendo

$$H(r, t) = X(r)\, T(t).$$

Per le funzioni $X(r)$ e $T(t)$ otteniamo le condizioni

$$X'' + \frac{1}{r} X' + \lambda^2 X = 0; \tag{10}$$

$$X(R) + \alpha X'(R) = 0 \quad (X(0) < \infty),$$

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0. \tag{11}$$

dove λ^2 è il parametro di separazione.

Dalla seconda condizione ricaviamo immediatamente $T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$.

L'equazione (10) ha come soluzioni particolari le funzioni $J_0(\lambda r)$ e $N_0(\lambda r)$ (si veda Complemento II, parte I). Pertanto $X(r) = AJ_0(\lambda r)$.

La condizione al contorno per $r = R$ dà l'equazione che serve a determinare gli autovalori

$$J_0(\lambda R) + \alpha \frac{dJ_0(\lambda R)}{dR} = 0$$

ossia

$$J_0(y) - \beta y J_1(y) = 0,$$

dove

$$\beta = \alpha/R, \quad y = \lambda R. \tag{12}$$

Le radici di questa equazione si possono trovare sia graficamente, che sviluppando le funzioni di Bessel in serie di potenze di $y = \lambda R$.

Indichiamo con y_k le radici dell'equazione (12) in modo che $\lambda_k = y_k/R$.

La soluzione generale del problema considerato avrà la forma

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(y_k \frac{r}{R}\right) e^{-(y_k/R)^2 a^2 t}. \tag{13}$$

Ricaviamo i coefficienti A_k dalla condizione iniziale

$$A_k = \frac{\int_0^R H_0 J_0\left(r \frac{y_k}{R}\right) r\, dr}{\int_0^R J_0^2\left(r \frac{y_k}{R}\right) r\, dr} = \frac{2H_0 J_1(y_k)}{y_k [J_0^2(y_k) + J_1^2(y_k)]}. \tag{14}$$

I termini della serie (13) decrescono rapidamente poiché $a^2 = c^2/4\pi\mu\sigma$ è grande ($\sim 10^{13}$-10^{14}). Perciò, con un grado di

precisione sufficientemente alto, possiamo limitarci al primo termine

$$H(r, t) \cong \frac{2H_0 J_1(y_1) J_0\left(y_1 \frac{r}{R}\right)}{y_1 [J_0^2(y_1) + J_1^2(y_1)]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{15}$$

ciò che conduce alla seguente espressione per il flusso:

$$\Phi(t) \cong \Phi_0 \frac{4J_1^2(y_1)}{y_1^2 [J_0^2(y_1) + J_1^2(y_1)]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{16}$$

dove

$\Phi_0 = NH_0 \pi R^2$ (N è il numero totale di spire dell'avvolgimento).

I calcoli conducono alle seguenti formule del flusso per diversi valori del parametro β:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0{,}804\, \Phi_0 e^{-4{,}75\theta} & \text{per} \quad \beta = 0{,}1, \\ 0{,}872\, \Phi_0 e^{-3{,}96\theta} & \text{per} \quad \beta = 0{,}2, \\ 0{,}912\, \Phi_0 e^{-3{,}35\theta} & \text{per} \quad \beta = 0{,}3, \end{cases} \qquad \theta = \frac{a^2}{R^2} t,$$

che consentono di seguire come l'azione frenatrice della corrente incida sulla diminuzione del campo nel cilindro. All'aumentare di β, cioè all'aumentare della corrente nell'avvolgimento, la velocità di decrescenza del flusso diminuisce. Per $\beta = 0$ arriviamo, naturalmente, all'espressione (6) per il flusso, che rappresenta quindi l'approssimazione nulla.

Nella teoria del galvanometro balistico è importante conoscere il tempo τ di descrescenza del flusso da Φ_0 a valori definiti dalla sensibilità del galvanometro, ciò che caratterizza il carattere inerziale dell'apparecchio. Sia γ la sensibilità relativa del galvanometro, vale a dire l'apparecchio possa registrare unicamente i valori $\Phi \geqslant \gamma\Phi_0$. La grandezza τ si può trovare, evidentemente, se nella formula

$$\Phi(t) = a\Phi_0 e^{-bt}$$

si pone

$\Phi = \gamma\Phi_0$ all'istante $t = \tau$.

Dal confronto fra la soluzione completa (16) e quella approssimata (6) si vede che il coefficiente nella formula (6) è esagerato. Ciò significa che è esagerata la sensibilità dell'apparecchio per un medesimo valore di τ.

Diamo la tabella contenente i diversi valori di τ, compresi quelli per $\beta = 0$ e per $\gamma = 10^{-3}$:

	R	a^2/R^2	τ ($\beta = 0$)	τ ($\beta = 0.1$)	τ ($\beta = 0.2$)	τ ($\beta = 0.3$)
Ferro $\mu = 500$ $\sigma = 10^5$ om^{-1} cm^{-1}	1 cm	1,59	0,71	0,888	1,15	1,28
Lega di alluminio, silicio e ferro $\mu = 2000$ $\sigma = 1,3 \cdot 10^4$ om^{-1} cm^{-1}	1 cm	5,12	0,217	0,272	0,330	0,405

Capitolo VII

EQUAZIONI DI TIPO ELLITTICO

(seguito)

§ 1. Problemi fondamentali che conducono all'equazione $\Delta v + cv = 0$

1. Vibrazioni stabili. Una cerchia assai larga di questioni, connesse alle *vibrazioni stabili* (meccaniche, acustiche, elettromagnetiche ecc.), conduce alla cosiddetta *equazione d'onda*

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (k^2 = c > 0). \tag{1}$$

A titolo di esempio consideriamo una membrana S fissata al contorno C e vibrante sotto l'azione di forze periodiche nel tempo. L'equazione corrispondente ha la forma

$$\Delta_2 \bar{u} = \frac{1}{a^2}\, \bar{u}_{tt} - F_0(x, y) \cos \omega t. \tag{2}$$

Nello studio dei processi periodici è comodo ricorrere a funzioni complesse sostituendo la (2) con l'equazione

$$\Delta_2 u = \frac{1}{a^2}\, u_{tt} - F_0(x, y)\, e^{i\omega t}. \tag{3}$$

La funzione $\bar{u}$ è, evidentemente, la parte reale della funzione u che figura nell'equazione (3).

Cercheremo le vibrazioni stabili, aventi la forma

$$u = ve^{i\omega t}. \tag{4}$$

Per l'ampiezza delle vibrazioni stabili v otteniamo la seguente equazione:

$$\Delta_2 v + k^2 v = -F_0(x, y) \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right), \tag{5}$$

alla quale si deve associare la condizione al contorno

$$v \mid_C = 0. \tag{6}$$

Se il contorno C della membrana non è fissato e compie vibrazioni periodiche con la stessa frequenza ω

$$u \mid_C = f_0 e^{i\omega t}, \tag{6'}$$

allora la funzione v sul contorno C ha una condizione al contorno non omogenea

$$v \mid_C = f_0. \tag{6''}$$

Come è stato detto sopra, i problemi delle vibrazioni stabili sono caratteristici sia dell'acustica che della teoria del campo elettromagnetico. Inoltre, spesso si incontrano problemi di vibrazioni stabili in un mezzo non omogeneo, in particolare, in un mezzo omogeneo a tratti (quando, per esempio, nello spazio esistono dei domini che violano l'omogeneità). A questa cerchia di questioni si riferiscono i problemi della teoria della diffrazione sui quali ci soffermeremo più avanti.

2. Diffusione di un gas per decadimento o per reazione a catena. Nel processo di diffusione di alcuni gas (emanazione di radio, ad esempio) si produce una reazione di decadimento delle molecole del gas che si diffonde. La velocità di reazione di decadimento si suole considerare proporzionale alla concentrazione di gas. Nella scrittura dell'equazione della diffusione ciò equivale all'esistenza di sorgenti negative del gas. In caso di diffusione stazionaria abbiamo l'equazione

$$D\Delta v + cv = 0 \quad (c < 0), \tag{7}$$

dove D è il coefficiente di diffusione. Come è stato detto nel capitolo VI, § 2, n. 3, un grande interesse presenta il caso $c > 0$ corrispondente alla diffusione per reazione a catena che implica la moltiplicazione delle particelle che si diffondono. Nel caso stazionario otteniamo l'equazione

$$\Delta v + cv = 0 \quad (c > 0)$$

poiché la reazione a catena è equivalente all'esistenza di sorgenti della sostanza diffondente proporzionali alla concentrazione $v(x, y, z)$.

3. Diffusione in un mezzo in moto. Nel capitolo IV è stato esaminato il problema della diffusione del gas in un mezzo fisso. Consideriamo il problema della diffusione del gas in un dato flusso stazionario la cui velocità nel punto $M(x, y, z)$ ha come componenti $\vartheta_1(x, y, z)$, $\vartheta_2(x, y, z)$, $\vartheta_3(x, y, z)$. La quantità di gas passante per l'elemento d'area $d\sigma$ nel punto $M(x, y, z)$ vale

$$dQ = -D\boldsymbol{n}\ \mathrm{grad}\ u\, d\sigma + u\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

dove $u(x, y, z)$ è la concentrazione di gas nell'unità di volume, $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario normale all'elemento d'area $d\sigma$, D il coefficiente di diffusione nel punto (x, y, z) e $\boldsymbol{\vartheta}(x, y, z)$ il vettore velocità del flusso.

Costruendo l'equazione di conservazione della materia per un volume T di frontiera Σ, abbiamo

$$\int_{\Sigma} [-D\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u + u\vartheta \boldsymbol{n}]\, d\sigma = 0.$$

Trasformiamo l'integrale di superficie in integrale di volume mediante la formula di Ostrogradskij

$$\int_{T} [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta)]\, d\tau = 0.$$

Di qui, essendo arbitrario il volume T, deriva l'equazione di diffusione nel flusso dato

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta) = 0 \tag{8}$$

o, in forma scalare,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D \frac{\partial u}{\partial z}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta_1) - \frac{\partial}{\partial y}(u\vartheta_2) - \frac{\partial}{\partial z}(u\vartheta_3) = 0. \tag{8'}$$

Alla stessa equazione conduce il problema della propagazione di calore in un mezzo in moto.

Consideriamo un altro esempio. Supponiamo che nel semispazio $z \geqslant 0$ esista un flusso d'aria di velocità costante u_0, diretto lungo l'asse x. Supponendo costante il coefficiente di diffusione, dalla (8) ricaviamo l'equazione

$$D\Delta u - u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

che rappresenta una variante elementare dell'*equazione dell'attacco di gas.*

Ponendo

$$u = ve^{\mu x}$$

e considerando quindi

$$\mu = u_0/2D,$$

otteniamo per la funzione $v(x, y, z)$ l'equazione

$$\Delta v + cv = 0, \quad \text{dove} \quad c = -\frac{u_0^2}{4D} < 0.$$

4. Impostazione dei problemi ai limiti interni per l'equazione $\Delta v + cv = 0$. Come è stato mostrato nel capitolo I in relazione allo studio delle forme canoniche delle equazioni a coefficienti costanti, ogni equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti si può ridurre alla forma

$$\Delta v + cv = 0 \tag{9}$$

Le proprietà della soluzione dell'equazione (9) dipendono sostanzialmente dal segno del coefficiente c, come è evidente fisicamente se si tiene conto dell'interpretazione di questa equazione come diffusione.

Soffermiamoci sulla questione dell'unicità della soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione (9). Per l'equazione $\Delta v + cv = 0$ per $c < 0$ sussiste il principio del valore massimo nella seguente forma:

la soluzione $v\,(M)$ *dell'equazione* $\Delta v + cv = 0$ $(c < 0)$, *definita all'interno di un dominio* T *delimitato da* Σ, *non può avere valori massimi positivi (o minimi negativi) nei punti interni del dominio* T.

Supponiamo infatti che in un punto M_0 giacente all'interno di T la funzione $v\,(M)$ abbia un massimo positivo $[v\,(M_0) > 0]$. Allora nel punto M_0

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0$$

e, di conseguenza, $\Delta v \leqslant 0$, ciò che è in contraddizione con la negatività del coefficiente c e la positività di $v\,(M_0)$ *).

Dal principio del valore massimo deriva automaticamente l'unicità della soluzione del primo problema ai limiti per l'equazione (9).

Può esistere una sola soluzione dell'equazione $\Delta v + cv = 0$ $(c \leqslant 0)$, *definita e continua nel dominio chiuso* $T + \Sigma$, *che assume sulla frontiera* Σ *i valori dati*

$$v \mid_{\Sigma} = f.$$

Supponendo infatti l'esistenza di due soluzioni distinte v_1 e v_2, considerandone la differenza $v_1 - v_2$ e ragionando nel modo sopra indicato (si vedano i capitoli III e IV), giungiamo a una contraddizione con il principio del valore massimo.

Se $c = 0$ abbiamo il primo problema ai limiti per l'equazione di Laplace, l'unicità della soluzione del quale è stata dimostrata.

Se $c > 0$ l'unicità può venir meno. Considerando nel capitolo V il problema degli autovalori per il problema ai limiti

$$\Delta v + \lambda v = 0, \qquad v \mid_{\Sigma} = 0,$$

abbiamo provato su alcuni esempi l'esistenza di soluzioni non banali (delle autofunzioni) per $\lambda > 0$. È evidente che la questione dell'unicità o meno della soluzione del primo problema ai limiti è equivalente alla questione della coincidenza o meno di c con uno degli autovalori λ_n del dominio considerato T.

---

*) Si confronti con la dimostrazione del principio del valore massimo per l'equazione della conduzione termica.

§ 2. Funzione di influenza delle sorgenti puntuali

1. Funzione di influenza delle sorgenti puntuali. La teoria dei potenziali, sviluppata nel capitolo IV per l'equazione di Laplace, può essere estesa anche all'equazione $\Delta v + cv = 0$. Per la costruzione della funzione di influenza di una sorgente puntuale, consideriamo la soluzione v_0 dipendente unicamente da r. L'operatore di Laplace per la funzione $v_0(r)$ in coordinate sferiche ha la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_0}{dr}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2(rv_0)}{dr^2},$$

ciò che conduce all'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d^2w}{dr^2}+cw=0 \quad (w=v_0r).$$

Introducendo la notazione $c=k^2$ per $c>0$ e $c=-\varkappa^2$ per $c<0$, otteniamo

$$\frac{d^2w}{dr^2}+k^2w=0 \quad (c>0), \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\varkappa^2w=0 \quad (c<0). \tag{1'}$$

Dall'equazione (1) ricaviamo

$$w = C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr} \tag{2}$$

e, rispettivamente,

$$v_0=C_1\frac{e^{ikr}}{r}+C_2\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{3}$$

Nel caso di k reale otteniamo due soluzioni linearmente indipendenti e^{ikr}/r ed e^{-ikr}/r cui corrispondono le soluzioni linearmente indipendenti reali seguenti:

$$\frac{\cos kr}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} kr}{r}.$$

Per $c<0$ ($c=-\varkappa^2$) l'equazione (1') consente di ricavare due soluzioni linearmente indipendenti reali

$$\frac{e^{-\varkappa r}}{r} \text{ e } \frac{e^{\varkappa r}}{r} \quad (\varkappa>0). \tag{4}$$

Le funzioni

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (c>0) \text{ e } \frac{e^{\pm\varkappa r}}{r} \quad (c<0)$$

per $r=0$ hanno una discontinuità e diventano infinite come $1/r$. Ha una singolarità dello stesso carattere la funzione di sorgente per l'equazione di Laplace ($c=0$), proporzionale a $1/r$.

Consideriamo l'andamento di queste funzioni all'infinito. Il caso $c < 0$ corrisponde a un processo accompagnato da assorbimento (si veda l'equazione di diffusione (7) al § 1). Una delle soluzioni $e^{-\varkappa r}/r$ tende esponenzialmente a zero all'infinito, il che, nei termini del problema della diffusione, significa diminuzione di concentrazione dovuta ad assorbimento. Questa diminuzione è tanto più forte quanto più grande è il coefficiente $| c | = \varkappa^2$ che caratterizza l'intensità di assorbimento. La seconda soluzione cresce esponenzialmente all'infinito e non ha significato fisico per il problema in un dominio illimitato (la si potrebbe interpretare come esistenza di una sorgente all'infinito).

Il caso $c = k^2 > 0$ corrisponde ai processi d'onda stabili (si veda il § 1, n. 1). La funzione v rappresenta l'ampiezza della funzione

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t},$$

che verifica l'equazione delle vibrazioni (§ 1).

Una delle soluzioni principali dell'equazione (1)

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

corrisponde al processo delle vibrazioni

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r},$$

avente carattere di un'onda sferica *divergente* dalla sorgente nel punto $r = 0$. La seconda soluzione

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

corrisponde al processo delle vibrazioni

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r},$$

avente carattere di un'onda sferica che arriva dall'infinito al punto $r = 0$ (onde *convergenti*). È evidente che questa soluzione non ha significato fisico diretto per lo studio dei processi indotti da una sorgente puntuale nello spazio illimitato.

È da notare che la funzione $v(M)$ si può considerare come ampiezza di vibrazioni del tipo $e^{i\omega t}$ o $e^{-i\omega t}$. Abbiamo considerato il fattore temporale del primo tipo. Nel secondo caso l'onda divergente ha la forma

$$u_0(r, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r},$$

vale a dire le corrisponde la seconda soluzione

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

La prima soluzione, invece,

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

non ha in questo caso significato fisico.

2. Rappresentazione integrale della soluzione. Per l'equazione (9) del § 1 si possono scrivere, per $c \neq 0$, formule analoghe a quelle di Green, le quali sono state dedotte per l'equazione di Laplace. Introducendo la notazione

$$\mathcal{L}(u) = \Delta u + cu, \tag{5}$$

otteniamo immediatamente la formula

$$\int_T (u\mathcal{L}(v) - v\mathcal{L}(u))\, d\tau = \int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma, \tag{6}$$

che rappresenta l'analogo e la conseguenza diretta della seconda formula di Green (si veda il capitolo IV, § 2). Sostituendo al posto di v una delle « funzioni della sorgente puntuale », $e^{-\varkappa R}/R$, ad esempio, e ripetendo parola per parola tutti i ragionamenti del capitolo IV, § 2, otteniamo l'analogo della formula di Green fondamentale

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right) - \frac{e^{-\varkappa R}}{R}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_T f(M)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\, d\tau_M \quad (R = R_{MM_0}), \tag{7}$$

dove $u(M)$ è la soluzione dell'equazione non omogenea $\mathcal{L}(u) = -f(M)$.

Nel caso $c = k^2$ si ha la forma analoga

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \frac{e^{-ikR}}{R}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_T f(M)\frac{e^{-ikR}}{R}\, d\tau_M, \tag{7'}$$

che è stata già dedotta nel capitolo V quale conseguenza della formula di Kirchhoff.

Introduciamo la nozione di funzione di sorgente dell'equazione $\mathcal{L}(u) = 0$ per un dominio dato T delimitato dalla frontiera Σ. Supponiamo che $v(M)$ sia la soluzione, ovunque regolare in T, dell'equazione $\mathcal{L}(v) = 0$. La formula (6) dà

$$0 = -\int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma + \int_T fv\, d\tau. \tag{8}$$

Sommando (8) all'uguaglianza (7), otteniamo

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma}\left[u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R}+v\right)-\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R}+v\right)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]d\tau_M +$$

$$+\int_{T}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R}+v\right)f(M)\,d\tau_M \quad (R=R_{MM_0}). \tag{9}$$

Questa formula è valida per una soluzione arbitraria $v(M)$ dell'equazione $\Delta v - \varkappa^2 v = 0$, regolare nel dominio T. Poiché la funzione v è arbitraria, abbiamo

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma} u(M)\frac{\partial G(M_0, M)}{\partial \nu}\,d\sigma_M + \int_{T} G(M_0, M)\,f(M)\,d\tau_M, \tag{10}$$

dove

$$G(M_0, M) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \tag{11}$$

è una funzione di sorgente che gode delle proprietà seguenti:

1) $G(M, M_0)$ si annulla all'infinito per $M = M_0$ come $1/4\pi R$, come segue dalla formula (11);

2) $G(M, M_0)$ verifica l'equazione $\mathcal{L}(u) = 0$ ovunque in T, tranne che nel punto M_0;

3) $G(P, M_0) = 0$ nei punti P giacenti sulla frontiera Σ.

La questione dell'esistenza di una funzione di sorgente è legata alla questione dell'esistenza di una funzione v soddisfacente all'equazione

$$\mathcal{L}(v) = 0 \text{ in } T$$

e alla condizione al contorno

$$u = -\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} \text{ su } \Sigma.$$

È evidente che la funzione $G(M, M_0)$ è definita univocamente per ogni dominio che ammette unicità di soluzione del primo problema ai limiti. In particolare, per $c = -\varkappa^2 < 0$ questa funzione è definita per ogni dominio. Nei casi più semplici la funzione di sorgente si può trovare in forma esplicita seguendo un metodo analogo al metodo delle immagini elettrostatiche *).

Così, ad esempio, per il semispazio $z > 0$ la funzione di sorgente ha la forma

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} - \frac{e^{-\varkappa R_1}}{4\pi R_1}, \tag{12}$$

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$R_1 = R_{MM_1} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

*) Per una sfera il metodo delle immagini elettrostatiche è inapplicabile per $c \neq 0$.

dove $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ è il simmetrico del punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rispetto al piano $z = 0$.

Non ci soffermiamo qui sulla questione dell'applicabilità delle formule precedenti a un dominio illimitato, il che, fra l'altro, può essere stabilito facilmente nel caso $c < 0$. I problemi per lo spazio illimitato nel caso $c > 0$ sono legati al « principio della radiazione » e verranno studiati nel prossimo paragrafo.

Per la funzione di sorgente $G(M, M_0)$ definita per un dominio arbitrario T sussiste il *principio di reciprocità* espresso dall'uguaglianza

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

La dimostrazione di questa proprietà è la ripetizione letterale della dimostrazione corrispondente nel caso dell'equazione di Laplace (capitolo IV, § 4).

Nel caso di due variabili indipendenti l'equazione per la funzione $v_0(r)$ ha la forma

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_0}{dr}\right) + k^2 v_0 = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{d^2v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} + k^2 v_0 = 0,$$

cioè è l'*equazione di Bessel d'ordine nullo* la cui soluzione generale si può scrivere nel seguente modo (si veda Complemento II):

$$v_0(r) = C_1 H_0^{(1)}(kr) + C_2 H_0^{(2)}(kr),$$

dove $H_0^{(1)}(kr)$ e $H_0^{(2)}(kr)$ sono *funzioni di Hankel d'ordine nullo di prima e seconda specie.*

Le funzioni $H_0^{(1)}(kr)$ e $H_0^{(2)}(kr)$ hanno per $r = 0$ una singolarità logaritmica

$$H_0^{(1)}(\rho) = \frac{-2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho} + \ldots,$$
$$H_0^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho} + \ldots, \qquad (\rho = kr),$$

dove i puntini di sospensione indicano termini che restano finiti per $\rho = 0$. All'infinito (per $\rho \to \infty$) l'andamento delle funzioni di Hankel è determinato dalle formule

$$H_0^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

dove i puntini di sospensione indicano termini infinitesimali di ordine superiore rispetto a $1/\rho$.

Quindi, l'equazione $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ ha due soluzioni fondamentali

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

aventi una singolarità logaritmica e corrispondenti alle funzioni e^{ikr}/r ed e^{-ikr}/r per lo spazio.

La scelta di una funzione fondamentale dipende dal tipo di condizioni di radiazione all'infinito (si veda il § 3, n. 4). Se la dipendenza temporale è della forma $e^{i\omega t}$, allora la funzione $H_0^{(2)}(kr)$ definisce un'onda cilindrica divergente. Per la dipendenza temporale $e^{-i\omega t}$ l'onda divergente è definita dalla funzione $H_0^{(1)}(kr)$.

Se $c = -\varkappa^2 < 0$, allora come soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione

$$\frac{d^2v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} - \varkappa^2 v_0 = 0$$

servono funzioni cilindriche di argomento immaginario

$I_0(\varkappa r)$ e $K_0(\varkappa r)$.

La funzione $I_0(\varkappa r)$ è limitata per $r = 0$ e cresce esponenzialmente per $r \to \infty$; la funzione $K_0(\varkappa r)$ ha nel punto $r = 0$ una singolarità logaritmica

$$K_0(\rho) = \ln\frac{1}{\rho} + \ldots$$

e, quindi, rappresenta la soluzione fondamentale cercata. All'infinito essa decresce secondo la legge

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, e^{-\rho} + \ldots$$

Non ci soffermiamo in dettaglio sulle funzioni di Green e sulla nozione di funzione di sorgente G nel caso di due variabili indipendenti poiché ciò sarebbe una ripetizione dell'esposizione precedente.

3. Potenziali. Nel capitolo IV abbiamo studiato potenziali per l'equazione $\Delta u = 0$. Potenziali dello stesso tipo si possono costruire anche per l'equazione $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Chiameremo *potenziale di volume* (per l'equazione $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$) l'integrale

$$V(M) = \int_T \rho(P)\,\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\,d\tau_P,$$

$$R = R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad d\tau_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad (13)$$

dove $\rho(P)$ è la densità del potenziale.

Formuliamo in breve le proprietà fondamentali del potenziale di volume la cui dimostrazione è condotta per analogia con il capitolo IV.

1. All'esterno del dominio T la funzione $V(M)$ verifica l'equazione

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0.$$

2. All'interno del dominio T l'integrale (13) è convergente e convergono anche gli integrali che si ottengono per derivazione formale di $V(M)$ sotto il segno di integrale

$$\int_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ ecc.}$$

3. La funzione $V(x, y, z)$ è derivabile e le sue derivate prime si possono calcolare derivando sotto il segno di integrale

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ ecc.}$$

La derivabilità della funzione $V(x, y, z)$ si dimostra sotto la sola ipotesi di limitatezza della funzione ρ. Di qui, in particolare, segue la derivabilità di V nei punti della superficie Σ che delimita il dominio T dove, come regola, la densità $\rho(M)$ è discontinua.

4. Nei punti interni del dominio T nei cui intorni la densità ρ è derivabile, le derivate seconde del potenziale di volume V esistono e il potenziale V verifica l'equazione

$$\Delta V - \varkappa^2 V = -4\pi\rho(M).$$

5. Le derivate prime del potenziale di volume sono rappresentate da integrali uniformemente convergenti sotto l'ipotesi di limitatezza uniforme di ρ. Pertanto le derivate prime sono funzioni continue in tutto lo spazio, compresi i punti della superficie Σ.

I potenziali di volume consentono di rappresentare la soluzione del problema ai limiti per l'equazione non omogenea $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ sotto forma di somma

$$u(M) = V(M) + u_1(M),$$

dove $V(M)$ è il potenziale di volume di densità $\rho = f/4\pi$, $u_1(M)$ è la soluzione del problema ai limiti per l'equazione omogenea $\Delta u_1 - \varkappa^2 u_1 = 0$.

Passiamo ora alle proprietà dei potenziali a strato semplice e doppio. Si chiama *potenziale a strato doppio* l'integrale

$$W(M) = \int_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\sigma_P \quad (R = R_{MP}), \tag{14}$$

dove $\mu(P)$ è la densità superficiale del potenziale W.

Elenchiamo le proprietà fondamentali del potenziale a strato doppio rimandando per la loro dimostrazione al capitolo IV, § 5.

1. All'esterno della superficie Σ il potenziale a strato doppio verifica ovunque l'equazione omogenea $\Delta W - \varkappa^2 W = 0$.

2. Il potenziale a strato doppio converge nei punti al contorno se Σ appartiene alla classe delle superfici di Ljapunov.

3. La funzione W è discontinua nei punti della superficie Σ è hanno luogo le relazioni

$$W_{\text{int}}(M_0) = W(M_0) + 2\pi\mu(M_0),$$
$$W_{\text{est}}(M_0) = W(M_0) - 2\pi\mu(M_0).$$

Qui $W_{\text{int}}(M_0)$ è il valore limite della funzione $W(M)$ quando M tende a M_0 dall'interno del dominio T, e $W_{\text{est}}(M_0)$ il valore limite di $W(M)$ quando M tende a M_0 dall'esterno di T. Il *potenziale a strato semplice*, definito dall'integrale di superficie

$$V(M) = \int_{\Sigma} \rho(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{R} d\sigma_P \quad (R = R_{MP}), \tag{15}$$

gode delle proprietà seguenti.

1. All'esterno della superficie Σ il potenziale a strato semplice verifica ovunque l'equazione omogenea $\Delta V - \varkappa^2 V = 0$.

2. L'integrale converge uniformemente su Σ e definisce la funzione $V(M)$ continua in tutto lo spazio.

3. Le derivate normali del potenziale a strato semplice per le superfici della classe di Ljapunov verificano le relazioni (cfr. la formula (48), § 5, capitolo IV)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{int}} = U_0 + 2\pi\rho(M_0),$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{est}} = U_0 - 2\pi\rho(M_0),$$

dove

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{int}} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{est}}$$

sono i valori limite della derivata normale dall'interno e, rispettivamente, dall'esterno di Σ nel punto M_0 sulla superficie Σ (ν è la normale esterna)

$$U_0(M_0) = \int_{\Sigma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\sigma_P \quad (R = R_{M_0 P}).$$

I potenziali di superficie consentono di ridurre i problemi ai limiti ad equazioni integrali per una classe di superfici assai larga (per la classe di superfici di Ljapunov, ad esempio).

Consideriamo il primo problema ai limiti interno per l'equazione $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ sotto la condizione al contorno $u|_{\Sigma} = f$. Supponiamo che la funzione cercata si possa rappresentare sotto

la forma di potenziale a strato doppio

$$u(M) = W(M) = \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P, \tag{14}$$

il quale, come è stato detto sopra, verifica all'interno di T l'equazione omogenea $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$. Chiedendo che sia soddisfatta la condizione al contorno $u \mid_{\Sigma} = f$, otteniamo l'equazione integrale seguente:

$$2\pi\mu(M) + \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P = f(M),$$

la quale consente di definire la funzione μ e rappresenta un'equazione integrale lineare di Fredholm di seconda specie. Non ci soffermiamo qui sulle questioni dell'esistenza e dell'unicità della soluzione di questa equazione.

All'equazione $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$, così come all'equazione di Laplace, è applicabile il metodo delle differenze finite.

§ 3. Problemi per i domini illimitati. Principio di radiazione

1. Equazione $\Delta v + cv = -f$ nello spazio illimitato. Consideriamo l'equazione non omogenea

$$\Delta v + cv = -f \tag{1}$$

e risolviamola nello spazio illimitato. Per rendere più semplice l'esposizione, supporremo che f sia non nulla all'interno di un dominio limitato (funzione locale). Il carattere della soluzione di questa equazione dipende notevolmente dal segno del coefficiente c.

Soffermiamoci dapprima sul caso $c = -\varkappa^2 < 0$. La soluzione dell'equazione $\Delta v - \varkappa^2 v = -f$ si può rappresentare sotto forma di potenziali di volume

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \text{ e } v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}).$$

Quindi, la soluzione dell'equazione (1) senza condizioni aggiuntive all'infinito è definita in modo non univoco. Per analogia con il problema esterno per l'equazione di Laplace cercheremo una soluzione dell'equazione (1) che si annulla all'infinito. A questa condizione soddisfa la funzione $v_1(M)$ e non soddisfa la funzione $v_2(M)$.

Dimostriamo il teorema di unicità seguente:
l'equazione

$$\Delta v - \varkappa^2 v = -f$$

non può avere più di una soluzione che si annulla all'infinito *).

Supponiamo che esistano due soluzioni distinte del problema posto, $\overline{v}(M)$ e $\overline{\overline{v}}(M)$, e consideriamo la differenza $w = \overline{v} - \overline{\overline{v}}$. Per ipotesi, esiste un punto M_0 tale che $w(M_0) = A \neq 0$. Per fissare le idee, supporremo $A > 0$. Siccome $w(M) \to 0$ all'infinito si può trovare un R_0 tale che per $r > R_0$ sia $w < A/2$. Ne segue che il punto M_0 giace all'interno di T_{R_0}, sfera di raggio R_0, e che la funzione $w(M)$ ha un massimo all'interno della sfera T_{R_0}. Vuol dire che la nostra conclusione contraddice il principio del valore massimo che sussiste per l'equazione considerata (si veda il § 1, n. 4). Il teorema di unicità è quindi dimostrato.

Consideriamo ora il caso $c = k^2 > 0$.

Le funzioni

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \text{ e } v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP})$$

sono sempre soluzioni dell'equazione (1). Ma in questo caso ambedue le funzioni decrescono all'infinito. Ne deriva la necessità di introdurre condizioni aggiuntive all'infinito, atte a definire univocamente la soluzione dell'equazione (1). Queste condizioni verranno esaminate nei nn. 2, 3 e 4 del presente paragrafo.

2. Principio di assorbimento limite. Il problema delle vibrazioni forzate accompagnate da smorzamento conduce all'equazione

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} + \beta u_t - F(M, t) \quad (\beta > 0). \tag{2}$$

Supporremo che $F(M, t)$ sia una funzione periodica nel tempo, cioè $F(M, t) = f(M) e^{i\omega t}$. In questo caso l'equazione (2) ha una soluzione periodica della forma

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t}. \tag{3}$$

La funzione $v(M)$ verifica, evidentemente, l'equazione

$$\Delta v + q^2 v = -f(M), \tag{4}$$

dove $q^2 = k^2 - i\beta\omega$ è una grandezza complessa e $k = \omega/a$.

Chiameremo l'equazione (4), per valori complessi del coefficiente q^2, *equazione ad assorbimento complesso del primo* (Im $q^2 < 0$) *o del secondo tipo* (Im $q^2 > 0$) a seconda del segno della

*) Con la locuzione « funzione che si annulla all'infinito » intendiamo quanto segue: qualunque sia ε si troverà $r(\varepsilon)$ tale che per ogni punto $M(r, \vartheta, \psi)$, per il quale $r > r(\varepsilon)$, $|u(M)| < \varepsilon$, cioè supponiamo che essa tenda uniformemente a zero per $r \to \infty$.

parte immaginaria di q^2, che corrisponde a una dipendenza temporale $e^{i\omega t}$ (di primo tipo) o $e^{-i\omega t}$ (di secondo tipo).

Le soluzioni fondamentali di questa equazione, dipendenti unicamente da r, hanno la forma

$$\bar{v}_0(r) = \frac{e^{-iqr}}{r} \text{ e } \bar{\bar{v}}_0(r) = \frac{e^{iqr}}{r},$$

dove

$$q = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - i\beta\omega} = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2} + k^2}{2}} - \right.$$

$$\left. - i \sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2} - k^2}{2}} \right\} = q_0 - iq_1. \tag{5}$$

Scegliamo i segni delle radici in modo tale che $q_1 > 0$. Di conseguenza,

$$\bar{v}_0(r) = \frac{e^{-iq_0 r}}{r} e^{-q_1 r}, \quad \bar{\bar{v}}_0(r) = \frac{e^{iq_0 r}}{r} e^{q_1 r}.$$

Alla condizione di limitatezza all'infinito soddisfa la sola funzione $\bar{v}_0(r)$; la funzione $\bar{\bar{v}}_0(r)$ cresce indefinitamente per $r \to \infty$ e perciò non ha significato fisico diretto.

Il potenziale di volume

$$\bar{v}(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-iq_0 R}}{4\pi R} e^{-q_1 R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}) \tag{6}$$

rappresenta l'unica soluzione dell'equazione (4), che si annulla all'infinito. Il limite di $\bar{v}(M)$ per $\beta \to 0$ vale

$$v(M) = \lim_{\beta \to 0} \bar{v}(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}),$$

poiché per $\beta \to 0$ abbiamo $q_0 \to k$ e $q_1 \to 0$. Per la dipendenza temporale $e^{i\omega t}$ la grandezza q_0 è positiva poiché il segno di q_0 è legato al segno di q_1 dalla relazione $2q_0 q_1 = \beta\omega$.

Se la dipendenza temporale è rappresentata sotto la forma $e^{-i\omega t}$ (Im $q^2 > 0$), allora al valore positivo q_1 corrisponderà $q_0 < 0$ e il limite di q_0 varrà $-k$ per $\beta \to 0$.

Quindi, la condizione aggiuntiva che consente di trovare la soluzione dell'equazione d'onda

$$\Delta v + k^2 v = -f,$$

corrispondente ad onde divergenti, consiste nel chiedere che la funzione $v(M)$ sia limite di una soluzione limitata dell'equazione

d'onda ad assorbimento complesso di prima specie quando il coefficiente di assorbimento tende a zero *).

3. Principio di ampiezza limite. L'equazione d'onda

$$\Delta v + k^2 v = -f \tag{7}$$

si incontra spesso studiando le vibrazioni stabili indotte da forze periodiche (si veda il § 1, n. 1).

Consideriamo l'equazione delle vibrazioni con secondo membro periodico

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F \quad (F = fe^{i\omega t}). \tag{8}$$

Per rendere definita la sua soluzione, si devono associare all'equazione alcune condizioni iniziali, ad esempio nulle,

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

La funzione $u(M, t)$ allo stadio iniziale del processo non sarà rigorosamente periodica. Tuttavia con il passare del tempo nel sistema si stabiliranno vibrazioni periodiche aventi la frequenza della forza eccitante, vale a dire la soluzione $u(M, t)$ avrà la forma

$$u(M, t) = v(M)\, e^{i\omega t}, \tag{10}$$

dove $v(M)$ rappresenta l'ampiezza limite delle vibrazioni, cioè $v(M) = \lim\limits_{t\to\infty} ue^{-i\omega t}$ e verifica l'equazione

$$\Delta v + k^2 v = -f \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right).$$

Il chiedere che $v(M)$ sia ampiezza limite delle vibrazioni con dati iniziali nulli rappresenta la condizione aggiuntiva da associare all'equazione d'onda affinché si possa ottenere un'unica soluzione.

Siamo giunti così al problema seguente:

trovare la soluzione dell'equazione d'onda $\Delta v + k^2 v = -f$, *che rappresenta l'ampiezza limite per risolvere l'equazione delle vibrazioni*

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f(M)\, e^{i\omega t} \tag{8*}$$

con le condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

*) A. G. Svešnikov, *Principio di radiazione*, Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS 73, 5 (1950).

Rappresentiamo l'ampiezza limite in forma esplicita. A tale scopo troviamo la soluzione dell'equazione delle vibrazioni (8*) con condizioni iniziali nulle applicando la formula

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_{at}^M} \frac{f(P)\, e^{i\omega\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\, d\tau_P \quad (R = R_{MP}),$$

dedotta nel capitolo V (§ 2, (5)). Qui T_{at}^M è una sfera di raggio at e centro nel punto M.

Sia $f(P)$ una funzione locale non nulla soltanto all'interno di un dominio limitato T_0. Allora per l'ampiezza limite $v(M)$ otteniamo la seguente espressione:

$$v(M) = \lim_{t\to\infty} u(M, t)\, e^{-i\omega t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_{at}} \frac{e^{-ikR}}{R} f(P)\, d\tau_P =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_0} f(P) \frac{e^{-ikR}}{R}\, d\tau_P \quad (R = R_{MP}). \tag{11}$$

Quindi, l'ampiezza limite è data dal potenziale di volume definito dalla soluzione principale e^{-ikR}/R corrispondente alle onde divergenti $e^{i(\omega t - kR)}/R$.

Il principio di ampiezza limite conduce matematicamente allo stesso risultato che il principio di assorbimento limite. Ciò è naturale in quanto entrambi questi principi consentono di trovare la soluzione corrispondente alle onde divergenti.

4. Condizioni di radiazione. Nei numeri precedenti abbiamo considerato le basi fisiche generali che consentono di trovare la soluzione dell'equazione d'onda, corrispondente alle onde divergenti. Tuttavia questo procedimento ha richiesto di risolvere problemi ausiliari. Stabiliamo ora una condizione analitica che caratterizza un'onda divergente e si esprime direttamente nei termini della soluzione considerata dell'equazione d'onda.

Le onde piane propagantisi lungo l'asse x hanno la forma:

$\overline{u} = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ — onda diretta (propagantesi nella direzione positiva dell'asse x);

$\overline{\overline{u}} = f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ — onda inversa (propagantesi nella direzione negativa dell'asse x).

L'onda diretta è caratterizzata dalla relazione

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = 0,$$

e l'onda inversa dalla relazione *)

$$\frac{\partial \overline{\overline{u}}}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{\overline{u}}}{\partial t} = 0.$$

A regime abbiamo

$$u = v(x)\, e^{i\omega t},$$

e queste relazioni diventano

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + ik\bar{v} = 0 && \text{per l'onda diretta,} \\ &\frac{\partial \overline{\bar{v}}}{\partial x} - ik\overline{\bar{v}} = 0 && \text{per l'onda inversa.} \end{aligned}\right\} \qquad \left(k = \frac{\omega}{a}\right) \tag{12}$$

Passiamo ora al caso delle onde sferiche. Se un'onda sferica è indotta da una sorgente sita in una parte limitata dello spazio, allora a grandi distanze da questa sorgente l'onda sferica è simile a un'onda piana la cui ampiezza decresce come $1/r$. Di qui è naturale supporre che l'onda sferica divergente debba verificare la relazione **)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right); \tag{13}$$

analogamente per l'onda sferica convergente

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{14}$$

Per l'ampiezza delle vibrazioni stabili queste condizioni assumono la forma

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{per onde sferiche divergenti,} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{per onde sferiche convergenti.} \tag{16}$$

Abbiamo ottenuto le relazioni (15) e (16) supponendo che a grandi distanze ogni onda divergente sia simile a un'onda piana la cui ampiezza decresce come $1/r$. Proviamo la validità di questa affermazione.

1. Nel caso di una sorgente puntuale sita nell'origine delle coordinate questa affermazione è assolutamente evidente poiché l'onda stessa ha la forma

$$u(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} = v_0(r)\, e^{i\omega t},$$

*) Queste relazioni sono equazioni alle derivate parziali del primo ordine le cui soluzioni hanno la forma di onda diretta ed inversa.

**) Nel seguito useremo due notazioni: $O(\xi)$ è una grandezza decrescente come ξ per $\xi \to 0$, $o(\xi)$ è una grandezza infinitesimale di ordine superiore a ξ per $\xi \to 0$.

cosicché

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Un'onda sferica sia eccitata da una sorgente puntuale sita in un punto M_0. L'ampiezza dell'onda sferica vale

$$v_0(M) = \frac{e^{-ikR}}{R},$$

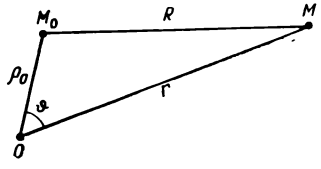


Fig. 82

dove R è la distanza fra i punti M e M_0 uguale a (fig. 82) $R = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos\vartheta}$.

Calcoliamo la derivata

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho_0 \cos\vartheta}{R} \approx 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

In virtù del caso 1

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{R}\right).$$

Proviamo la validità della formula (15):

$$\mathcal{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (15')$$

Infatti,

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R}\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial v_0}{\partial R} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

poiché

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} \cdot O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Di qui e dal caso 1 segue

$$\mathcal{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

come dovevasi dimostrare.

3. Mostriamo che il potenziale di volume

$$v(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}) \tag{16'}$$

verifica la condizione (15). È evidente che

$$\mathcal{L}(v) = \int_T f(P)\, \mathcal{L}\left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right) d\tau_P = \int_T f(P)\, o\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

La formula (11) rappresenta l'ampiezza di un'onda divergente indotta da sorgenti distribuite in modo arbitrario all'interno della parte limitata T dello spazio. Abbiamo visto che la funzione $v(M)$ verifica l'equazione d'onda

$$\Delta v + k^2 v = -f(M)$$

e tende a zero come $1/r$ all'infinito; inoltre, come è stato mostrato, per questa funzione, all'infinito, si verifica la relazione

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

che è una condizione aggiuntiva necessaria.

Mostriamo che

esiste un'unica soluzione dell'equazione d'onda

$$\Delta v + k^2 v = -f(M),$$

dove $f(M)$ è una funzione locale soddisfacente all'infinito alle condizioni

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\}^{*)} \tag{α}$$

Supponendo l'esistenza di due soluzioni distinte v_1 e v_2, troviamo che la loro differenza

$$w = v_1 - v_2$$

verifica l'equazione omogenea e la condizione (α). Sia Σ_R una sfera di raggio R che nel seguito faremo tendere all'infinito. Applicando la funzione fondamentale di Green alle funzioni $w(M)$ e $v_0(M) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$, avremo nel punto M_0 giacente all'interno di Σ

$$w(M_0) = \int_{\Sigma_R} \left(v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r}\right) d\sigma.$$

*) I. N. Vekua mostrò che la prima di queste condizioni è una conseguenza della seconda; si veda I. N. Vekua, Atti dell'Istituto di matematica di Tbilissi **12** (1943) (ed. russa).

La condizione (α) per $v_0(r)$ e $w(M)$ dà

$$v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} = v_0 \left[-ikw + o\left(\frac{1}{r}\right)\right] -$$

$$- w \left[-ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right)\right] = v_0 o\left(\frac{1}{r}\right) - wo\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Perciò

$$w(M_0) = \int_{\Sigma_R} o\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma \to 0 \quad \text{per} \quad R \to \infty,$$

da cui deriva, essendo arbitrario il punto M_0, l'unicità della soluzione del problema in questione.

Le condizioni

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

spesso si chiamano *condizioni di radiazione* o condizioni di Sommerfeld.

È da notare che nel caso di domini illimitati non coincidenti con tutto lo spazio le condizioni all'infinito possono avere una forma diversa dalle condizioni di Sommerfeld.

Quindi, le relazioni (α) rappresentano la forma analitica delle condizioni di radiazione per lo spazio illimitato e non sono basate su un principio fisico che permetterebbe di formulare queste condizioni per domini di configurazione più complicata.

Per primo V. S. Ignatovskij *) usò le condizioni di radiazione ottenute nell'introduzione di un assorbimento complesso indefinitamente piccolo nell'equazione d'onda. Il principio di introduzione di un assorbimento complesso indefinitamente piccolo è applicabile facilmente a domini illimitati di forma diversa e alla soluzione di problemi molto complicati.

Per i problemi nel piano legati all'equazione

$$\Delta_2 v + k^2 v = 0 \qquad (17)$$

le condizioni di radiazione diventano all'infinito

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Le soluzioni più semplici di questa equazione sono le funzioni di Hankel d'ordine zero $H_0^{(1)}(kr)$ e $H_0^{(2)}(kr)$ (si veda Complemento II, parte I, § 3).

*) V. S. Ignatovskij, Ann. d. Phys. **18** (1905).

Si vede dalle formule asintotiche

$$H_\nu^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

e dalle relazioni ricorrenti

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx} = -H_1^{(1)}(x), \quad \frac{dH_0^{(2)}}{dx} = -H_1^{(2)}(x)$$

che la sola funzione $H_0^{(2)}(kr)$ soddisfa la condizione di radiazione.

Quindi, la funzione $H_0^{(2)}(kr)$ verifica l'equazione (17), le condizioni di radiazione (18) ed ha una singolarità logaritmica per $r = 0$. Pertanto, $H_0^{(2)}(kr)$, come è stato notato al § 2, funge da funzione di sorgente puntuale per l'equazione d'onda (7) nel caso di due variabili indipendenti. La soluzione dell'equazione non omogenea

$$\Delta_2 v + k^2 v = -f$$

è data dalla formula

$$v(M) = -\frac{i}{4}\iint_S H_0^{(2)}(kR_{MP})\, f(P)\, d\sigma_P,$$

dove S è il dominio in cui la funzione f differisce da zero.

§ 4. Problemi della teoria matematica della diffrazione

1. Impostazione del problema. La propagazione delle onde (elettromagnetiche, elastiche, acustiche ecc.) è accompagnata da tutta una serie di fenomeni tipici (diffrazione, rifrazione, riflessione ecc.). La soluzione dei problemi legati a questi fenomeni si ottiene direttamente o per analogia con la soluzione dell'equazione d'onda in un mezzo non omogeneo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \rho\omega^2 v = -\overline{f} \quad (p > 0), \tag{1}$$

dove p e ρ sono i parametri del mezzo.

Dal punto di vista delle applicazioni fisiche il maggiore interesse è presentato dal caso di parametri p e ρ costanti a tratti. Il problema matematico corrispondente consiste in quanto segue: nello spazio illimitato esistono alcuni domini limitati T_i, con parametri costanti p_i e ρ_i; la parte dello spazio T_0, esterna rispetto ai domini T_i, è anch'essa omogenea ($p_0 =$ costante, $\rho_0 =$

= costante). L'equazione d'onda all'interno di ciascuno dei domini T_i assume la forma ordinaria

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = -f_i \text{ in } T_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

dove u_i è il valore della funzione cercata u all'interno di T_i,

$$k_i^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{p_i}, \qquad f_i = \frac{\bar{f}}{p_i}$$

nel dominio T_i. Sulle superfici Σ_i, che delimitano i domini T_i *), le equazioni differenziali vanno sostituite dalle condizioni di coniugazione

$$\left.\begin{aligned} &v_i = v_0 && \text{su} \quad \Sigma_i, \\ &p_i \frac{\partial v_i}{\partial n} = p_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} && \text{su} \quad \Sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

All'infinito la funzione v_0, quale soluzione dell'equazione d'onda $\Delta v + k_0^2 v = -f_0$ in T_0, deve verificare le condizioni di radiazione

$$\left.\begin{aligned} &v_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right), \\ &\frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Più avanti sarà mostrato che le condizioni di coniugazione e le condizioni di radiazione sono sufficienti perché la funzione v sia definita univocamente in tutto lo spazio. Il suddetto problema è un problema elementare della *teoria matematica della diffrazione.*

2. Unicità della soluzione del problema della diffrazione. Dimostriamo che il problema della teoria matematica della diffrazione formulato nel n. 1 ha un'unica soluzione. Per rendere più facile la scrittura delle formule, supporremo che l'omogeneità del mezzo venga alterata da un solo corpo T_1, delimitato dalla superficie chiusa Σ_1 all'esterno della quale si trova il dominio T_0. In questo caso non partiamo dall'ipotesi che il dominio T_1 sia connesso.

Dimostriamo il teorema seguente:

può esistere una sola funzione soddisfacente:

a) *alle equazioni*

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_0(v_0) = \Delta v_0 + k_0^2 v_0 = -f_0 \quad \text{in} \quad T_0, \\ &\mathcal{L}_1(v_1) = \Delta v_1 + k_1^2 v_1 = -f_1 \quad \text{in} \quad T_1; \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

b) *alle condizioni di coniugazione sulla superficie* Σ_1

$$\left.\begin{aligned} &v_1 = v_0 \\ &p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial v_0}{\partial \nu}; \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

*) Per semplicità, consideriamo il caso in cui i domini non omogenei T_i hanno frontiera in comune soltanto con il mezzo circostante.

c) *alle condizioni di radiazione all'infinito*

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Supponendo l'esistenza di due soluzioni distinte

$\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_0\}$ e $\bar{\bar{v}} = \{\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_0\}$,

otteniamone la differenza

$w = \{w_1, w_0\}$,

dove

$w_1 = \bar{v}_1 - \bar{\bar{v}}_1, \quad w_0 = \bar{v}_0 - \bar{\bar{v}}_0$

verificano le equazioni omogenee e le condizioni complementari precedenti

$$\mathcal{L}_0(w_0) = 0 \quad \text{in} \quad T_0, \quad \mathcal{L}_1(w_1) = 0 \quad \text{in} \quad T_1, \tag{2*}$$

$$w_1 = w_0, \quad p_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \quad \text{su} \quad \Sigma_1, \tag{3*}$$

$$w_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{per} \quad r \longrightarrow \infty. \tag{4*}$$

Per le funzioni w_0^* e w_1^*, che sono coniugate complesse delle funzioni w_0 e w_1, saranno verificate, evidentemente, le condizioni omogenee (2*), le condizioni (3*) e le condizioni di radiazione

$$w_0^* = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - ikw_0^* = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4**}$$

Sia Σ_R una sfera di raggio sufficientemente grande R, contenente il dominio T_1, e T_R sia un dominio delimitato dalle superfici Σ_1 e Σ_R.

Applicando la formula di Green alle funzioni w_1, w_1^* nel dominio T_1 e alle funzioni w_0, w_0^* nel dominio T_R, otteniamo

$$\int_{T_1} (w_1 \mathcal{L}_1(w_1^*) - w_1^* \mathcal{L}_1(w_1))\, d\tau = \int_{\Sigma_1} \left(w_1 \frac{\partial w_1^*}{\partial \nu_1} - w_1^* \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1}\right) d\sigma = 0,$$

$$\int_{T_R} [w_0 \mathcal{L}_0(w_0^*) - w_0^* \mathcal{L}_0(w_0)]\, d\tau = \int_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial \nu_0} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial \nu_0}\right) d\sigma +$$

$$- \int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial \nu_0} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial \nu_0}\right) d\sigma = 0,$$

dove ν_0 è la normale esterna al dominio T_R, ν_1 la normale esterna al dominio T_1. È evidente che $\frac{\partial}{\partial \nu_0} = -\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ su Σ_1.

Moltiplicando la prima uguaglianza per p_1, la seconda per p_0, sommandole e usando le condizioni di coniugazione (3*), otteniamo

$$\int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) d\sigma = 0.$$

Ricavando dalle condizioni di radiazione le derivate

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial r} = ikw_0^* + o\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\partial w_0}{\partial r} = -ikw_0 + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

otteniamo la seguente uguaglianza:

$$2ik \int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* \, d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left[w_0 o\left(\frac{1}{R}\right) - w_0^* o\left(\frac{1}{R}\right) \right] d\sigma = 0.$$

Il secondo integrale per $R \longrightarrow \infty$ tende a zero, perciò

$$\int_R w_0 w_0^* \, d\sigma = \int_{\Sigma_R} | Rw_0 |^2 \, d\Omega \longrightarrow 0, \qquad R \longrightarrow \infty \qquad (d\Omega = \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi). \tag{5}$$

Nel Complemento II, parte II, § 4 è mostrato che la funzione

$V_m(r, \theta, \varphi) = \zeta_m^{(2)} Y_m(\theta, \varphi)$,

dove

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\rho) \qquad (\rho = k_0 r),$$

e $Y_m(\theta, \varphi)$ è una funzione sferica dell'm-esimo ordine, verifica l'equazione d'onda

$$\mathscr{L}_0(V_m) = \Delta V_m + k_0^2 V_m = 0$$

e la condizione di radiazione

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} + ik_0 V_m = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Applichiamo la formula di Green nel dominio T_R alle funzioni w_0 e V_m

$$0 = \int_{T_R} [w_0 \mathscr{L}(V_m) - V_m \mathscr{L}(w_0)] \, d\tau = \int_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right) d\sigma +$$

$$+ \int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right) d\sigma = I_1 + I_R.$$

Il secondo termine I_R, in virtù delle condizioni di radiazione, tende a zero per $R \to \infty$ (si veda il teorema del § 3, n. 4). Poiché il primo integrale I_1 è indipendente da R, ne segue che $I_1 = 0$ e, di conseguenza, $I_R = 0$ per ogni R, cioè

$$\frac{d\zeta_m^{(2)}(k_0 r)}{dr}\bigg|_{r=R} \cdot \int_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi) \, d\Omega -$$

$$- \zeta_m^{(2)}|_{r=R} \cdot \int_{\Sigma_R} \frac{\partial w_0}{\partial r} Y_m(\theta, \varphi) \, d\Omega = 0.$$

Se introduciamo la notazione

$$\int_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi) \, d\Omega = \alpha_m(k_0 R),$$

si può scrivere

$$\zeta_m^{(2)\prime}(k_0R)\,\alpha_m(k_0R)-\alpha_m'(k_0R)\,\zeta_m^{(2)}(k_0R)=0,$$

da cui ricaviamo

$$\alpha_m(k_0R)=a_m\zeta_m^{(2)}(k_0R),$$

dove a_m è un fattore costante.

La condizione di completezza delle funzioni sferiche

$$\int_{\Sigma_R}|Rw_0|^2\,d\Omega=\sum_{m=0}^{\infty}R^2\alpha_m^2(k_0R) \tag{6}$$

e la formula (5) danno

$$R\alpha_m(k_0R)\to 0 \quad \text{per} \quad R\to\infty.$$

Tuttavia secondo la formula asintotica

$$\zeta_m^{(2)}(\rho)\approx\frac{1}{\rho}\,e^{-i\left(\rho-\frac{m+1}{2}\pi\right)},$$

il prodotto $r\zeta_m^{(2)}(k_0r)$ resta in modulo superiore a un numero positivo per r grande; di conseguenza, $a_m=0$, cioè $\alpha_m(k_0R)\equiv 0$; di qui e in virtù dell'equazione di chiusura (6) deriva $w_0=0$ sulla sfera Σ_{r_0}. In tal modo, se la sfera Σ_{r_0} di raggio r_0 contiene il dominio T_1, allora all'esterno di questa sfera la funzione w è identicamente nulla. Essendo analitica *) la soluzione dell'equazione $\mathcal{L}=0$, concludiamo $w_0\equiv 0$ ovunque nel dominio T_0. Quindi, dalle condizioni di coniugazione segue che sulla superficie Σ_1

$$w_1=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w_1}{\partial\nu}=0. \tag{7}$$

La formula fondamentale di Green applicata alla funzione w_1 nel dominio T_1 mostra che

$$w_1(M)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_1}\left[\frac{e^{-ik_1R}}{R}\,\frac{\partial w_1(P)}{\partial\nu_1}-w_1(P)\,\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{e^{-ik_1R}}{R}\right)\right]d\sigma=0, \tag{8}$$

dove $R=R_{MP}$ in ogni punto M del dominio T_1.

Abbiamo provato così che $w(M)\equiv 0$ in tutto lo spazio, il che dimostra il teorema di unicità.

3. Diffrazione sulla sfera. 1. Le onde piane rappresentano una classe di soluzioni praticamente importante dell'equazione delle vibrazioni

$$\Delta u-\frac{1}{a^2}\,u_{tt}=0.$$

Si chiama onda piana propagantesi in una data direzione una soluzione dipendente dal tempo e da una delle coordinate spaziali, misurata nella direzione della propagazione. Ad esempio, l'onda piana che si propaga lungo l'asse x verifica l'equazione in due variabili indipendenti

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}\,u_{tt}=0$$

---

*) L'analiticità della funzione w nel dominio T_1 segue dalla formula (7) del § 2 per il valore complesso $\varkappa$-ik e per una superficie Σ che si trova interamente all'interno di T_1.

e ha la forma

$$u(x,\ t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

A regime, quando la dipendenza dal tempo è determinata dal fattore $e^{i\omega t}$, l'onda piana ha la forma

$$u(x,\ t) = Ae^{i(\omega t - kx)}, \tag{9}$$

dove $k = \omega/a$ è un numero d'onda, $|A|$ l'ampiezza.

Un'onda piana propagantesi nella direzione l, dove $l(l_x,\ l_y,\ l_z)$ è un vettore unitario, può essere scritta come segue:

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = Ae^{i[\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z)]} = Ae^{i[\omega t - klr]}. \tag{10}$$

Le funzioni

$$v(x) = Ae^{-ikx}, \qquad v(x,\ y,\ z) = Ae^{-iklr}, \tag{11}$$

che sono soluzioni dell'equazione d'onda

$$\Delta v + k^2 v = 0 \tag{12}$$

si chiamano di solito anch'esse *onde piane*.

Nella teoria matematica della diffrazione sono oggetto di studio le perturbazioni del campo in un mezzo omogeneo, dovute agli inserimenti di T_i che alterano l'omogeneità del mezzo. Sia $\bar{v}(M)$ il campo in un mezzo omogeneo, creato da sorgenti date che supponiamo disposte all'esterno del dominio $T_i (i = 1, \ldots, n)$; in particolare, si può trattare di sorgenti indefinitamente lontane che causano la comparsa di onde piane

$$\bar{v}(x,\ y,\ z) = Ae^{-iklr}. \tag{13}$$

Il campo reale v_0 che esiste nel dominio T_0 in presenza di disomogeneità si può rappresentare sotto forma di somma

$$v_0\ (M) = w_0\ (M) + \bar{v}_0\ (M),$$

dove $\bar{v}_0\ (M)$ è l'« onda incidente », $w_0\ (M)$ l'onda di diffrazione o di riflessione rappresentante la perturbazione del campo esterno $\bar{v}$ da parte delle disomogeneità T_i.

Cercheremo nel dominio T_0 il campo di diffrazione $w_0\ (M)$, e all'interno di T_i il « campo di rifrazione » v_i. Stabiliamo le condizioni che definiscono le funzioni cercate w_0 e v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

a) le funzioni w_0 e v_i verificano le equazioni

$$\begin{aligned} &\Delta w_0 + k_0^2 w_0 = 0 \quad \text{in} \quad T_0, \\ &\Delta v_i + k_i^2 v_i = 0 \quad \text{in} \quad T_i\ (i = 1, 2, \ldots, n); \end{aligned} \tag{14}$$

b) sulle frontiere di separazione Σ_i fra i domini T_i e T_0 sono soddisfatte le condizioni di coniugazione

$$v_i = w_0 + \bar{v}_0 \quad \text{su} \quad \Sigma_i, \tag{15}$$

dove $\bar{v}_0$ è una funzione data,

$$p_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} + f_i \quad \text{su} \quad \Sigma_i, \tag{16}$$

dove $f_i = p_0 \dfrac{\partial \bar{v}_0}{\partial \nu}$ funzione data;

c) l'onda riflessa $w_0(M)$ si comporta all'infinito come onda sferica divergente, verifica cioè la condizione di radiazione

$$w_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Consideriamo in dettaglio la diffrazione dell'onda piana su una sfera *). Supponiamo che nella direzione dell'asse z dall'infinito su una palla di raggio R e centro all'origine di coordinate cada l'onda piana

$$\bar{v}_0 = Ae^{-ikz}. \tag{17}$$

Cerchiamo i campi riflesso e rifratto sotto forma di sviluppo in funzioni sferiche; sviluppiamo in funzioni sferiche $\bar{v}_0$ e $f = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{dr}$, che figurano a secondo membro delle condizioni di coniugazione.

Poniamo $z = r\cos\theta$; allora si può eseguire il seguente sviluppo dell'onda piana in funzioni sferiche:

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{18}$$

dove

$$\psi_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{m+1/2}(kr),$$

$J_{m+1/2}(kr)$ è la funzione di Bessel di ordine $(m + 1/2)$ e $P_m(\cos\theta)$ è il polinomio di Legendre dell'm-esimo ordine. Infatti, a primo membro figura la soluzione dell'equazione d'onda dipendente unicamente da z. Ogni soluzione dell'equazione d'onda può essere rappresentata come somma di prodotti di funzioni sferiche per $\psi_m(kr)$. Poiché nel caso considerato il primo membro dell'espressione (18) gode di simmetria zonale, allora

$$e^{-ikr\cos 0} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{19}$$

dove C_m sono coefficienti da determinare. Sfruttando l'ortogonalità dei polinomi di Legendre e della loro norma (si veda Complemento II, parte II), otteniamo

$$C_m\psi_m(\rho) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi \qquad (\rho = kr,\ \xi = \cos\theta). \tag{20}$$

Troviamo il primo termine della rappresentazione asintotica dell'integrale che figura a secondo membro; il suo confronto con il primo termine dello sviluppo asintotico della funzione $\psi_m(\rho)$ ci permette di determinare il coefficiente C_m. Integriamo per parti m volte, integrando ogni volta $e^{-i\rho\xi}$ e derivando $P_m(\xi)$. Come risultato otteniamo lo sviluppo dell'integrale in

*) Metodi analoghi si usano spesso in meccanica quantistica per la risoluzione dei problemi della diffusione di particelle.

potenze di $1/\rho$. Conservando il solo primo termine dello sviluppo, avremo

$$\int_{-1}^{+1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi \cong \frac{1}{-i\rho}\left[e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\right]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} P_m(1) - e^{i\rho} P_m(-1)\right) = \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} - (-1)^m e^{i\rho}\right) =$$

$$= \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} - e^{-im\pi} e^{i\rho}\right) =$$

$$= \frac{e^{-im\frac{\pi}{2}}}{-i\rho}\left[e^{-i\left(\rho - m\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(\rho - m\frac{\pi}{2}\right)}\right] = 2(-i)^m \frac{\operatorname{sen}\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

D'altra parte, come è noto (si veda Complemento II, parte I, § 1),

$$\psi_m(\rho) \cong \frac{\operatorname{sen}\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

Confrontando queste espressioni, ricaviamo dalla (20)

$$C_m = (2m+1)(-i)^m, \tag{21}$$

ciò che dimostra la formula (18).

Dalla (17) segue che

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_0|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos\theta); \\ a_m &= A(2m+1)(-i)^m \psi_m(k_0 R); \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\bigg|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_m(\cos\theta); \\ b_m &= A k_0 p_0 (2m+1)(-i)^m \psi'_m(k_0 R). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

I campi riflesso e rifratto sono soluzioni dell'equazione d'onda e, così come il campo incidente, godono di simmetria zonale. Perciò cerchiamo le funzioni v_1 e w_0 sotto la forma

$$v_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m(k_1 r) P_m(\cos\theta), \tag{24}$$

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \zeta_m(k_0 r) P_m(\cos\theta), \tag{25}$$

$$\zeta_m(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{26}$$

Passiamo ora a determinare i coefficienti dello sviluppo α_m e β_m. Partendo dalla condizione di coniugazione e confrontando i coefficienti di

$P_m(\cos\theta)$, ott iamo dunque l'equazion
$\alpha_m\psi_m(k_1R)$ — e supponiamo che
$= A(2m+1)$ >0, $C_i \geqslant A_i + B_i$ o $C_i =$
$p_1k_1\alpha_m\psi'_m(k_1R)$, $\alpha = 1, 2.$
$= b_m = Ak_0p_0$
da cui condizioni, come verrà
(106) è risolvibile. Per tr $\frac{\zeta_m(k_0R)\,\psi'_m(k_0R)]}{k_1\psi'_m(k_1R)\,\zeta_m(k_0R)}$,
$\alpha_m = A(2m+1$ i usuali metodi dell'alge
tavia il più vantaggiosc (27)
avoro da eseguire, è il
$\beta_m = A(2m-1$ nto della forma speciale
$\times \frac{p_1k_1\psi_m(k_0R}{p_0k_0\psi_m(k_1R}$ 05), cioè che essa ha tre (28)
mo la soluzione del pr .

3. A titol lema della diffusione del
suono da parte $_{+1} + \beta_{i+1}$, $i = 0, 1, 2,$ poniamo che su una sfera
fissa assolutam ll'origine delle coordinate
cada un'onda β_i sono funzioni da dete sse z. La pressione sonora
$p(x, y, z, t)$, cc nella (105) eliminiamo olo II, verifica l'equazione
delle vibrazior $B_iy_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i) =$
$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2\Delta p$, y_i mediante la formula
$) \alpha_{i+1} + B_i]\, y_{i+1} + [(A$
dove a è la vel batica, p_0 e ρ_0 la pressione
e la densità d $F_i)] = 0.$
La pressio dalla formula
(105) sarà verificata se
$p_0 = Ae^{-i(\omega t-}$ nulle. Da queste due u
dove A è costa nti per determinare α_{i+}
Considerai $\frac{}{A_i\alpha_i}$, $\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i - F_i}{C_i - A_i\alpha_i}$,
$p(x, y, z, t) =$
otteniamo per o la formula $y_0 = \alpha_1 y_1$
$\Delta p + k^2 p = 0.$ per $i = 0$, troviamo
Sulla superfici $\beta_1 = \nu_1$. te solida, la componente
normale della zione della velocità lungo
la direzione de do le formule (109) con dalla seguente relazione:
$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}$ sì α_i e β_i, $i = 1, 2, \ldots$
bisogna conoscere y_N.
la quale nel c o y_N in funzione di α_N e
$u_n = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$ ν_2 e $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta$
$\frac{\beta_N}{}$
Di qui ricavia $_N$
$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_R} = 0.$ ndizione $1 - \varkappa_2\alpha_N \neq 0.$
Ponendo $p =$ no G. I. Marčuk, *Metodi num* ne dell'onda diffusa, otte-
niamo le segu 58 (ed. russa); S. K. Godun
li schemi di differenze, Fizm

a) la funzione $w(x, y, z)$ verifica l'equazione d'onda $\Delta w + k^2 w = 0$;

b) sulla superficie della sfera S_R è soddisfatta la condizione al contorno

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_R} = -\left.\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial n}\right|_{S_R};$$

c) l'onda diffusa w si comporta all'infinito come onda sferica divergente, cioè verifica la condizione di radiazione per $r \to \infty$,

$$w(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + ikw = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

È facile vedere che questo problema rappresenta un caso particolare del problema della diffrazione sopra studiato e corrisponde al valore del parametro $p_1 = 0$.

Ponendo nelle formule (25) e (28) $p_1 = 0$, otteniamo

$$\beta_m = -A(2m+1)(-i)^m \frac{\psi'_m(k_0R)}{\zeta'_m(k_0R)} \tag{29}$$

e

$$w = -A\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(-i)^m \frac{\psi'_m(k_0R)}{\zeta'_m(k_0R)}\zeta_m(k_0r)P_m(\cos\theta). \tag{30}$$

Se la lunghezza d'onda è grande rispetto alle dimensioni della sfera, cioè se $k_0R \ll 1$, allora nella formula (29) si possono utilizzare gli sviluppi delle funzioni $\psi_m(kR)$ e $\zeta_m(kR)$ in serie, che derivano dagli sviluppi delle funzioni $J_{m+1/2}(kR)$ e $H^{(2)}_{m+1/2}(kR)$ in potenze di un piccolo argomento kR (si veda Complemento II, parte I, §§ 1 e 3):

$$\psi_0(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{5/2}}{\Gamma(5/2)}\right),$$

$$\psi_1(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{3/2}}{\Gamma(5/2)}, \quad \zeta_0(kR) \cong i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)};$$

$$\zeta_1(kR) \cong -i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}.$$

Poiché

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi},$$

allora otteniamo

$$\psi_0(kR) \cong 1 - \frac{(kR)^2}{6}, \qquad \psi_1(kR) \cong \frac{kR}{3}.$$

$$\zeta_0(kR) \cong \frac{i}{kR}, \qquad \zeta_1(kR) \cong \frac{i}{(kR)^2},$$

da cui segue

$$\psi_0'(kR) \cong -\frac{kR}{3}, \qquad \psi_1'(kR) \cong \frac{1}{3},$$

$$\zeta_0'(kR) \cong -\frac{i}{(kR)^2}, \qquad \zeta_1'(kR) \cong -\frac{2i}{(kR)^3}.$$

Riportando nella formula (29) le espressioni ottenute di ψ_m' e ζ_m', troviamo

$$\beta_0 = i\,\frac{A}{3}(kR)^3, \qquad \beta_1 = -\frac{A}{2}(kR)^3.$$

È facile vedere che i coefficienti successivi sono proporzionali a $(kR)^5$; quindi, per diffusione delle onde lunghe ($kR \ll 1$) la perturbazione w viene rappresentata approssimativamente dai due primi termini della serie (30)

$$\left.\begin{aligned} &w \cong \beta_0\zeta_0(kr) + \beta_1\zeta_1(kr)\cos\theta, \\ &[P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

A grandi distanze dalla sfera perturbatrice ($kR \gg 1$), nella cosiddetta zona « lontana » o « d'onda », per le funzioni $\zeta_0(kr)$ e $\zeta_1(kr)$ valgono le rappresentazioni asintotiche seguenti:

$$\zeta_0(kr) \cong \frac{i}{kr}e^{-ikr}, \qquad \zeta_1(kr) \cong -\frac{1}{kr}e^{-ikr},$$

che derivano dalle rappresentazioni asintotiche delle funzioni di Hankel.

Sostituendo nella formula (31) le espressioni (32) per $\zeta_0(kr)$ e $\zeta_1(kr)$ e scrivendo al posto di β_0 e β_1 i loro valori approssimati, otteniamo

$$w \cong -\frac{Ak^2R^3}{3r}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{-ikr}. \tag{33}$$

Calcoliamo ora l'intensità dell'onda diffusa, questa grandezza viene definita come la media del flusso di energia (del vettore di Umov) uguale a prodotto della pressione sonora superflua w per la velocità u, dove con w e u vanno intese le parti reali delle espressioni rispettive. Nel caso considerato

$$\left.\begin{aligned} &w = w_0\cos(\omega t - kr), \\ &u = u_0\cos(\omega t - kr), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

dove w_0 e u_0 sono le ampiezze corrispondenti.

Calcoliamo l'intensità del suono I nella zona d'onda, conservando i termini principali degli sviluppi asintotici:

$$I = \frac{u_0w_0}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kr)\,dt = \frac{u_0w_0}{2} \qquad \left(T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ è un periodo}\right).$$

Dall'equazione del moto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial r}$$

e dalla formula (34) ricaviamo

$$u_0 = \frac{w_0}{a\rho}.$$

In tal modo,

$$I = \frac{w_0^2}{2a\rho} = \frac{A^2k^4R^6}{18a\rho r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

Indicando con

$2\pi r^2 \Sigma\,(\theta)\,\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

l'intensità diffusa dalla sfera nel cono $d\theta$, avremo

$$\Sigma\,(\theta) = \frac{A^2k^4R^6}{18a\rho}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

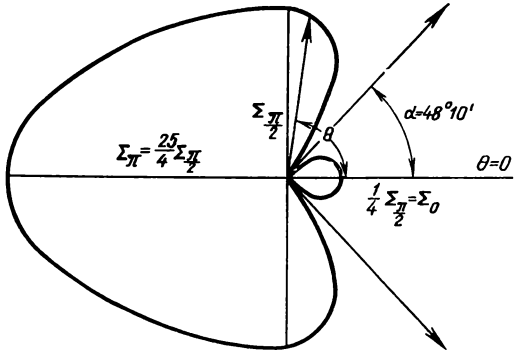


Fig. 83

Il diagramma polare dell'intensità del suono diffusa dalla sfera è riprodotto nella fig. 83 (in scala arbitraria). Se

$$\cos\theta = +\frac{2}{3}, \quad \theta = \alpha = 48°10',$$

la diffusione non esiste nella direzione $\theta = \alpha$.

Problemi al capitolo VII

1. Trovare la funzione di influenza di una sorgente puntuale stazionaria di gas, supponendo che il gas si disintegri nel processo di diffusione. Risolvere il problema della diffusione nello spazio e nel piano.

2. Risolvere il problema 1 nel semipiano $y > 0$ supponendo che per $y = 0$ la concentrazione sia nulla.

3. a) Risolvere i problemi interno ed esterno per l'equazione

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0$$

se sulla sfera $r = r_0$ è data la condizione al contorno $u\,|_{r=r_0} = A\cos\theta$.

Nel caso del problema esterno, formulare le condizioni all'infinito che garantiscono l'unicità della soluzione.

Considerare problemi analoghi supponendo che

$u|_{r=r_0} = F(\theta)$.

b) Risolvere problemi analoghi per un'equazione a due variabili indipendenti nel caso in cui le condizioni al contorno sono assegnate su una circonferenza di raggio r_0 e hanno la forma

$u|_{r=r_0} = A\cos\varphi$

o, rispettivamente,

$u|_{r=r_0} = F(\varphi)$.

4. Risolvere i problemi 3 a) e b) per l'equazione

$\Delta u + k^2 u = 0$.

Per il problema interno stabilire per quali valori di r_0 esiste un'unica soluzione (considerando k dato).

Formulare le condizioni che garantiscono l'unicità della soluzione sia per due che per tre variabili indipendenti.

5. A profondità h sotto la superficie terrestre si trova un mezzo in cui, con densità costante, è distribuita una sostanza radioattiva. Trovare la concentrazione di emanazione supponendone la concentrazione nulla sulla superficie.

6. Trovare le autofrequenze di una membrana avente forma di anello di raggi a e b ($a < b$), supponendo che $v|_{r=a} = 0$ e $v|_{r=b} = 0$. Mostrare che il limite del primo autovalore per $a \to 0$ è uguale al primo autovalore di una membrana circolare di raggio b a contorno fissato.

7. Trovare autovibrazioni e autofrequenze di un endovibratore cilindrico supponendo perfettamente conduttrici le pareti dell'endovibratore. Considerare lo stesso problema nell'interpretazione acustica.

Suggerimento. Nel caso di vibrazioni elettromagnetiche introdurre il potenziale di polarizzazione (si veda Appendice I al capitolo VII).

8. Definire il campo elettromagnetico di un dipolo puntuale nello spazio illimitato, supponendo che le grandezze del campo siano proporzionali ad $e^{i\omega t}$. Esaminare l'andamento asintotico della soluzione a grandi distanze (nella zona d'onda). Risolvere lo stesso problema per un dipolo sito sopra una superficie perfettamente conduttrice (dipolo verticale).

Suggerimento. Introdurre il potenziale di polarizzazione.

9. Impostare il problema della propagazione delle onde elettromagnetiche all'interno di un conduttore d'onde radio cilindrico infinito, di sezione arbitraria, con le pareti perfettamente conduttrici. Considerare un'onda di tipo elettrico propagantesi all'interno del conduttore d'onde radio cilindrico circolare e avente lunghezza più grande. Trovare il campo, calcolare il flusso di energia attraverso la sezione perpendicolare alla base (si veda Appendice I al capitolo VII).

10. Risolvere l'equazione non omogenea

$\Delta u + k^2 u = -f$

in un dominio cilindrico illimitato di sezione circolare sulla superficie del quale sono assegnate condizioni al contorno omogenee di prima o di seconda specie; costruire la funzione di sorgente (si veda Appendice I al capitolo VII).

11. Costruire la funzione di sorgente nel caso del primo problema ai limiti per l'equazione

$\Delta u + k^2 u = 0$:

a) nel semispazio $z > 0$;

b) nel semipiano $y > 0$;
c) all'interno dello strato $-l \leqslant z \leqslant l$.

12. Risolvere il problema della diffrazione di un'onda elettromagnetica piana su un cilindro infinito perfettamente conduttore. Risolvere lo stesso problema nell'interpretazione acustica.

13. Trovare le autovibrazioni elettromagnetiche di un endovibratore sferico con le pareti perfettamente conduttrici. Considerare il caso di vibrazioni del tipo *TE* e *TM* (si veda Appendice II al capitolo VII).

14. Trovare le autovibrazioni elettromagnetiche di un endovibratore rappresentante un dominio compreso fra due superfici coassiali cilindriche e due piani perpendicolari agli assi dei cilindri.

Suggerimento. Per il potenziale di polarizzazione $\Pi_{n,m}$ usare una formula analoga alla (14) dell'Appendice II al capitolo VII.

APPENDICI AL CAPITOLO VII

I. *Onde in tubi cilindrici*

1. Nella costruzione di impianti radio di vario tipo si deve risolvere l'importante problema della trasmissione dell'energia elettromagnetica dal trasmettitore all'antenna trasmittente o, viceversa, dall'antenna al ricevitore. Questioni legate alla trasmissione dell'energia elettromagnetica si incontrano anche in numerosi altri problemi pratici di radiotecnica.

Fino a qualche tempo fa questo problema poteva essere risolto in modo soddisfacente mediante una linea a due fili di metallo fra cui si propagano le onde elettromagnetiche. Ma oltre a difetti propri, in generale, di ogni linea di trasmissione, questa linea a due fili irradia energia elettromagnetica e inoltre questa radiazione cresce all'aumentare della frequenza delle onde radio. Pertanto questo tipo di trasmissione diventa poco comodo nella zona delle onde radio ultracorte.

Negli ultimi anni la tecnica delle onde radio ultracorte (centimetri e decimetri) ha fatto progressi, e ora per la trasmissione di energia si usano trasmettitori assolutamente diversi, ossia tubi metallici vuoti (*conduttori d'onde radio*) all'interno dei quali si propagano le onde radio. Questi trasmettitori, che subiscono poche perdite, sono linee di trasmissione molto comode *).

La teoria matematica della propagazione delle onde radio attraverso tubi è stata fondata da Rayleigh nello studio della propagazione delle onde acustiche nei tubi. La teoria dei conduttori d'onde radio ha avuto uno sviluppo intenso soprattutto nei lavori degli scienziati sovietici. Attualmente le proprietà dei conduttori d'onde radio circolare, rettangolare e di altro tipo sono abbastanza studiate.

*) B. A. Vvedenskij e A. G. Arenberg, *Conduttori d'onde radio*, parte I, Gostechizdat, Mosca, 1946 (ed. russa).

Consideriamo dapprima le proprietà dei conduttori d'onde radio a sezione trasversale arbitraria ed illustriamole su alcuni esempi concreti. Dunque, consideriamo un tubo cilindrico che si stende indefinitamente lungo l'asse z. Supporremo le pareti del tubo perfettamente conduttrici. Indichiamo con Σ la superficie, S la sezione trasversale del tubo e C il contorno che delimita questa sezione. Supponiamo che: 1) le caratteristiche del mezzo che riempie questo conduttore d'onde radio, ε e μ siano uguali a 1 e $\sigma = 0$; 2) all'interno del conduttore d'onde radio non esistano sorgenti di campo; 3) i campi varino periodicamente secondo la legge $e^{-i\omega t}$.

In questo caso le equazioni di Maxwell diventano

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \end{aligned} \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right). \right\} \tag{1}$$

Poiché le pareti del conduttore d'onde radio sono perfettamente conduttrici, la componente tangenziale E_t sulla parete è nulla, cioè

$$E_t \mid_{\Sigma} = 0. \tag{2}$$

Mostriamo che *all'interno del conduttore d'onde radio si possono propagare le onde elettromagnetiche correnti.* Cercheremo la soluzione delle equazioni (1) sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} + k^2 \boldsymbol{\Pi}, \\ &\boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}, \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{\Pi}$ è il potenziale di polarizzazione. Consideriamo il caso in cui il vettore $\boldsymbol{\Pi}$ ha una sola componente diretta lungo l'asse z ($H_z = 0$). Allora le equazioni (1), dopo la sostituzione delle espressioni (3), danno

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad \text{ossia} \quad \Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \quad (\boldsymbol{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z). \tag{4}$$

La condizione (2) sarà soddisfatta se chiediamo

$$\Pi \mid_{\Sigma} = 0. \tag{5}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$\Pi (M, z) = \psi (M) f (z), \tag{6}$$

dove M è un punto appartenente alla sezione trasversale S. Sostituendo la (6) nella (4) arriviamo alla conclusione che $\psi (M)$ è un'autofunzione del problema delle vibrazioni di una membrana

fissata al contorno, cioè che

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_2\psi+\lambda\psi=0 \quad \text{all'interno di } S,\\ \psi\,|_C=0.\end{array}\right\} \tag{7}$$

Qui $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ è l'operatore di Laplace bidimensionale.

Indichiamo con $\{\lambda_n\}$ e $\{\psi_n\}$ il sistema di autovalori e di autofunzioni del problema in questione. Una soluzione particolare del problema (4) ha la forma

$$\Pi_n\,(M,\ z)=\psi_n\,(M)\,f_n\,(z),$$

dove la funzione $f_n\,(z)$ è definita dall'equazione

$$f_n''+(k^2-\lambda_n)\,f_n=0. \tag{8}$$

La soluzione generale dell'equazione (8) è

$$f_n\,(z)=A_ne^{i\gamma_nz}+B_ne^{-i\gamma_nz} \quad (\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}). \tag{9}$$

È facile vedere che il termine $A_ne^{i\gamma_nz}$ corrisponde all'onda corrente nella direzione positiva dell'asse z, mentre il secondo termine della formula (9) rappresenta l'onda corrente nella direzione opposta.

Considerando una sola onda corrente in una direzione, poniamo

$$f_n\,(z)=A_ne^{i\gamma_nz};$$

allora otteniamo la soluzione nella forma

$$\Pi_n\,(M,\ z)=A_n\psi_n\,(M)\,e^{i\gamma_nz}, \tag{10}$$

dove A_n è costante definibile mediante le condizioni di eccitazione dei campi.

Sostituendo l'espressione (10) nelle formule (3) e ristabilendo il fattore $e^{-i\omega t}$, troviamo le componenti del campo espresse nella forma

$$F_n\,(M)\,e^{i(\gamma_nz-\omega t)}, \tag{11}$$

dove F_n è una funzione che si esprime mediante l'autofunzione $\psi_n\,(M)$ della membrana o mediante le sue derivate.

Se $k^2>\lambda_n$, allora γ_n è reale e l'espressione (11) rappresenta l'onda corrente che si propaga lungo l'asse z alla velocità di fase

$$v=\frac{\omega}{\sqrt{k^2-\lambda_n}}=\frac{c}{\sqrt{1-\lambda_n/k^2}}>c.$$

La velocità di gruppo dell'onda, evidentemente, vale

$$u=\frac{c^2}{v}=c\sqrt{1-\lambda_n/k^2}<c,$$

cioè nel conduttore d'onde radio vuoto ha luogo dispersione.

Se $k^2 < \lambda_n$, allora $\gamma_n = i\varkappa_n$ ($\varkappa_n > 0$) e in luogo dell'espressione (11) otteniamo l'onda smorzante

$$F_n(M)\, e^{-i\omega t - \varkappa_n z}, \tag{12}$$

che si propaga lungo l'asse z nella direzione positiva.

Poiché le autofrequenze λ_n della membrana crescono indefinitamente all'aumentare dell'indice n, qualunque sia la frequenza ω, a cominciare da un certo indice $n = N$ avremo

$$k^2 < \lambda_n.$$

Di conseguenza, nel conduttore d'onde radio può propagarsi soltanto un numero finito di onde correnti. Se $k^2 < \lambda_1$, allora nel conduttore d'onde radio non può esistere nessuna onda corrente.

Affinché nel conduttore d'onde radio di forma e dimensioni date possa propagarsi almeno un'onda corrente deve essere soddisfatta, evidentemente, la condizione

$$\lambda_1 < k^2 \quad \text{oppure} \quad \Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

dove Λ è la lunghezza dell'onda propagantesi nel tubo.

Per un conduttore d'onde radio a sezione rettangolare di lati a e b abbiamo

$$\lambda_n = \lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad \begin{pmatrix} m = 1,\ 2,\ \ldots \\ n = 1,\ 2,\ \ldots \end{pmatrix}, \tag{13}$$

e, di conseguenza, l'onda corrente può esistere alla sola condizione

$$k > \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad \text{oppure} \quad \Lambda < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \tag{14}$$

Soluzioni delle equazioni di Maxwell possono essere anche campi la cui componente z del campo elettrico è nulla

$$E_z = 0. \tag{15}$$

Introducendo il vettore $\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\Pi} \boldsymbol{i}_z$ e ponendo

$$\hat{\boldsymbol{E}} = ik \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\Pi}}; \quad \hat{\boldsymbol{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\Pi}} + k^2 \hat{\boldsymbol{\Pi}}$$

$$(\hat{E}_z = 0), \tag{16}$$

vediamo che la funzione $\Pi(M, z)$ deve essere determinata dall'equazione

$$\Delta \hat{\Pi} + k^2 \hat{\Pi} = 0 \quad \text{o} \quad \Delta_2 \hat{\Pi} + \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial z^2} + k^2 \hat{\Pi} = 0 \tag{17}$$

e dalla condizione al contorno

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su} \quad \Sigma, \tag{18}$$

Ripetendo le suddette considerazioni, troviamo le soluzioni di questo problema

$$\hat{\Pi}_n = \hat{A}_n \hat{\psi}_n (M)\, e^{i\hat{\gamma}_n z} \quad (\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}), \tag{19}$$

cui corrispondono soluzioni delle equazioni di Maxwell della forma

$$\hat{F}_n (M)\, e^{i(\hat{\gamma}_n z - \omega t)}.$$

Qui $\hat{\psi}_n (M)$ e $\hat{\lambda}_n$ indicano le autofunzioni e autofrequenze della membrana S con contorno libero

$$\Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n = 0 \quad \text{in} \quad S,$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su} \quad C.$$

In tal modo, nel conduttore d'onde radio possono esistere campi di due tipi $\{E, H\}$ e $\{\hat{E}, \hat{H}\}$ definiti dalle formule (3) e (16). Si usa la terminologia seguente: si parla di onde elettriche (oppure di onde del tipo TM) se $H_z = 0$, o di onde magnetiche (del tipo TE) se $E_z = 0$. Abbiamo visto così che nel conduttore d'onde radio possono esistere le onde TE o TM. Si può mostrare *) che ogni campo in un conduttore d'onde radio è rappresentabile come somma dei campi TE e TM. Ne segue che un campo arbitrario può essere definito in un conduttore d'onde radio se sono date due funzioni scalari $\Pi (M, z)$ e $\hat{\Pi} (M, z)$.

2. Determiniamo il valore dell'energia trasportata da un'onda corrente, ad esempio del tipo TM.

A tal fine calcoliamo il valore del flusso del vettore di Umov-Poynting attraverso la sezione S:

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \int\int_S [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}^*]_z \, dS, \tag{20}$$

dove $\boldsymbol{H}^*$ è il vettore coniugato complesso di $\boldsymbol{H}$, S la sezione perpendicolare del conduttore d'onde radio.

Introduciamo un sistema di coordinate ortogonali x, y, z. Allora

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \int\int_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*)\, dx\, dy. \tag{21}$$

Esprimiamo le componenti del campo in funzione del potenziale di polarizzazione Π mediante le formule

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial z}, \qquad E_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial z},$$

$$H_x^* = ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial y}, \qquad H_y^* = -ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial x}$$

*) A. N. Tichonov e A. A. Samarskij, Atti dell'Università di Mosca, fasc. 7 (1948).

e sostituiamone i valori nell'uguaglianza (21)

$$W_z = -\frac{c}{8\pi} ik \int\int_S \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi^*}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{22}$$

La funzione Π e la sua coniugata Π^* secondo la formula (10) sono rappresentabili nella forma

$$\Pi\ (M,\ z) = A_n \psi_n\ (M)\ e^{i\gamma_n z},$$

$$\Pi^*\ (M,\ z) = A_n^* \psi_n\ (M)\ e^{-i\gamma_n z},$$

dove ψ_n è un'autofunzione della membrana fissata ($\psi_n\ |_C = 0$). Ne segue che al posto della (22) si può scrivere

$$W_z = \frac{ck}{8\pi} \gamma_n\ |\ A_n\ |^2 \int\int_S \left[\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \frac{ck}{8\pi} \gamma_n\ |A_n\ |^2 \int_S (\nabla \psi_n)^2\, dS.$$

Applicando la prima formula di Green

$$\int\int_S (\nabla \psi_n)^2\, dS = -\int\int_S \psi_n \Delta_2 \psi_n\, dS +$$

$$+ \int_C \psi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} ds = \lambda_n \int\int_S \psi_n^2\, dS = \lambda_n,$$

otteniamo l'espressione del flusso di energia trasportata dall'onda corrente di indice n

$$W_z = \frac{ck}{8\pi}\ |\ A_n\ |^2 \gamma_n \lambda_n. \tag{23}$$

Se si propagano contemporaneamente più onde, allora W_z sarà uguale alla somma di addendi della forma (23).

Passiamo ora al problema dell'eccitazione dei campi elettromagnetici da parte di correnti date in un conduttore d'onde radio *).

3. Supponiamo che in un volume V_0 all'interno di un conduttore d'onde radio Σ siano date le correnti $j\ (M,\ z)\ e^{-i\omega t}$ variabili con il tempo secondo la legge armonica. Troviamo i campi eccitati da queste correnti. In virtù del principio di sovrapposizione dei campi è sufficiente risolvere, evidentemente, il problema dell'eccitazione del conduttore d'onde radio da parte di un dipolo elementare con orientazione qualsiasi.

Per dare un'idea del metodo di soluzione del problema generale, consideriamo il caso più semplice di eccitazione del conduttore d'onde radio da parte della corrente lineare $I = I_0\ (z) e^{-i\omega t}$ data sull'intervallo L parallelo all'asse z.

*) A. A. Samarskij e A. N. Tichonov, ŽTF **27**, fasc. 11, 12 (1947).

Per determinare campi elettromagnetici eccitati nel conduttore d'onde radio bisogna usare:

1) le equazioni di Maxwell (1),

2) le condizioni al contorno

$$E_{\text{tang}} = 0 \quad \text{su} \quad \Sigma,$$

3) la condizione di radiazione chiedendo che non esistano onde provenienti dall'infinito,

4) la condizione di eccitazione che consideriamo sotto la forma *)

$$\oint_{K_\varepsilon} H_s \, ds = \frac{4\pi}{c} I_0 \quad \text{ossia} \quad H_s \approx \frac{2I_0}{c\rho}, \tag{24}$$

dove K_ε è una circonferenza di raggio ε ($\varepsilon \to 0$) che comprende la linea L, $\rho = |\overrightarrow{MM_0}|$, dove M_0 è un punto sulla corrente, M un punto sulla circonferenza K_ε. In altre parole, il campo elettromagnetico sulla corrente deve avere una singolarità di forma determinata.

Passiamo al potenziale Π ricorrendo a tale scopo alle formule (3). Sia (M_0, ξ) un punto qualsiasi sulla corrente. Introduciamo un sistema di coordinate cilindriche ρ, φ, z con l'origine nel punto (M_0, ξ) e calcoliamo H_s mediante l'equazione (3)

$$H_s = ik \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Di qui e dalla (24) segue che nel punto (M_0, ξ) la funzione Π deve avere una singolarità logaritmica

$$\Pi \approx -\frac{2I_0}{ikc} \ln \frac{1}{\rho}. \tag{25}$$

Quindi, la funzione $\Pi(M, z)$ deve verificare l'equazione d'onda (4), la condizione al contorno $\Pi = 0$ su Σ, la condizione di radiazione e quella di eccitazione (25).

Cercheremo la soluzione di questo problema sotto la forma

$$\Pi = K \int_L \Pi_0 (M, M_0; z, \zeta) I_0 (\zeta) \, d\zeta, \tag{26}$$

dove $\Pi_0 (M, M_0; z, \zeta)$ è la funzione di sorgente definita come soluzione dell'equazione

$$\Delta \Pi_0 + k^2 \Pi_0 = 0$$

nelle variabili (M, z) e (M_0, ζ), che soddisfa la condizione al contorno

$$\Pi_0 = 0 \quad \text{su} \quad \Sigma,$$

*) Si veda l'Appendice II al capitolo V, n. 3.

la condizione di radiazione ed ha una singolarità della forma $\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$ quando coincidono gli argomenti, vale a dire questa soluzione è rappresentabile sotto forma di somma

$$\Pi_0(M,\ M;\ z,\ \zeta) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + v(M,\ M_0;\ z,\ \zeta)$$

$$\left(r = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2},\quad \rho = |\overrightarrow{MM_0}|\right),$$

dove v è una funzione regolare definibile dall'equazione d'onda e dalla condizione al contorno

$$v = -\frac{e^{+ikr}}{4\pi r} \quad \text{su} \quad \Sigma.$$

È facile vedere che la funzione $\Pi\ (M,\ z)$ definita dalla formula (26) avrà una singolarità logaritmica e che la condizione di eccitazione sarà soddisfatta se poniamo il fattore di normalizzazione uguale a

$$K = -\frac{4\pi}{ikc}.$$

Ne segue che

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc}\int_L \Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta)\, I_0(\zeta)\, d\zeta.$$

In particolare, l'elemento di corrente di lunghezza Δl è

$$\Pi(M,\ z) = -\frac{4\pi}{ikc} I_0 \cdot \Delta l \cdot \Pi_0.$$

Di conseguenza, Π_0 ha il significato fisico di *potenziale di polarizzazione* corrispondente all'eccitazione da parte di un elemento di corrente sito nel punto $(M_0,\ \zeta)$ parallelamente all'asse del conduttore d'onde radio.

In tal modo, il problema della definizione del campo in un conduttore d'onde radio è ridotto completamente alla costruzione della funzione di sorgente Π_0 del primo problema ai limiti per l'equazione $\Delta u + k^2 u = 0$ all'interno di un cilindro infinito.

Alla costruzione della funzione di sorgente può essere applicato il metodo esposto al § 2 del capitolo VI. Consideriamo l'equazione non omogenea

$$\Delta u + k^2 u = -f(M,\ z), \tag{27}$$

dove $f\ (M,\ z)$ è una funzione data, con la condizione al contorno $u \mid_\Sigma = 0$.

Cercheremo la funzione $u\ (M,\ z)$ sotto forma di serie

$$u(M,\ z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\, \psi_n(M), \tag{28}$$

dove $\psi_n(M)$ sono le autofunzioni normalizzate della membrana S

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0, \quad \psi_n|_C = 0. \tag{7}$$

Sviluppando $f(M, z)$ in serie

$$f(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\psi_n(M), \quad f_n(z) = \iint_S f(M', z)\,\psi_n(M')\,d\sigma_{M'} \tag{29}$$

e sostituendo le espressioni (28) e (29) nella (27), otteniamo l'equazione

$$u_n''(z) - p_n^2 u_n(z) = -f_n(z), \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}. \tag{30}$$

La soluzione di questa equazione, come è facile notare, è rappresentata dalla formula

$$u_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f_n(\zeta)\,d\zeta, \tag{31}$$

la quale in virtù della formula (29) può essere riscritta nella forma

$$u_n(z) = \iint_S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f(M', \zeta)\,\psi_n(M')\,d\sigma_{M'}\,d\zeta. \tag{31'}$$

Sostituendo questa espressione nella formula (28) e cambiando l'ordine della sommatoria e di integrazione, avremo

$$u(M, z) = \iiint_T \Pi_0(M, M', z-\zeta)\,f(M', \zeta)\,d\sigma_{M'}\,d\zeta, \tag{32}$$

dove

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M')}{2p_n}\,e^{-p_n|z-\zeta|}. \tag{33}$$

La serie di $\Pi_0(M, M', z-\zeta)$ per $z \neq \zeta$ è assolutamente e uniformemente convergente in virtù delle stime delle autofunzioni *)

*) Per le autofunzioni $\psi_n(M)$ sussiste la stima uniforme $|\psi_n(M)| \leqslant A\lambda_n$, dove A è una costante indipendente dal punto M e dall'indice n. Infatti, il problema ai limiti (7) è equivalente all'equazione integrale $\psi_n(M) = \lambda_n \iint_S G(M, M')\,\psi_n(M')\,d\sigma_{M'}$, dove $G(M, M')$ è la funzione di sorgente per l'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$ sotto la condizione al contorno $u|_C = 0$. Da questa equazione integrale deriva, in virtù della disuguaglianza di Bunjakovskij,

$$|\psi_n| \leqslant |\lambda_n| \sqrt{\iint_S G^2(M, M')\,d\sigma_{M'} \iint_S \psi_n^2(M')\,d\sigma_{M'}} \leqslant A\,|\lambda_n|$$

e dell'esistenza del fattore esponenziale. La funzione $\Pi(M, M', z-\zeta)$ nel punto $(M = M', z = \zeta)$ ha una singolarità della forma $1/r$. Non ci soffermiamo qui sulla dimostrazione dell'ultima affermazione *). Da quanto detto sopra risulta

$$G(M, M', z-\zeta) = \Pi_0(M, M', z-\zeta),$$

vale a dire la funzione di sorgente Π_0 ha la forma

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M')}{2p_n}\, e^{-p_n|z-\zeta|}.$$

Dalla formula (33) segue che il campo in questo caso sarà rappresentato come sovrapposizione di onde della forma (11) e (12). Dall'osservazione alla pag. 536 segue che la serie (33) sarà composta da un numero finito di addendi della forma

$$B_n\psi_n(M)\, e^{i\gamma_n|z-\zeta|} \qquad \text{(onde correnti)}$$

$$(\gamma_n = \sqrt{k^2-\lambda_n},\ p_n = -i\gamma_n)$$

e da un numero infinito di addendi della forma

$$B'_n\psi_n(M)\, e^{-p_n|z-\zeta|} \qquad \text{(onde smorzanti)},$$

dove

$$B'_n = \frac{\psi_n(M')}{2p_n}, \qquad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}, \qquad \lambda_n > k^2.$$

Per determinare i campi si deve ricorrere alle formule (26) e (3).

Il problema dell'eccitazione del conduttore d'onde radio da parte di un elemento di corrente magnetica parallela all'asse z (un cappio infinitesimo di corrente elettrica nel piano $S_{z=\zeta}$) ci conduce alla seconda funzione di sorgente

$$\hat{\Pi}_0(M, M';\ z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M')}{2\hat{p}_n}\, e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|},$$

$$\hat{p}_n = \sqrt{\lambda_n - k^2},$$

---

in modo che

$$\iint_S \psi_n^2(M')\, d\sigma_{M'} = 1; \qquad \iint_S G^2(M, M')\, d\sigma_{M'} \leqslant A^2.$$

Analogamente si ottengono le stime delle derivate

$$\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right| \leqslant B\lambda_n^2, \qquad \left|\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\right| \leqslant B\lambda_n^2.$$

*) Si veda A. A. Samarskij e A. N. Tichonov, ŽTF 27, fasc. 11 (1947).

che verifica la condizione al contorno $\frac{\partial \hat{\Pi}_0}{\partial \nu} = 0$ su Σ. In questo caso $H_z = 0$; $\hat{\Pi} = -\frac{4\pi}{ikc} k\Delta l \hat{\Pi}_0$ ($k\Delta l$ è il momento di un elemento della corrente magnetica).

Analogamente si può risolvere il problema dell'eccitazione da parte di un dipolo orientato in modo arbitrario (un elemento di corrente) trovando in questo caso le singolarità dei campi. Le funzioni corrispondenti Π verranno definite da una formula analoga alla (33). Nel caso di correnti superficiali e volumetriche le funzioni Π sono date da integrali di superficie e di volume (per analogia con la formula (26)). Per il calcolo ulteriore dei campi si adoperano le formule (3).

Il problema dell'eccitazione di qualsiasi conduttore cilindrico d'onde radio da parte di correnti date si risolve così completamente. Per applicare le formule generali a un conduttore d'onde radio di sezione determinata, è sufficiente trovare le autovibrazioni della membrana avente forma della sezione perpendicolare del conduttore.

Diamo le espressioni per le autofunzioni ortonormali di una membrana rettangolare di lati a e b:

$$\psi_n(M) = \psi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a} x \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y;$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y$$

$(\varepsilon_j = 2,\ j \neq 0;\ \varepsilon_0 = 1)$;

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Per una membrana circolare di raggio a abbiamo

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{J_n\left(\mu_{mn} \frac{r}{a}\right)}{|J'_n(\mu_{mn})|} \begin{matrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{matrix} n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{\hat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\hat{\mu}^2_{mn} - n^2}} \frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_{mn}}{a} r\right)}{|J_n\ \hat{\mu}_{mn})|} \begin{matrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{matrix} n\varphi,$$

dove μ_{mn} è la radice dell'equazione $J_n(\mu) = 0$; $\lambda_{mn} = \mu^2_{mn}/a^2$, $\hat{\mu}_{mn}$ è la radice dell'equazione $J'_n(\mu) = 0$; $\hat{\lambda}_{mn} = \hat{\mu}^2_{mn}/a^2$.

II. *Vibrazioni elettromagnetiche in risonatori vuoti*

Negli ultimi anni hanno acquistato larga applicazione in radiotecnica i *risonatori di volume* ossia *endovibratori* che si presentano come cavità di metallo riempite da un dielettrico (in particolare

aria). Nell'endovibratore possono esistere campi elettromagnetici stazionari (onde stazionarie), detti autovibrazioni elettromagnetiche.

In radiotecnica delle onde ultracorte trovano uso degli endovibratori di configurazione assai complicata. Il problema generale della definizione delle autovibrazioni di questi endovibratori è assai difficile; tuttavia per endovibratori di forma elementare è possibile ottenere una soluzione in forma esplicita. Poiché le pareti sono fabbricate con un metallo ad alta conduttività, nel calcolo delle autovibrazioni si suppone che le pareti siano perfettamente conduttrici. Si può ottenere una correzione alla conduttività finita usando le condizioni al contorno di Leontovič. Nel seguito supporremo che le pareti dell'endovibratore siano perfettamente conduttrici e che tutte le grandezze del campo varino col tempo secondo la legge $e^{-i\omega t}$.

Senza proporci di dare un'esposizione esauriente della teoria degli endovibratori, soffermiamoci su alcune questioni generali della teoria di questi sistemi vibratori.

1. Autovibrazioni di un endovibratore cilindrico. Il problema di determinare le autovibrazioni elettromagnetiche consiste nella ricerca di soluzioni non banali delle equazioni di Maxwell *), più precisamente nel determinare le autofrequenze ω per cui il sistema di equazioni omogenee di Maxwell, con condizioni ai limiti omogenee, ha soluzioni non banali, nonché le soluzioni non banali stesse.

Le equazioni di Maxwell in questo caso hanno la forma

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \tag{1}$$

all'interno della cavità T sulla cui superficie Σ si verificano le condizioni

$$E_t = 0 \tag{2}$$

ossia

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \nu} = 0; \tag{3}$$

ambedue queste condizioni, come è facile provare, sono equivalenti.

Calcoliamo le autovibrazioni di un endovibratore rappresentante un « tratto » di conduttore cilindrico d'onde radio di se-

*) Omettiamo ovunque il fattore $e^{-i\omega t}$.

zione qualsiasi, delimitato da due pareti laterali $z = \pm l$ (l'asse z è parallelo alla generatrice del cilindro).

Così come nel conduttore d'onde radio cilindrico, anche nell'endovibratore del tipo considerato sono possibili vibrazioni sia di tipo elettrico ($H_z = 0$) sia di tipo magnetico ($E_z = 0$).

Per le onde di tipo elettrico poniamo

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{H} &= -ik\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z$ ($\boldsymbol{i}_z$ è il vettore unitario diretto lungo l'asse z) è il potenziale vettoriale di polarizzazione avente non nulla la sola componente sull'asse z. Dalla formula (4) si vede immediatamente che in questo caso $H_z = 0$.

La funzione Π, di solito, verifica l'equazione d'onda

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0. \tag{5}$$

Consideriamo sulla superficie Σ un sistema di coordinate ortogonali locali ($\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{i}_z$), dove $\boldsymbol{\nu}$ è il vettore unitario diretto lungo la normale alla superficie ed $\boldsymbol{s}$ è diretto lungo la tangente al contorno C che delimita la sezione perpendicolare S dell'endovibratore cilindrico.

In virtù delle condizioni al contorno (2) abbiamo

$$\left.\begin{aligned} E_s|_\Sigma &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial s\,\partial z}\Big|_\Sigma = 0, \\ E_z|_\Sigma &= \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi\right)\Big|_\Sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Queste due uguaglianze saranno soddisfatte chiedendo che sia

$$\Pi\,|_\Sigma = 0. \tag{7}$$

Per $z = \pm l$ ricaviamo dalla (2) le condizioni

$$E_s|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial s\,\partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0,$$

$$E_\nu|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\nu\,\partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0,$$

affinché tutte e due siano soddisfatte è sufficiente porre

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

Siamo giunti così al problema ai limiti seguente:

trovare le soluzioni non banali dell'equazione d'onda

$$\Delta_2\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi = 0 \tag{6'}$$

con le condizioni al contorno omogenee

$$\Pi|_{\Sigma} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

Come nel caso del conduttore d'onde radio cilindrico (si veda la pag. 534), cerchiamo la soluzione sotto la forma

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z). \tag{9}$$

Portando questa espressione nell'equazione (6') e applicando la condizione (7), otteniamo per la funzione $\psi(M)$ il problema delle autovibrazioni della membrana fissata

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \text{ in } S, \tag{10}$$

$$\psi = 0 \text{ su } C. \tag{11}$$

Per determinare la funzione $f(z)$ otteniamo dopo la separazione di variabili l'equazione

$$f'' + (k^2 - \lambda) f = 0 \tag{12}$$

con la condizione al contorno

$$f'(\pm l) = 0 \tag{13}$$

che deriva dalla condizione (8).

Si deve tener presente che, a differenza del problema per i conduttori d'onde radio, k^2 non è qui una grandezza data, ma figura nell'equazione come parametro. Dobbiamo trovare i valori di k^2 per cui il problema (6)-(8) ammette una soluzione non banale.

Risolvendo l'equazione (12) sotto la condizione (13) otteniamo le autofunzioni

$$f_m(z) = A_m \cos \frac{\pi m}{2l}(l - z),$$

corrispondenti agli autovalori

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

dove

$$\mu_m = k_m^2 - \lambda.$$

Il problema ai limiti (10)-(11) fornisce lo spettro di autovalori $\{\lambda_n\}$ con il sistema corrispondente di autofunzioni normalizzate $\{\psi_n(M)\}$. Ne segue che nell'endovibratore possono esistere solo vibrazioni le cui autofrequenze o frequenze di risonanza valgono

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\lambda_n + \mu_m}.$$

A queste frequenze corrisponde il sistema di autofunzioni

$$\Pi_{n,m}(M, z) = \bar{A}_{n,m}\psi_n(M)\cos\frac{\pi m}{2l}(l-z) \tag{14}$$

ossia

$$\Pi_{n,m}(M, z) = A_{n,m}\psi_n(M) f_m(z), \tag{14'}$$

dove

$$f_m(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2l}}\cos\frac{\pi m}{2l}(l-z), \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 2; & m \neq 0; \\ 1; & m = 0 \end{cases}$$

sono funzioni normalizzate a uno. La soluzione è definita a meno del fattore d'ampiezza $A_{n,m}$ che si deduce dalle condizioni di eccitazione delle vibrazioni di questo tipo.

Se sono date le autofunzioni $\psi_n(M)$ della membrana, le formule (14) e (4) permettono di calcolare le componenti del campo.

Se la sezione trasversale S dell'endovibratore è un rettangolo di lati a e b, avremo

$$\psi_n(M) = \psi_{p,q}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\operatorname{sen}\frac{\pi p}{a}x\operatorname{sen}\frac{\pi q}{b}y$$

$(p, q = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$\lambda_n = \lambda_{p,q} = \pi^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right),$$

$$\Pi_{n,m} = A_{m,p,q}\sqrt{\frac{2\varepsilon_m}{abl}}\operatorname{sen}\frac{\pi p}{a}x\operatorname{sen}\frac{\pi q}{b}y\cos\frac{\pi m}{2l}(l-z).$$

In questo caso all'autofrequenza più piccola

$$\omega_{0,1,1} = c\sqrt{\lambda_{1,1}} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

corrisponde la lunghezza d'onda massima possibile

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

In particolare, per $b = a$ la lunghezza d'onda più grande

$$\Lambda_0 = a\sqrt{2}$$

è uguale alla diagonale del quadrato che si ottiene nella sezione perpendicolare. Di conseguenza, in un endovibratore di questo tipo sono possibili solo autovibrazioni di frequenza

$$\omega \geqslant \omega_{0,1,1}$$

o di lunghezza d'onda

$$\Lambda \leqslant \Lambda_0.$$

Analogamente si trovano le autovibrazioni di tipo magnetico ($E_z = 0$). In questo caso poniamo

$$\boldsymbol{E} = ik \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\Pi}},$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\Pi}} + k^2 \hat{\boldsymbol{\Pi}},$$

dove

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\Pi} \boldsymbol{i}_z.$$

Per definire $\hat{\Pi}(M, z)$ otteniamo l'equazione (6) con le condizioni al contorno

$$\left.\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \nu}\right|_{\Sigma} = 0, \tag{7'}$$

$$\hat{\Pi}|_{z=\pm l} = 0, \tag{8'}$$

risolvendo le quali troviamo

$$\hat{\Pi}_{n,m} = \hat{A}_{n,m} \hat{\psi}_m(M) \operatorname{sen} \frac{\pi m}{2l}(l - z). \tag{15}$$

In questo caso con $\hat{\psi}_n(M)$ si devono intendere le autofunzioni della membrana S sotto la condizione al contorno $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu} = 0$ su C.

2. Energia elettromagnetica delle autovibrazioni. Calcoliamo l'energia dei campi elettrico e magnetico di un'onda stazionaria in un endovibratore cilindrico.

Per semplicità, limitiamoci al caso di onde di tipo elettrico. Tenendo conto nelle formule (4) della dipendenza di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ dal tempo secondo la legge $e^{-i\omega t}$ e considerando la sola parte reale, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial x} \cos \omega t, \\ E_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial y} \cos \omega t, \\ E_z &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right) \cos \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -k \frac{\partial \Pi}{\partial y} \operatorname{sen} \omega t, \\ H_y &= k \frac{\partial \Pi}{\partial x} \operatorname{sen} \omega t, \\ H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Per calcolare l'energia dei campi elettrico e magnetico applichiamo le note formule

$$\mathscr{E}_{\mathrm{el}}(t) = \frac{c}{8\pi} \int\int\int_T \boldsymbol{E}^2 \, d\tau, \tag{18}$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{magn}}(t) = \frac{c}{8\pi} \int\int\int_T \boldsymbol{H}^2 \, d\tau, \tag{19}$$

dove l'integrazione è estesa al volume T dell'endovibratore.

Portando nella formula (18) le espressioni (16) e applicando la formula (14'), avremo *)

$$\mathscr{E}_{\mathrm{el}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} \cos^2 \omega t \left\{ \int\int_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma \int_{-l}^{l} [f'(z)]^2 \, dz + \right.$$

$$\left. + \int\int_S \psi^2 \, d\sigma \int_{-l}^{l} (f'' + k^2 f)^2 \, dz \right\}.$$

Dopo calcoli non complicati otteniamo

$$\int_{-l}^{l} [f'(z)]^2 \, dz = f f' \Big|_{-l}^{l} - \int_{-l}^{l} f f'' \, dz = (k^2 - \lambda) \int_{-l}^{l} f^2 \, dz = k^2 - \lambda, \tag{19'}$$

$$\int_{-l}^{l} (f'' + k^2 f)^2 \, dz = \lambda^2 \int_{-l}^{l} f^2 \, dz = \lambda^2, \tag{20}$$

poiché in virtù della normalizzazione delle funzioni f

$$\int_{-l}^{l} f^2 \, dz = 1. \tag{21}$$

Per calcolare gli integrali su S usiamo la prima formula di Green, l'equazione per la funzione ψ_n, le condizioni al contorno e la condizione di normalizzazione

$$\int\int_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy = \int\int_S (\nabla_2 \psi)^2 \, d\sigma =$$

$$= - \int\int_S \psi \Delta_2 \psi \, d\sigma + \int_C \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, ds = \lambda \int\int_S \psi^2 \, d\sigma = \lambda, \tag{22}$$

dove ∇_2 è l'operatore « nabla » nel piano S, Δ_2 l'operatore di Laplace bidimensionale. Come risultato otteniamo l'espressione

*) Per il momento omettiamo gli indici m, n.

seguente per l'energia del campo elettrico:

$$\mathscr{E}_{\text{el}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} k^2 \lambda \cos^2 \omega t. \tag{23}$$

In virtù delle formule (17), (19) e (14′) l'energia del campo magnetico è

$$\mathscr{E}_{\text{magn}}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \int\int_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \int_{-l}^{l} f^2\, dz \operatorname{sen}^2 \omega t,$$

da cui, tenendo conto delle uguaglianze (21) e (22), ricaviamo

$$\mathscr{E}_{\text{magn}}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda \operatorname{sen}^2 \omega t. \tag{24}$$

L'energia totale del campo elettromagnetico non cambia, evidentemente, con il tempo

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{el}}(t) + \mathscr{E}_{\text{magn}}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda. \tag{25}$$

Si vede dalle formule (23) e (24) che nell'onda stazionaria si produce uno scambio di energia elettrica in magnetica e viceversa, mentre la media dell'energia del campo elettrico in un periodo

$$\overline{\mathscr{E}}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathscr{E} \tag{26}$$

è uguale alla media dell'energia del campo magnetico

$$\overline{\mathscr{E}}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathscr{E}. \tag{27}$$

3. Eccitazione delle vibrazioni in un endovibratore. Per eccitare il campo in un endovibratore da parte di una sorgente esterna è necessario introdurre attraverso una fessura nel suo involucro un elemento di connessione. Come tale elemento può servire una spira, oppure una sbarra agente come piccola antenna. Affinché l'elemento di connessione non perturbi il campo nell'endovibratore, occorre che le sue dimensioni siano molto inferiori alla lunghezza d'onda. Sono possibili altri modi di eccitazione dell'endovibratore, ad esempio con un fascio di elettroni attraversanti la cavità dell'endovibratore (attraverso fori nelle sue pareti).

La soluzione del problema dell'eccitazione di un endovibratore da parte di un'antenna collocata all'interno o, nel caso limite, da un dipolo elementare, chiede che sia tenuto conto della conduttività finita delle pareti. In caso contrario un processo stabile è impossibile. Si può tener conto della conduttività finita delle pareti mediante le *condizioni di Leontovič*.

Consideriamo ora il problema dell'eccitazione di un endovibratore sferico da parte di un dipolo, che ammette una soluzione ana-

litica semplice *). Supponiamo che al centro di una sfera di raggio r_0 sia collocato il dipolo vibrante di frequenza ω ed ampiezza 1, diretto lungo l'asse z. Dobbiamo determinare il campo all'interno della sfera tenendo conto della conduttività finita delle pareti.

In questo caso i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ si possono esprimere mediante la funzione U:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{i}{\rho \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ E_\theta &= -\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ H_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Le altre componenti E_φ, H_r e H_θ sono nulle.

Poiché il dipolo è diretto lungo l'asse z ($\theta = 0$), i campi non devono dipendere, evidentemente, dall'angolo φ.

La funzione U verifica l'equazione

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+U=0, \tag{29}$$

dove $\rho = kr$ e U ha per $\rho \to 0$ una singolarità della forma

$$\frac{ie^{ikr}}{r^2}=\frac{ik^2e^{i\rho}}{\rho^2}. \tag{30}$$

Sulla superficie della sfera ($\rho = \rho_0$) deve essere verificata la condizione di Leontovič

$$E_\theta = aH_\varphi, \tag{31}$$

dove

$$a=\mu kd\sqrt{\frac{i}{2}}\quad\left(d=\frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\right) \tag{32}$$

è la profondità efficace dello strato skin.

Dalle relazioni (31) e (28) deriva la condizione al contorno per la funzione U

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U)-i\rho_0 aU\right]_{\rho=\rho_0}=0$$

ossia

$$\rho_0\frac{\partial U}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}+(1-i\rho_0 a)\,U\,|_{\rho=\rho_0}=0. \tag{33}$$

*) Si veda S. M. Rytov, Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS 51, fasc. 2 (1946).

La soluzione dell'equazione (29) avente la singolarità (30) corrisponde, evidentemente, alla funzione

$$U = -k^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \left[H^{(1)}_{3/2}(\rho) + CJ_{3/2}(\rho)\right] P_1(\cos\theta),$$

dove $P_1(\cos\theta)$ è il polinomio di Legendre del primo ordine, $H^{(1)}_{3/2}$ la funzione di Hankel di prima specie, $J_{3/2}$ la funzione di Bessel,

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$H^{(1)}_{3/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\rho}\left(\frac{1}{i\rho} - 1\right),$$

$$J_{3/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} - \cos\rho\right).$$

La costante C è definita dalla condizione al contorno (33)

$$C = -e^{i\rho_0}\, \frac{1 - \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho_0} + a\left(\frac{1}{i\rho_0} - 1\right)}{i\left[\frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\operatorname{sen}\rho_0 - ia\left(\frac{\operatorname{sen}\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0\right)\right]}.$$

La soluzione ottenuta può servire a determinare le perdite nelle pareti. L'intensità assorbita dalle pareti, cioè

$$Q = \frac{\mu\omega d}{16\pi} \int_0^{\pi} |H_\varphi|^2\, 2\pi\rho_0^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

si calcola direttamente e vale $Q = \dfrac{\mu\omega k^4 d}{6} \dfrac{1}{|B - iaA|^2}$, dove

$$A = \frac{\operatorname{sen}\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0, \qquad B = \frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\operatorname{sen}\rho_0.$$

Se il dipolo non si trova al centro della sfera, il calcolo dei campi diventa molto più complicato; tuttavia la soluzione può essere ottenuta sotto forma di serie.

III. *Effetto skin*

La corrente alternata, a differenza di quella costante, non è distribuita uniformemente sulla sezione del conduttore e ha una densità più grande in prossimità della sua superficie. Questo fenomeno si chiama *effetto skin* *) (dall'inglese *skin* — pelle).

Consideriamo, per semplicità, un filo cilindrico omogeneo infinito (μ = costante, σ = costante) attraverso il quale passa

*) I. E. Tamm, *Elementi di teoria dell'elettricità*, Nauka, Mosca, 1966 (ed. russa).

la corrente alternata. Supporremo come nota la corrente totale $I = I_0 e^{i\omega t}$ passante per la sezione del filo.

Trascurando le correnti di spostamento rispetto a quelle di conduttività *) e supponendo il processo stabile, cioè dipendente dal tempo secondo la legge $e^{i\omega t}$, otteniamo, dopo aver diviso per il fattore $e^{i\omega t}$, le equazioni di Maxwell nella forma

$$\text{rot}\, \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{E} = -ik\mu \boldsymbol{H}, \tag{2}$$

$$\text{div}\, \boldsymbol{E} = 0, \tag{3}$$

$$\text{div}\, \boldsymbol{H} = 0, \tag{4}$$

dove $k = \omega/c$. Le equazioni (3) e (4) in questo caso derivano, evidentemente, dalle equazioni (1) e (2).

Introduciamo un sistema di coordinate cilindriche (r, z, φ) in modo tale che l'asse z coincida con l'asse del filo. Allora in virtù della simmetria assiale della corrente tutte le grandezze si possono considerare dipendenti dalla sola variabile r.

Così nel caso in esame il vettore $\boldsymbol{E}$ diretto lungo l'asse z per cui le equazioni (1) e (2) danno

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_\varphi) = \frac{4\pi\sigma}{c} E_z, \tag{1'}$$

$$\frac{d}{dr} E_z = ik\mu H_\varphi. \tag{2'}$$

Escludendo di qui H_φ, troviamo

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) = i\frac{4\pi\sigma\mu k}{c} E_z. \tag{5}$$

Introduciamo la condizione al contorno sulla superficie del filo per $r = R$. A tale scopo sfruttiamo il fatto che è data la corrente totale I_0 attraversante il cilindro.

Scriviamo la prima equazione di Maxwell (1) nella forma integrale seguente:

$$\oint_C H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

dove C è il contorno contenente il filo, H_s la componente tangenziale del vettore $\boldsymbol{H}$ su C. Se come contorno consideriamo la circon-

*) Si noti che all'interno del conduttore, in particolare all'interno dei metalli, la densità delle correnti di spostamento è indefinitamente piccola rispetto alla densità delle correnti di conduttività: $j_{sp} \ll j = \sigma E$. Nel caso presente l'ultima condizione è equivalente alla richiesta $\varepsilon\omega \ll \sigma$. Dato il fatto che la conduttività dei metalli solidi è $\sigma \approx 10^{17}$ unità assolute, si possono trascurare le correnti di spostamento per tutte le frequenze usate in tecnica.

ferenza $r = R$, avremo

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(R)\, d\varphi = \frac{4\pi}{cR} I_0$$

oppure

$$H_\varphi(R) = \frac{2I_0}{cR}. \tag{6}$$

Di qui, tenendo conto della relazione (2), ricaviamo

$$\left.\frac{dE_z}{dr}\right|_{r=R} = \frac{2ik\mu}{cR} I_0. \tag{7}$$

Dobbiamo risolvere, quindi, l'equazione di Bessel

$$E_z''(r) + \frac{1}{r} E_z'(r) + (\alpha \sqrt{-i})^2 E_z(r) = 0 \quad \left(\alpha^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right) \tag{5'}$$

sotto la condizione al contorno

$$E_z'(R) = \frac{2ik\mu}{cR} I_0 \tag{7'}$$

e la condizione di limitatezza per $r = 0$

$$| E_z(0) | < \infty. \tag{8}$$

La soluzione generale dell'equazione (5') ha la forma

$$AJ_0(\alpha r \sqrt{-i}) + BN_0(\alpha r \sqrt{-i}), \tag{9}$$

dove J_0 e N_0 sono le funzioni di Bessel di prima e seconda specie (si veda Complemento II, parte I), A e B sono costanti da determinare.

La funzione N_0 ha una singolarità logaritmica per $r = 0$. Pertanto in virtù della condizione (8) $B = 0$ e, di conseguenza,

$$E_z(r) = AJ_0(\alpha r \sqrt{-i}). \tag{10}$$

Determiniamo il coefficiente A dalla condizione al contorno (7):

$$A = \frac{2\sqrt{-i}\, k\mu I_0}{\alpha c R J_1(\alpha R \sqrt{-i})}. \tag{11}$$

Di qui per la densità di corrente

$$j = \sigma E_z$$

ricaviamo

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha \sqrt{-i}}{2\pi R J_1(\alpha R \sqrt{-i})} J_0(\alpha r \sqrt{-i}). \tag{12}$$

A secondo membro di questa formula figurano le funzioni di Bessel ad argomento complesso

$$x\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\, x.$$

Si suole usare per queste funzioni le seguenti notazioni:

$$J_0(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}_0 x + i\,\mathrm{bei}_0 x;$$

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}_1 x + i\,\mathrm{bei}_1 x.$$

È facile trovare le espressioni delle funzioni reali ber x e bei x sviluppando le funzioni di Bessel in serie. Ad esempio,

$$J_0(x\sqrt{-i}) = J_0(xi\sqrt{i}) =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 (-1)\, i}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 (-1)}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 i}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots =$$

$$= \left\{1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots\right\} + i\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots\right\},$$

da cui ricaviamo

$$\mathrm{ber}_0 x = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots; \tag{13}$$

$$\mathrm{bei}_0 x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots \tag{14}$$

Allo stesso modo si ottiene facilmente

$$\mathrm{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!\,2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!\,3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!\,4!} - \ldots\right\}, \tag{15}$$

$$\mathrm{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!\,2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!\,3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!\,4!} - \ldots\right\}. \tag{16}$$

Nelle applicazioni si incontrano anche le derivate

$\mathrm{ber}_0' x$, $\mathrm{bei}_0' x$,

con

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \sqrt{-i}\,(\mathrm{bei}_0' x - i\,\mathrm{ber}_0' x). \tag{17}$$

Usando le funzioni introdotte si può riscrivere l'espressione (12) per la corrente nella forma

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R}\,\frac{\mathrm{ber}_0 \alpha r + i\,\mathrm{bei}_0 \alpha r}{\mathrm{bei}_0' \alpha R - i\,\mathrm{ber}_0' \alpha R},$$

oppure

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \left\{ \frac{(\mathrm{ber}_0 \alpha r \, \mathrm{bei}'_0 \alpha R - \mathrm{bei}_0 \alpha r \, \mathrm{ber}'_0 \alpha R)}{(\mathrm{bei}'_0 \alpha R)^2 + (\mathrm{ber}'_0 \alpha R)^2} + \right.$$

$$\left. + i \frac{(\mathrm{bei}_0 \alpha r \, \mathrm{bei}'_0 \alpha R + \mathrm{ber}_0 \alpha r \, \mathrm{ber}'_0 \alpha R)}{(\mathrm{bei}'_0 \alpha R)^2 + (\mathrm{ber}'_0 \alpha R)^2} \right\}. \qquad (18)$$

Calcolando il valore assoluto di questa espressione, abbiamo

$$| j(r) | = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \sqrt{\frac{(\mathrm{ber}_0 \alpha r)^2 + (\mathrm{bei}_0 \alpha r)^2}{(\mathrm{ber}'_0 \alpha R)^2 + (\mathrm{bei}'_0 \alpha R)^2}}. \qquad (19)$$

La distribuzione di corrente nella sezione è caratterizzata dal rapporto

$$\frac{| j(r) |}{| j(R) |} = \sqrt{\frac{(\mathrm{ber}_0 \alpha r)^2 + (\mathrm{bei}_0 \alpha r)^2}{(\mathrm{ber}'_0 \alpha R)^2 + (\mathrm{bei}_0 \alpha R)^2}}. \qquad (20)$$

Calcoliamo la distribuzione di corrente nella sezione di due frequenze: $\omega_1 = 314$ (50 periodi al secondo) e $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$ ($5 \cdot 10^5$ periodi al secondo).

Tutti i calcoli precedenti sono stati eseguiti nel sistema simmetrico gaussiano. Passando quindi al sistema fisico assoluto CGS si deve tener conto che $\mu_{CGS} = \mu_{gauss} \frac{1}{c^2}$. Tutte le altre grandezze che figurano nelle formule (12), (18), (19) e (20) coincidono nei due sistemi (gaussiano e CGS). Pertanto nel sistema CGS abbiamo

$$\alpha^2 = 4\pi\mu\sigma\omega.$$

Per il rame $\sigma = 57 \cdot 10^5$ CGS, perciò $\alpha_1 = 0{,}4444$ (per ω_1), $\alpha_2 = 44{,}44$ (per ω_2). Calcoliamo il rapporto fra i moduli delle correnti (20) a bassa frequenza $\omega_1 = 314$ per due valori di r : $r = 0$ e $r = 0{,}5\ R$. In questo caso poniamo R uguale a 1.

Tenendo conto che

$\mathrm{ber}_0\ 0 \quad = 1,$

$\mathrm{bei}_0\ 0 \quad = 0,$

$\mathrm{ber}_0\ 0{,}222 = 1 - 0{,}000036 + \ldots = 0{,}999964,$

$\mathrm{bei}_0\ 0{,}222 = 0{,}0123 - 0{,}000002 + \ldots = 0{,}012300,$

$\mathrm{ber}_0\ 0{,}444 = 1 - 0{,}00061 + \ldots = 0{,}99939,$

$\mathrm{bei}_0\ 0{,}444 = 0{,}493 - 0{,}0003 + \ldots = 0{,}4930,$

otteniamo quanto segue:

$$\left.\frac{j(0)}{j(R)}\right|_{R=1} = 0{,}9994, \qquad \left.\frac{j(0{,}5R)}{j(R)}\right|_{R=1} = 0{,}9999,$$

vale a dire a bassa frequenza la corrente è distribuita pressappoco uniformemente nella sezione (l'effetto skin non esiste).

Consideriamo ora il secondo caso: $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$. Poiché α è grande, per il calcolo è più comodo partire non dallo sviluppo delle funzioni ber e bei in serie, bensì dalle formule asintotiche

$$J_0(\alpha r \sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r}} e^{\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

$$J_0(\alpha R \sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha R}} e^{\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

dalle quali ricaviamo, ponendo $r = 0{,}9R$ e $R = 1$,

$$\left| \frac{j(0{,}9R)}{j(R)} \right|_{R=1} = \sqrt{\frac{1}{0{,}9}} e^{-\frac{44}{\sqrt{2}} 0{,}1} \approx 0{,}047.$$

Questo risultato testimonia l'eccessiva rapidità con cui decresce la densità di corrente penetrando all'interno del conduttore a frequenze elevate. Per concludere notiamo che l'effetto skin trova una larga applicazione in pratica per la tempra dei metalli.

IV. *Propagazione delle onde radio sopra la superficie della terra*

Sono di grande importanza teorica e pratica i problemi legati alla propagazione delle onde radio sia nello spazio che in presenza di superficie di separazione. A queste questioni sono dedicati numerosi lavori di scienziati sovietici e stranieri.

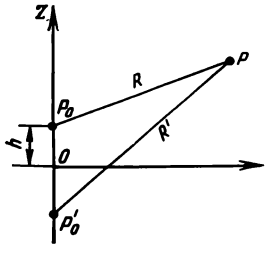


Fig. 84

Consideriamo il problema dell'influenza della terra sulla propagazione delle onde radio emesse da un dipolo verticale. In questo caso supporremo la terra piana *).

Supponiamo che a distanza h dalla superficie terrestre si trovi nel punto P_0 il dipolo irradiante vibrazioni periodiche di frequenza ω. Consideriamo la superficie terrestre come il piano $z = 0$ con l'asse z coincidente con l'asse del dipolo (fig. 84). Poniamo che nell'atmosfera ($z > 0$) sia $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ e $\sigma_0 = 0$. Supponiamo, inoltre, che la terra ($z < 0$) sia caratterizzata dalla costante dielettrica ε, dalla conducibilità σ, mentre la permeabilità magnetica μ possa essere uguale a uno; consideriamo ε e σ costanti.

Questo problema consiste nella ricerca dell'intensità del campo creato dal dipolo. Il processo di propagazione delle onde elettromagnetiche è descritto dalle equazioni di Maxwell.

*) Questo problema è stato risolto per la prima volta da Sommerfeld nel 1909. Ma la soluzione iniziale di Sommerfeld conteneva un errore, corretto in seguito da V. A. Fok.

Come è stato mostrato nell'Appendice II al capitolo V, la soluzione delle equazioni di Maxwell può essere ridotta alla soluzione dell'equazione d'onda per il potenziale di polarizzazione Π *):

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \tag{1}$$

$$k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; & z > 0; \\ k_3^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\omega}{c^2}; & z < 0. \end{cases}$$

Il potenziale $\boldsymbol{\Pi}$ è legato alle intensità del campo dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= k^2\boldsymbol{\Pi} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{H} &= -i\frac{k^2}{k_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nel caso in esame il vettore $\boldsymbol{\Pi}$ è diretto parallelamente al dipolo irradiante

$$\boldsymbol{\Pi} = (0,\ 0,\ \Pi_z); \quad \Pi_z = \Pi_z(r,\ z). \tag{3}$$

Ponendo

$$n^2 = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

otteniamo

$$k_3^2 = n^2 k_0^2.$$

Le relazioni (2) e (3) danno

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z}; \quad H_\varphi = -ik_0\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \text{ per } z > 0, \tag{4}$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z}; \quad H_\varphi = -\frac{ik_3^2}{k_0}\frac{\partial\Pi_3}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \text{ per } z < 0. \tag{5}$$

Per ottenere le condizioni al contorno per $z = 0$, partiamo dalla condizione di continuità delle componenti tangenziali delle intensità dei campi. Queste condizioni, come mostrano le formule (4) e (5), saranno soddisfatte se poniamo

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_3}{\partial z}; \quad \Pi_0 = n^2\Pi_3 \text{ per } z = 0. \tag{6}$$

Cercheremo la soluzione dell'equazione (1) sotto le condizioni al contorno (6) come sovrapposizione di soluzioni parziali nella forma

$$J_0(\lambda r)\, e^{\pm\mu z} \qquad (k^2 = \lambda^2 - \mu^2).$$

Per un dominio illimitato si ottiene in luogo di uno spettro discreto di autovalori λ uno spettro continuo. Pertanto la soluzione Π

*) Poiché si tratta di un processo stabile, il fattore temporale $e^{-i\omega t}$ si può omettere.

si può cercare sotto la forma

$$\Pi = \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\pm \mu z} d\lambda; \tag{7}$$

il segno di μ deve essere tale che sia garantita la convergenza dell'integrale (7). La funzione $F(\lambda)$ che resta ancora indeterminata rappresenta il fattore d'ampiezza delle vibrazioni separate.

Ricorriamo alla rappresentazione integrale del potenziale (si veda Complemento II, parte I, § 5)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu |z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}$$

$$(\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}). \tag{8}$$

Consideriamo due domini distinti:

a) *Aria* ($z > 0$). Il campo in questo dominio avrà la forma

$$\Pi_0 = \Pi_{\text{prim}} + \Pi_{\text{sec}},$$

dove

$$\Pi_{\text{prim}} = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{9}$$

è il potenziale del campo di eccitazione primaria creata dal dipolo stesso, e Π_{sec} il potenziale del campo di eccitazione secondaria creata dalle correnti nel sottosuolo.

Usando le rappresentazioni (7), (8) e (9) possiamo scrivere

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{\text{prim}} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu |z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{\text{sec}} &= \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

dove $F(\lambda)$ è una funzione ancora da determinare.

b) *Terra* ($z < 0$). In questo dominio si produce la sola eccitazione secondaria che possiamo scrivere nella forma

$$\Pi_3 = \int_0^\infty F_3(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\mu_3 z - \mu h} d\lambda, \tag{11}$$

dove $\mu_3^2 = k_3^2 - \lambda^2$. Poiché $z < 0$, il segno dell'esponente assicura la convergenza dell'integrale.

Per determinare le funzioni $F(\lambda)$ e $F_3(\lambda)$ usiamo le condizioni al contorno (6) che danno

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu h}\,[\lambda - \mu F(\lambda) - \mu_3 F_3(\lambda)]\, d\lambda = 0,\\ &\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu h}\,[\lambda + \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_3(\lambda)]\, \frac{d\lambda}{\mu} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Le condizioni (12) saranno verificate se poniamo

$$\left.\begin{aligned}\mu F(\lambda) + \mu_3 F_3(\lambda) &= \lambda,\\ \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_3(\lambda) &= -\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Risolvendo le equazioni (13), troviamo $F(\lambda)$ e $F_3(\lambda)$ nella forma

$$\left.\begin{aligned}F(\lambda) &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{2\mu_3}{n^2\mu + \mu_3}\right);\\ F_3(\lambda) &= \frac{2\lambda}{n^2\mu + \mu_3}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Portando le espressioni (14) nelle formule (10) e (11), otteniamo le seguenti espressioni per il potenziale di polarizzazione del campo creato dal dipolo verticale

$$\left.\begin{aligned}\Pi_0 = &\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z-h|}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} + \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z+h|}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} -\\ &- 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu(z+h)}\, \frac{\mu_3}{n^2\mu + \mu_3}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu};\\ \Pi_3 = &\; 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{\mu_3 z - \mu h}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{n^2\mu + \mu_3}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Indicando con $R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ la distanza fra il punto d'osservazione e il dipolo, con $R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ la distanza fra il punto d'osservazione e la riflessione speculare del dipolo nel piano $z = 0$ e usando la rappresentazione (8), riscriviamo l'espressione della funzione Π_0 nella forma

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'} - 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu(z+h)}\, \frac{\mu_3}{n^2\mu + \mu_3}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}. \tag{15'}$$

Consideriamo alcuni casi limite.

1) *Terra perfettamente conduttrice.* In questo caso $\sigma \to \infty$ e, di conseguenza, $|k_3|$ e $|n| \to \infty$. Allora le formule (15) e (15')

danno

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}\ ; \quad \Pi_3 = 0.$$

Si può ottenere direttamente lo stesso risultato risolvendo il problema con il metodo delle riflessioni.

2) *Dipolo in un mezzo omogeneo.* In questo caso $k_0 = k_3$; $n = 1$; $\mu = \mu_3$. Le formule (15) e (15′) danno

$$\Pi_0 = \Pi_3 = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z-h|}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} = \frac{e^{ikR}}{R}\ .$$

vale a dire si produce l'eccitazione primaria, come doveva essere.

Le espressioni integrali ottenute (15) sono molto complicate per la ricerca e le applicazioni pratiche. Le espressioni integrande in questa formula hanno punti di diramazione e poli. Sommerfeld propose un metodo di calcolo approssimato di questi integrali mediante deformazione del contorno di integrazione *). Ciò permise di ottenere la formula approssimata seguente per il campo in prossimità della superficie terrestre:

$$\Pi_0 = 2\,\frac{e^{ik_0 r}}{r}\left(1 + i\sqrt{\pi\rho}\, e^{-\rho} - 2\sqrt{\rho}\, e^{-\rho}\int_0^{\sqrt{\rho}} e^{\alpha^2}\, d\alpha\right), \tag{16}$$

dove ρ è la cosiddetta « distanza numerica » legata al polo p dell'espressione integranda (15) dalla relazione

$$\rho = i\,(k_0 - p)\, r.$$

La formula (16) coincide con le formule ottenute con altro metodo da diversi autori (Weyl, van der Pol, Fok).

*) Franck, Mises, *Differential and Integral Equations of Physics Mathematical*, vol. II, 1937.

Complemento I

METODO ALLE DIFFERENZE FINITE *)

§ 1. Nozioni fondamentali

Abbiamo appreso i metodi analitici di soluzione delle equazioni alle derivate parziali. Tuttavia la rappresentazione esplicita della soluzione sotto forma di serie o integrale non è sempre possibile.

Consideriamo, ad esempio, l'equazione della conduzione termica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Il metodo di separazione delle variabili è applicabile nel solo caso in cui $k(x, t) = k_1(x)\, k_2(t)$. Ma spesso si incontrano problemi in cui il coefficiente di conduzione termica non è rappresentabile in questa forma o, persino, dipende dalla temperatura (equazione della conduzione termica quasi-lineare). Sono eccezionali i casi in cui è possibile rappresentare le soluzioni delle equazioni non lineari in forma analitica.

È universalmente noto il metodo delle differenze finite (o metodo delle reti) che consente di risolvere in maniera approssimata le equazioni differenziali ed è applicabile a una larga classe di equazioni della fisica matematica.

Il metodo delle differenze finite consiste in quanto segue. Il dominio di variazione continua degli argomenti (di x e t, ad esempio) viene sostituito con un insieme di punti (nodi) finito (discreto), detto rete; in luogo di funzioni ad argomento continuo si considerano funzioni ad argomento discreto, definite nei nodi della rete e dette funzioni reticolari. Le derivate che figurano nell'equazione differenziale vengono sostituite (approssimate) da rapporti di differenze corrispondenti; in questo caso, in luogo dell'equazione differenziale si considera un sistema di equazioni algebriche (equazioni alle differenze). Le condizioni iniziali e ai limiti vengono sostituite anch'esse da condizioni iniziali e ai limiti per la funzione reticolare.

È naturale chiedere che il problema alle differenze coi limiti così ottenuto sia solubile e che la sua soluzione all'aumentare del numero N di nodi della rete si avvicini (converga) alla soluzione

*) Si veda A. A. Samarskij, *Introduzione alla teoria degli schemi di differenza*, Nauka, Mosca, 1971 (ed. russa).

del problema iniziale per l'equazione differenziale. Più avanti su esempi elementari verranno illustrate le nozioni di approssimazione, convergenza, precisione e stabilità.

1. Reti e funzioni reticolari. Consideriamo alcuni esempi di reti elementari.

Supponiamo che il dominio di variazione dell'argomento x sia l'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$. Dividiamo questo intervallo con i punti $x_i = ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, N$; $h > 0$) in N parti uguali di lunghezza $h = l/N$ ciascuna. L'insieme dei punti $x_i = ih$, dove $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, si chiama rete di differenza sull'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$ e si indica con $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, e il numero h, ossia la distanza fra i punti (nodi) della rete $\bar{\omega}_h$, si dice passo della rete.

L'intervallo $[0, l]$ si può dividere in N parti introducendo i punti arbitrari $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < l$. Allora si ottiene la rete $\bar{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ di passo $h_i = x_i - x_{i-1}$ che dipende dall'indice i del nodo x_i. Se $h_i \neq h_{i+1}$ per almeno un indice i, allora la rete $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_h^*$ si dice non uniforme. Se $h_i =$ costante $= h = l/N$ per tutti gli $i = 1, 2, \ldots, N$, si ottiene la rete uniforme costruita sopra.

Sulla retta infinita $-\infty < x < \infty$ si può considerare la rete $\omega_{h,x} = \{x + ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ avente origine in qualsiasi punto x e avente un numero infinito di nodi.

La funzione $y_i = y(x_i)$ dell'argomento discreto x_i ($i = 0, 1, \ldots, N$) si chiama funzione reticolare definita sulla rete $\bar{\omega}_h$.

A ogni funzione continua $f(x)$ si può mettere in corrispondenza la funzione reticolare f_i^h ponendo, ad esempio, $f_i^h = f(x_i)$. Ma in alcuni casi è più comodo stabilire questa corrispondenza con altri metodi.

Supponiamo che il dominio di variazione degli argomenti (x, t) sia il rettangolo $\bar{R} = (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T)$. Costruiamo sull'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$ la rete $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N\}$ di passo $h = 1/N$ e la rete $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, N_0\}$ di passo $\tau = T/N_0$ sull'intervallo $0 \leqslant t \leqslant T$. L'insieme dei nodi (x_i, t_j) di coordinate $x_i = ih$ e $t_j = j\tau$ si chiama rete nel rettangolo $\bar{R}$ e si indica con $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \ldots, N, j = 0, 1, \ldots, N_0\}$. Questa rete è uniforme in ciascuna variabile x e t. Se almeno una delle reti $\bar{\omega}_h$ o $\bar{\omega}_\tau$ è non uniforme, allora la rete $\bar{\omega}_{h\tau}$ si dice non uniforme. La rete $\bar{\omega}_{h\tau}$ è composta, evidentemente, dai punti di intersezione delle rette $x = x_i$ ($i = 0, 1, \ldots, N$) e delle rette $t = t_j$ ($j = 0, 1, \ldots, N_0$).

Sia y una funzione reticolare data su $\bar{\omega}_{h\tau}$. Indicheremo con $y_i^j = y(x_i, t_j)$ il valore della funzione reticolare y nel nodo (x_i, t_j) della rete $\bar{\omega}_{h\tau}$.

a funzione continua $u(x, t)$, dove $(x,$ è un punto appar-
al rettangolo $\bar{R}$, metteremo in corri ndenza la funzione
are $u_i^j = u_{i,h,\tau}^j = u(x_i, t_j)$.
o possibili altri procedimenti per s dilire questa corri-
nza, sui quali non ci soffermiamo q

Approssimazione degli operatori dif nziali elementari.

peratore L_h che trasforma la funzione colare y nella fun-
eticolare $Y = L_h y$ si dice reticolare o differenza. Un'ope-
differenziale L dato nella classe delle izioni ad argomento
o può essere sostituito (approssimat da un operatore di
nza L_h dato sulle funzioni reticolari a tal fine ciascuna
a va sostituita con un rapporto di fferenza (da cui il
« operatore di differenza ») contenen i valori della fun-
eticolare in più nodi della rete. Vedi o come si fa questo
derivate prime e seconde delle funz . Sup i di una variabile.
$\omega_h = \{x_i = ih\}$ la rete di passo h su tro ne ntervallo $0 \leqslant x \leqslant$
onsideriamo la derivata prima $Lv =$ go l'a ella funzione $v(x)$.
un'infinità di procedimenti che con capit tono di sostituirla
'espressione alle differenze. Le più sem ci sono sostituzioni

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h} = L_h^- v_i$$

l'adiac
derivata di differenza sinistra o rap to di differenza si-
e

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} = L_h^+ v_i$$

ta di differenza destra, oppure L_h^0 $= \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$, deri-
li differenza centrale.
i $v_i = v(x_i)$ e il segno $\sim$ indica corr ondenza o approssi-
ne. Sostituendo $Lv = v'$ con l'espr one alle differenze
si ha lo scarto $L_h^{\pm} v_i - (Lv)_i = \psi_i^h$, d tame errore di approssi-
ne dell'operatore L con l'operatore d ifferenza L_h. È na-
chiedere che per $h \to 0$ questo errore da a zero. Per valu-
ψ_i^h si deve supporre che $v(x)$ sia un unzione derivabile.
o che $v(x)$ appartiene alla classe (spa) $C^{(m)}[0, 1]$ ($v(x) \in$
$[0, 1]$) di funzioni date nell'int allo $0 \leqslant x \leqslant 1$ se
a m derivate continue nell'intervallo $\leqslant x \leqslant 1$. Per $m = 0$
amo la classe $C^{(0)}[0, 1]$ delle funzi k continue per $0 \leqslant$
$\leqslant 1$.
a $v(x) \in C^{(m)}[0, 1]$, dove $m \geqslant 2$. Sv ppiamo la funzione
nell'intorno del punto $x = x_i$:

$$v = v_i \pm hv_i' + O(h^2)$$

oliamo $\psi_i^h = L_h^- v_i - v_i' = O(h)$, $\psi_i^h =$ $= v_i - v_i' = O(h)$.

Diremo che l'operatore di differenza L_h: 1) approssima l'operatore differenziale L sulla rete $\bar{\omega}_h$ se $\max\limits_{\bar{\omega}_h} |\psi_i^h| = \max\limits_{\bar{\omega}_h} |L_h v_i - (Lv)_i|$, dove $v(x)$ è una funzione sufficientemente derivabile e tendente a zero per $h \to 0$; 2) approssima L all'ordine n ($n > 0$) se $\max\limits_{\bar{\omega}_h} |\psi_i^h| = O(h^n)$ (oppure $\max\limits_{\bar{\omega}_h} |\psi_i^h| \leqslant Mh^n$, dove M è una costante positiva indipendente da h).

Considerando la formula di $L_h^{\pm}$, vediamo che $L_h^- v_i$ e $L_h^+ v_i$ approssimano $Lv = v'$ al primo ordine per $v \in C^{(m)}$, dove $m \geqslant 2$. All'aumentare di m l'ordine dell'approssimazione non cambia.

L'espressione di $L_h^- v_i$ contiene valori di v in due nodi della rete: $x = x_i$ e $x = x_{i-1}$. Si dice che L_h^- è un operatore a due punti ossia un operatore del primo ordine.

L'insieme dei nodi, in cui i valori della funzione reticolare figurano nell'espressione $L_h v_i$, si chiama campione dell'operatore L_h nel punto x_i. È evidente che il campione dell'operatore L_h^- è composto di due nodi: x_i e x_{i-1}, e quello dell'operatore L_h^+ dei nodi x_i e x_{i+1}.

Consideriamo a titolo di esempio un operatore a tre punti definito sul campione x_{i-1}, x_i, x_{i+1}:

$$L_h^{(\sigma)} v_i = \sigma L_h^- v_i + (1-\sigma) L_h^- v_i = \frac{\sigma v_{i+1} + (1-2\sigma) v_i - (1-\sigma) v_{i-1}}{h}, \qquad (2)$$

dove σ è un numero qualsiasi. In particolare, per $\sigma = 1/2$ otteniamo la derivata di differenza centrale $L_h^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$ la quale, come è facile mostrare, per $v(x) \in C^{(3)}[0, 1]$ approssima $v'(x)$ al secondo ordine.

Nel seguito useremo le notazioni

$$v_{\bar{x}, i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \quad v_{x, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v_{\overset{\circ}{x}, i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}(v_{\bar{x}, i} + v_{x, i}). \qquad (3)$$

Nei casi in cui l'indice i del nodo non ha nessun valore, l'ometteremo e scriveremo $v_{\bar{x}}$, v_x, $v_{\overset{\circ}{x}}$.

Consideriamo ora la derivata seconda $Lv = v''$. È evidente che non la si può approssimare su un campione a due punti. Ricorriamo a un campione a tre punti composto dai nodi x_{i-1}, x_i, x_{i+1} e consideriamo l'operatore di differenza

$$L_h v_i = v_{\bar{x}x, i} = \frac{1}{h}(v_{x, i} - v_{\bar{x}, i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \qquad (4)$$

Se $v \in C^{(m)}[0, 1]$, $m \geqslant 4$, allora si può scrivere

$$v_{i\pm1} = v_i \pm hv_i' + \frac{h^2}{2} v_i'' \pm \frac{h^3}{6} v_i''' + \frac{h^4}{24} v_i^{(IV)} + o(h^4), \qquad (5)$$

Finora abbiamo valutato l'errore di approssimazione $\psi = L_h v - Lv$ per l'operatore L_h (o $L_{h\tau}$) come $\max_{\omega_h} |\psi|$, cioè « in norma » *)

$$\|\psi\|_0 = \max_{x \in \omega_h} |\psi(x)|. \tag{13}$$

Per valutare la funzione reticolare ψ si può ricorrere ad altre norme, per esempio, a

$$\|\psi\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} h\psi_i^2\Big)^{1/2}, \qquad \|\psi\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} h\,|\psi_i| \text{ ecc.} \tag{14}$$

Sia $\|\psi\|$ una norma per le funzioni ψ date sulla rete ω_h. Nel seguito diremo che l'operatore di differenza L_h: 1) approssima l'operatore differenziale L nella norma $\|\cdot\|$ se $\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| \to 0$ per $h \to 0$; 2) approssima L con l'ordine n ($n > 0$), cioè L_h ha l'n-esimo ordine d'approssimazione, se $\|\psi\| = O(h^n)$ oppure $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, dove M = costante > 0 non dipende da h.

Se v è una funzione sufficientemente liscia e $\bar{\omega}_h$ una rete uniforme, allora tutti gli operatori di differenza sopra considerati hanno lo stesso ordine d'approssimazione in ciascuna delle norme (13) e (14).

Altrimenti stanno le cose nel caso di una rete non uniforme.

Sia $\bar{\omega}_h = \{x_i,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}$ una rete non uniforme di passi $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Consideriamo l'operatore $Lv = v''$ e poniamo in corrispondenza l'operatore di differenza

$$L_h v_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right], \tag{15}$$

dove $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$; questo operatore è definito sul campione a tre punti (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).

Calcoliamo l'errore di approssimazione $\psi_i = L_h v_i - Lv_i$. Supponendo che $v(x) \in C^4[0, 1]$ ed effettuando gli sviluppi

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1}v_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2}v_i'' + \frac{1}{6}h_{i+1}^3 v_i''' + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_i v_i' + \frac{1}{2}h_i^2 v_i'' - \frac{1}{6}h_i^3 v_i''' + O(h_i^4),$$

*) A ogni funzione reticolare y si pone in corrispondenza un numero non negativo $\|y\|$, detto norma e rappresentante l'analogo della distanza dall'origine delle coordinate nella geometria usuale. La norma soddisfa le seguenti condizioni: 1) $\|y\| = 0$ soltanto per $y(x) \equiv 0$; 2) $\|cy\| = |c|\,\|y\|$, c = costante; 3) $\|y + z\| \leqslant \|y\| + \|z\|$ (disuguaglianza triangolare). Si veda L. V. Kantorovič e G. P. Akilov, *Analisi funzionale*, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1981.

troviamo che

$$\psi_i = \frac{h_{i+1}-h_i}{3} v_i''' + O(h_i^2 + h_{i+1}^2).$$

Si vede di qui che $\| \psi \|_s = O(h_0)$, $h_0 = \max h_i$ se $\| \cdot \|_s$ per $s = 0, 1, 2$ è una qualunque delle norme (13) e (14). Ne segue che L_h ha il primo ordine d'approssimazione nelle norme $\| \cdot \|_0$, $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$.

Mostriamo che con una norma appropriata, e precisamente

$$\| \psi \|_3 = [\sum_{i=1}^{N-1} h_i (\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k)^2]^{1/2},$$

l'operatore (15) ha in questa norma il secondo ordine d'approssimazione:

$$\| \psi \|_3 = \| L_h v - Lv \|_3 = O(h_0^2).$$

Poiché $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, allora $(h_{i+1} - h_i) v_i''' = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{h_i + h_{i+1}} v_i''' = \frac{1}{2\hbar_i} (h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(h_{i+1}^2)$ e pertanto ψ_i sarà rappresentata nella forma

$$\psi_i = \overset{\circ}{\psi}_i + \psi_i^*, \qquad \psi_i^* = O(h_i^2 + h_{i+1}^2),$$

$$\overset{\circ}{\psi}_i = \frac{1}{\hbar_i} (\eta_{i+1} - \eta_i), \quad \eta_i = \frac{1}{6} h_i^2 v_i''' = O(h_i^2).$$

Calcolando $\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \overset{\circ}{\psi}_k = \sum_{k=1}^{i} (\eta_{k+1} - \eta_k) = \eta_{i+1} - \eta_1$ e tenendo conto che $|\eta| = O(h_0^2)$, otteniamo $\| \overset{\circ}{\psi} \|_3 = O(h_0^2)$ e, di conseguenza,

$$\| \psi \|_3 \leqslant \| \overset{\circ}{\psi} \|_3 + \| \psi^* \|_3 \leqslant M h_0^2,$$

dove M = costante > 0 non dipende dalla rete, vale a dire l'operatore (15) ha il secondo ordine d'approssimazione nella norma $\| \cdot \|_3$ su ogni rete non uniforme $\bar{\omega}_h$. Questo risultato resta valido anche per le norme

$$\| \psi \|_3 = [\sum_{i=1}^{N-1} h_i (\sum_{k=i}^{N-1} \hbar_k \psi_k)^2]^{1/2}, \quad \| \psi \|_{3*} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \Big| \sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k \Big|.$$

È da notare che $\| \psi \|_3 \leqslant \| \psi \|_s$, dove $s = 0, 1, 2$.

Nel seguito useremo le notazioni

$$v_{\bar{x},\, i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x,\, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\hat{x},\, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hbar_i},$$

$$v_{\bar{x}\hat{x},\, i} = \frac{1}{\hbar_i} (v_{x,\, i} - v_{\bar{x},\, i}) = \frac{1}{\hbar_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right]. \tag{16}$$

Se la rete ω_h non è uniforme, allora per approssimare l'operatore (9) si adopera l'operatore (15) in modo che, in luogo degli ope-

ratori (10) e (12), avremo gli operatori di differenza $L_{h\tau}u = u_{\bar{t}} - u_{\bar{x}\hat{x}}$, $L_{h\tau}u = u_{\bar{t}} - u_{\bar{x}\hat{x}}$. In questo caso al posto della (11) avremo la stima

$$\max_{\omega_\tau} \| L_{h\tau}u - Lu \|_3 = O(h_0^2 + \tau), \tag{17}$$

dove il massimo è calcolato su $j = 1, 2, \ldots, N_0$.

La rete $\bar{\omega}_\tau$ può essere anche non uniforme di passo $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, N_0$. In questo caso $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} \sim \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau_{i+1}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} + O(\tau_{j+1})$; allora nella (17) $\tau = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N_0} \tau_j$.

3. Problema alle differenze. Finora ci siamo occupati dell'approssimazione degli operatori differenziali elementari con gli operatori di differenza. Di solito si chiede di risolvere l'equazione differenziale $Lu = -f$ sotto alcune condizioni aggiuntive (iniziali, ai limiti). Pertanto, oltre alla costruzione dell'operatore di differenza corrispondente, si devono approssimare sulla rete il secondo membro e le condizioni aggiuntive dopo di che si può impostare il problema alle differenze, cioè scrivere le equazioni alle differenze (algebriche) e le condizioni aggiuntive sulla rete.

La legge di scrittura delle equazioni alle differenze e delle condizioni aggiuntive si chiama schema di differenze.

Consideriamo alcuni esempi di impostazione del problema alle differenze.

Esempio 1. Al problema di Cauchy per l'equazione del primo ordine

$$u'(x) = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{18}$$

su una rete uniforme corrisponde il problema alle differenze coi limiti

$$y_{i+1} - y_i = h\varphi_i, \quad y_0 = u_0 \quad (\varphi_i = f_i^{(h)} = f(x_i)),$$

che si ottiene per sostituzione dell'operatore u' con l'operatore di differenza

$$L_h u = u_{\bar{x}}.$$

Esempio 2. Al problema ai limiti per l'equazione del secondo ordine

$$u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \tag{19}$$

su una rete uniforme corrisponde il problema ai limiti

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2\varphi_i, \quad y_0 = \mu_1, \; y_N = \mu_2 \quad (\varphi_i = f(x_i)),$$

che si ottiene per sostituzione dell'operatore u'' con l'operatore di differenza $u_{\bar{x}x}$.

Esempio 3. Al problema ai limiti per l'equazione della conduzione termica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{20}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{21}$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{22}$$

sulla rete uniforme $\bar{\omega}_{h\tau} = \{x_i = ih, t_j = j\tau \ (i = 0, 1, \ldots, N, j = 0, 1, \ldots, N_0)\}$ corrisponde il problema alle differenze coi limiti

$$y_i^{j+1} - y_i^j = \gamma (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) + \tau \varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N, \quad j \geqslant 0$$

$$\left(\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \ \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j)\right), \quad y_i^0 = u_0(x_i), \tag{23}$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_N^j = \mu_2(t_j), \tag{24}$$

che si ottiene per sostituzione dell'operatore di conduzione termica con l'operatore di differenza (10). Determiniamo y_i^{j+1}:

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma) y_i^j + \gamma (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau \varphi_i^{j+1}, \tag{25}$$

dove $\gamma = \tau/h^2$.

Essendo dato il valore y_i^j, questa formula consente di definire y_i^{j+1} in tutti i nodi $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ (sullo strato $j + 1$). Poiché per $j = 0$ è data la condizione iniziale $y_i^0 = u(x_i)$, la formula (25) dà la possibilità di definire da uno strato all'altro i valori y_i^{j+1} in tutti i nodi della rete $\omega_{h\tau}$ usando in questo caso le condizioni (24). Lo schema (23) si dice esplicito.

Supponiamo che l'operatore $L_{h\tau}$ sia definito dalla formula (12). Allora l'equazione diventa

$$y_{\bar{t}} = y_{\bar{x}x} + \varphi \quad \text{oppure} \quad \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} =$$

$$= \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^{j+1}. \tag{26}$$

Per determinare y_i^{j+1} sullo strato nuovo $j+1$ otteniamo il sistema di equazioni algebriche

$$\gamma y_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\gamma) y_i^{j+1} + \gamma y_{i+1}^{j+1} = -y_i^j - \tau \varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N. \tag{27}$$

Questo schema si dice implicito o schema di sorpasso.

4. Stabilità. Scritto lo schema delle differenze, cioè formulate l'equazione alle differenze e tutte le condizioni aggiuntive, nasce prima di tutto la questione della risolubilità del sistema di equazioni algebriche ottenuto. Se questo sistema non è risolvibile si deve considerare lo schema inadeguato.

Supponiamo che il problema alle differenze sia risolvibile. Allora è naturale chiedere che per una partizione della rete in parti indefinitamente piccole la soluzione del problema alle differenze tenda alla soluzione del problema iniziale per l'equazione differenziale (cioè che lo schema sia convergente). In questi ragionamenti supponiamo che il problema alle differenze sia risolto con precisione e che la soluzione possa essere ottenuta con ogni numero di cifre. Praticamente, invece, tutti i calcoli vanno eseguiti con numero finito di cifre e ogni stadio del calcolo ammette errori per eccesso o per difetto. Se piccoli errori di arrotondamento commessi in uno stadio intermedio del processo di calcolo conducono a serie alterazioni della soluzione quando la rete si infittisce, tale schema si dice instabile e va scartato come inapplicabile agli usi pratici.

Gli errori commessi nei calcoli si possono considerare come una perturbazione dei dati iniziali o del secondo membro dell'equazione. Ne consegue che ad ogni schema si deve chiedere che la soluzione del problema alle differenze vari poco per una piccola variazione dei dati di partenza (secondo membro dell'equazione, condizioni ai limiti e iniziali) o, in altre parole, che la soluzione dipenda con continuità dai dati di partenza per una partizione della rete in parti indefinitamente piccole. Se questa condizione è soddisfatta lo schema si dice stabile; in caso contrario lo schema è instabile. Diamo alcuni esempi di schemi instabili e stabili.

Esempio 4. Schema stabile. Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0, \tag{28}$$

avente la soluzione $u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$ e sostituiamolo con lo schema di differenze

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -\alpha y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad y_0 = u_0.$$

Dalle equazioni alle differenze ricaviamo $y_i(1 + \alpha h) = y_{i-1}$ oppure $y_i = s y_{i-1} = s^i y_0$, dove $s = \frac{1}{1+\alpha h} < 1$. Trasformiamo l'espressione di s:

$$\ln s = -\ln(1 + \alpha h) = -\alpha h + O(h^2) = -h(\alpha + O(h)),$$

ossia

$$s = e^{-h(\alpha + O(h))}.$$

Consideriamo un punto qualsiasi $\bar{x}$ e, per semplicità, supponiamo che questo punto sia un nodo della successione di reti $\bar{\omega}_h$ per $h \to 0$. Gli indici i corrispondenti a questo punto per la rete

$\bar{\omega}_h$ valgono $i = \bar{x}/h$. È evidente che

$$y_i = s^i y_0 = y_0 e^{-h(\alpha+O(h))\frac{\bar{x}}{h}} = y_0 e^{-\alpha\bar{x}+O(h)} = y_0 [e^{-\alpha\bar{x}} + O(h)],$$

ciò che dimostra la convergenza dello schema di differenze.

Si vede da qui che per una piccola variazione del valore iniziale y_0, anche la soluzione y_i del problema alle differenze varia poco (dipende con continuità da y_0).

Esempio 5. Schema instabile. Consideriamo lo stesso problema (28) dell'esempio 4:

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Approssimiamo l'equazione $u' = -\alpha u$ mediante lo schema di differenze

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1-\sigma)\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \alpha y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

dove σ è un parametro arbitrario non uguale a uno, $\sigma \neq 1$.

Poiché lo schema è a tre punti, i valori iniziali vanno assegnati sia nel punto $x = 0$ che nel punto $x_1 = h$: $y_0 = u_0$, $y_1 = \bar{u}_0$. Dalla (29) segue

$$(\sigma - 1) y_{i+1} - [(2\sigma - 1) + \alpha h] y_i + \sigma y_{i-1} = 0. \tag{30}$$

Cercheremo le soluzioni particolari di questa equazione sotto la forma $y_i = s^i$. Per s, dalla (30), otteniamo l'equazione quadratica

$$(\sigma - 1) s^2 - (2\sigma - 1 + \alpha h) s + \sigma = 0, \tag{31}$$

il cui discriminante vale

$$\Delta = (2\sigma - 1 + \alpha h)^2 - 4\sigma(\sigma - 1) = 1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2,$$

in modo che $\sqrt{\Delta} = 1 + (2\sigma - 1)\alpha h + O(h^2)$. Di qui ricaviamo le radici s_1 e s_2 dell'equazione (31):

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1}(1 + \alpha h + O(h^2)), \quad s_2 = 1 - \alpha h + O(h^2).$$

La soluzione generale dell'equazione (30) ha la forma

$$y_i = A s_1^i + B s_2^i, \tag{32}$$

dove le costanti A e B sono determinate dalle condizioni iniziali per $i = 0$ e $i = 1$. Tenendo conto che $\ln(1 \pm \alpha h + O(h^2)) = \pm h(\alpha + O(h))$, troviamo

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1} e^{h(\alpha+O(h))}, \quad s_2 = e^{-h(\alpha+O(h))}.$$

Supponiamo che il punto fisso $\bar{x}$ sia un nodo della rete ω_h in modo che $\bar{x} = ih$. Dalla (32) risulta

$$y_i = A \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)^{\frac{\bar{x}}{h}} e^{\bar{x}(\alpha + O(h))} + Be^{-\bar{x}(\alpha + O(h))}.$$

Si vede di qui che il comportamento della soluzione dipende dal valore del parametro σ. Se $\sigma > 1$, allora $\frac{\sigma}{\sigma - 1} > 1$ e il primo termine, qualunque sia $A \neq 0$, cresce indefinitamente per $h \to 0$.

Il coefficiente A dipende da y_0, y_1, Se per certi valori iniziali si ha $A = 0$, allora per una perturbazione dei dati iniziali piccola a piacere, anche a causa dell'errore di arrotondamento, si ottiene $A \neq 0$ e la soluzione corrispondente crescerà indefinitamente per $h \to 0$.

Quindi, per $\sigma > 1$ lo schema (29) è instabile e inadeguato per i calcoli *).

Dagli esempi suindicati risulta che, se lo schema è stabile, variazioni piccole dei dati iniziali o del secondo membro dell'equazione implicano piccole variazioni della soluzione del problema alle differenze; se, invece, lo schema è instabile, variazioni piccole dei dati iniziali e del secondo membro possono condurre, su una rete sufficientemente minuta, a variazioni della soluzione grandi a piacere. Per questo lo schema instabile è divergente.

Si chieda di trovare la soluzione y^h di un problema alle differenze sulla rete ω_h di passo h, soddisfacente a un'equazione alle differenze con secondo membro φ dato e relazioni complementari (condizioni ai limiti e iniziali, ad esempio) assegnate nei nodi di frontiera della rete. Il secondo membro dell'equazione e le funzioni note che figurano nelle condizioni aggiuntive si chiamano dati di partenza. La soluzione del problema alle differenze dipende da questi dati e dal parametro h, il passo della rete. Variando h, otteniamo una successione $\{y^h\}$ di soluzioni del problema in esame.

Si dice che il problema alle differenze è impostato correttamente (cioè lo schema è corretto) se la sua soluzione y^h per ogni $h \leqslant h_0$ sufficientemente piccolo

1) esiste per dati di partenza arbitrari;

2) dipende con continuità dai dati di partenza e questa dipendenza è uniforme relativamente al passo h.

La proprietà di dipendenza continua della soluzione del problema alle differenze dai dati di partenza si dice stabilità del problema (schema) alle differenze.

La soluzione y^h del problema alle differenze viene considerata non per un valore fissato di h, ma per ogni $h \leqslant h_0$, cioè per ogni

*) Per $\sigma = 0{,}5$ lo schema (29) è ugualmente instabile.

successione di reti sufficientemente minute. La dipendenza di y^h dai dati di partenza, uniforme relativamente ad h, significa che la proprietà di dipendenza continua si conserva per $h \to 0$. In altre parole, se la soluzione è valutata nella norma $\| \cdot \|_{(1)}$ e i dati di partenza, ad esempio il secondo membro φ, nella norma $\| \cdot \|_{(2)}$, allora la stabilità (uniforme relativamente ad h) dello schema rispetto al secondo membro significa l'esistenza di una costante $M > 0$ indipendente da h tale che

$$\| y^h \|_{(1)} \leqslant M \| \varphi \|_{(2)} \text{ per ogni } h \leqslant h_0.$$

La suddetta definizione di correttezza dello schema di differenze è analoga alla definizione di correttezza del problema per un'equazione differenziale, che abbiamo incontrato più di una volta nel presente Corso. La distinzione fra queste due definizioni consiste nel chiedere che la soluzione del problema alle differenze sia stabile uniformemente relativamente ad h.

§ 2. Schemi di differenze per l'equazione della conduzione termica

1. Schemi per l'equazione a coefficienti costanti. Consideriamo il primo problema ai limiti per l'equazione della conduzione termica:

trovare una funzione $u = u(x, t)$ *che sia continua nel rettangolo* $\bar{R}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *e soddisfi le condizioni*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Introduciamo in $\bar{R}$ la rete descritta nel § 1: $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0, 1, \ldots, N,\ j = 0, 1, \ldots, N_0\}$ di passo $h = 1/N$ e $\tau = T/N_0$. Effettuando la sostituzione

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \sim (u_{\bar{x}x})_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} \sim \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = u_{\bar{t}}^{j+1}, \quad f \sim \varphi$$

ed introducendo un parametro reale qualsiasi σ (peso dello strato superiore $t = t_{j+1}$, otteniamo la famiglia a un parametro di schemi

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \varphi_i^{j+1}, \tag{2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, N_0, \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1,$$

dove $\Lambda y_h = y_{\bar{x}x,\, i}$.

Lo schema (2) è definito su un campione a sei punti composto dai nodi (x_{i+s}, t_{j+k}) $(s = -1, 0, 1; k = 0, 1)$ disposti a due strati $t = t_j$ e $t = t_{j+1}$ (fig. 85, *a*). Pertanto lo schema (2) spesso si chiama schema a sei punti a due strati o schema a pesi.

Poiché nello schema (2) figura il parametro arbitrario σ, di fatto non consideriamo uno schema, bensì una famiglia a un parametro di schemi. Nel seguito verrà mostrato che il parametro σ consente di dirigere la stabilità e la precisione dello schema (2). In quanto lo schema (2) si scrive allo stesso modo in tutti i nodi interni (x_i, t_j) della rete $\omega_{h\tau}$ (per $1 < i < N$, $j > 0$), gli indici i, j si possono omettere e usare notazioni senza indici, ponendo

$$y = y_i^{j+1}, \quad \check{y} = y_i^j, \quad y_{\overline{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad \varphi = \varphi_i^{j+1}.$$

In queste notazioni riscriviamo lo schema (2) nella forma

$$y_{\overline{t}} = \Lambda(\sigma y + (1 - \sigma)\check{y}) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}. \tag{3}$$

Aggiungendo le condizioni iniziali e ai limiti

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h,$$
$$y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{4}$$

otteniamo il problema alle differenze (3)-(4) corrispondente al problema (1). Si chiede di trovare una funzione reticolare $y(x, t)$ definita per $(x, t) \in \overline{\omega}_{h\tau}$ e soddisfacente l'equazione (3) nei nodi interni della rete $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), 0 < i < N, 0 < j \leqslant N_0\}$, e le condizioni (4) nei nodi di frontiera $\gamma_{h\tau} = \{(x_i, t_j), i = 0, 0 \leqslant j \leqslant N_0; i = N, 0 \leqslant j \leqslant N_0; j = 0, 0 \leqslant i \leqslant N\}$ della rete $\overline{\omega}_{h\tau}$.

Per determinare $y = y^{j+1}$ dalle (3) e (4) otteniamo il problema

$$\sigma\gamma y_{i-1} - (1 + 2\sigma\gamma) y_i + \sigma\gamma y_{i+1} = -F_i, \quad 0 < i < N$$
$$y_0 = u_1, \quad y_N = u_2,$$
$$F_i = (1 - 2\gamma(1 - \sigma))\check{y}_i + (1 - \sigma)\gamma(\check{y}_{i-1} + \check{y}_{i+1}) + \tau\varphi_i, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

I valori $\check{y} = y_i^j$ e, di conseguenza, F_i sullo strato inferiore (per $t = t_j$) sono noti. Il calcolo passa dallo strato j a quello $j + 1$, a cominciare da $j = 0$ per cui è dato $y^0 = u_0(x)$.

Per $\sigma = 0$ si ottiene uno schema esplicito (si veda il § 1, n. 2) per il quale $y_i = F_i$, vale a dire i valori di y vengono determinati indipendentemente in ciascun nodo della rete ω_h. Per $\sigma \neq 0$ otteniamo un sistema di equazioni algebriche d'ordine $N - 1$ (tali schemi sono detti impliciti) che consente di determinare y. Il metodo di soluzione di questo sistema, che tiene conto della forma speciale (matrice a tre diagonali in cui sono non nulli solo gli elementi della diagonale principale e delle diagonali vicine) sarà indicato nel n. 10.

2. Errore di approssimazione. Sia $y = y(x, t)$ la soluzione del problema (3)-(4) e $u = u(x, t)$ la soluzione del problema iniziale (1). Consideriamo la differenza $z_i^{j+1} = y_i^{j+1} - u(x_i, t_{j+1})$ oppure $z = y - u$ e sostituiamo $y = z + u$ nell'equazione (3). Supponendo che $u = u(x, t)$ sia una funzione data, troviamo

$$\left.\begin{aligned} &z_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma z + (1-\sigma)\check{z}) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ &z(x, 0) = 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dove

$$\psi = \Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) + \varphi - u_{\bar{t}} \tag{6}$$

rappresenta l'errore con cui la soluzione $u = u(x, t)$ dell'equazione (1) verifica l'equazione alle differenze (3). La funzione reticolare $\psi = \psi(x, t, u; h, \tau, \sigma)$ determinata dalla formula (6) è detta errore di approssimazione dell'equazione differenziale (1) mediante l'equazione alle differenze (3) nella classe delle soluzioni $u = u(x, t)$ dell'equazione (1), o anche « errore di approssimazione della soluzione dell'equazione (1) con lo schema (3) ».

Per valutare il valore della funzione ψ ricorriamo a diverse norme (per $t \in \omega_\tau$ fissato), per esempio, a

$$\| \psi \|_c = \max_{1 \le i \le N} |\psi_i|, \tag{7}$$

$$\| \psi \|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} h \psi_i^2 \Big)^{1/2}, \tag{8}$$

e anche alle norme

$$\max_{\omega_\tau} \| \psi \|_c, \quad \max_{\omega_\tau} \| \psi \|_2, \text{ ecc.} \tag{9}$$

Diremo che lo schema (3) ha nella norma $\| \psi \|$ l'm-esimo ordine di approssimazione in h e l'n-esimo in τ sulla soluzione $u = u(x, t)$ (cioè approssima l'equazione (1) con ordine (m, n)) o, emplicemente, ha approssimazione $O(h)^m + O(\tau^n)$ se

$$\| \psi \| \le M (h^m + \tau^n) \qquad (m > 0, \ n > 0), \tag{10}$$

dove M è una costante positiva indipendente da h e τ e $\| \cdot \|$ una norma (la (7) o l'(8), ad esempio).

Per stabilire l'ordine di ψ rispetto ad h e τ, sviluppiamo $u = u(x, t)$ in potenze di h e τ nell'intorno del punto $(x_i, \bar{t} = t_{j+1/2} = t_j + 0{,}5\tau)$. Supponiamo che nel corso dell'esposizione $u(x, t)$ abbia il numero richiesto di derivate. Ponendo $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$, ecc., abbiamo

$u = u(x_i, t_{j+1})$,

$\overline{u} = u(x_i,\ t_{j+1/2})$, da cui $\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(IV)} + \ldots$ (si veda il § 1, n. 1),

$$u = \overline{u} + 0{,}5\tau\dot{\overline{u}} + \frac{\tau^2}{8}\ddot{\overline{u}} + O(\tau^3), \quad \check{u} = \overline{u} - 0{,}5\tau\dot{\overline{u}} + \frac{\tau^2}{8}\ddot{\overline{u}} + O(\tau^3),$$

$$u_{\bar{t}} = \dot{\overline{u}} + O(\tau^2).$$

Sfruttando gli svluppi di u, $\check{u}$ e Λu, troviamo

$$\sigma u + (1-\sigma)\check{u} = \overline{u} + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{\overline{u}} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) = \sigma u'' + (1-\sigma)\check{u}'' + O(h^2) =$$

$$= \overline{u}'' + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{\overline{u}}'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Sostituendo le espressioni ottenute nella formula (6), avremo

$$\psi = \overline{u}'' - \dot{\overline{u}} + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{\overline{u}}'' + \varphi + O(h^2 + \tau^2).$$

Poiché u è una soluzione dell'equazione (1), allora $\overline{u}'' - \dot{\overline{u}} = -\overline{f}$ e

$$\psi = \varphi - \overline{f} + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + O(h^2 + \tau^2)\ *).$$

Scegliendo φ in modo tale che $\varphi = \overline{f} + O(h^2 + \tau^2)$, per esempio $\varphi = \overline{f}$ se $f \in C^{(0)}$, otteniamo

$$\psi = (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + O(h^2 + \tau^2). \tag{11}$$

Indichiamo con $C_n^m(\overline{R})$ la classe delle funzioni aventi m derivate rispetto a x e n derivate rispetto a t, continue in $\overline{R}$. Da quanto detto risulta con chiarezza che

$$\|\psi\|_C = O(h^2 + \tau) \quad \text{per} \quad \sigma \neq 0{,}5 \text{ e } u \in C_2^{(4)}, \tag{12}$$

$$\|\psi\|_C = O(h^2 + \tau^2) \quad \text{per} \quad \sigma = 0{,}5 \text{ e } u \in C_3^{(4)}. \tag{13}$$

Considerando il parametro uguale a

$$\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \tag{14}$$

e il secondo membro

$$\varphi = \overline{f} + \frac{h^2}{12}\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}, \tag{15}$$

otteniamo uno schema d'ordine di approssimazione elevato $\psi = O(h^4 + \tau^2)$ se $u \in C_3^{(6)}$, $f \in C_1^{(2)}$ **).

*) Poiché $\overline{u}'' + \overline{f} - \dot{\overline{u}} = 0$, la formula (6) si potrebbe scrivere come segue: $\psi = [\Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) - \overline{u}''] + (\varphi - \overline{f}) - (u_{\bar{t}} - \dot{\overline{u}})$.

**) Per i nn. 1, 2 si veda V. K. Sauljev, *Integrazione delle equazioni paraboliche con il metodo delle reti*, Fizmatgiz, Mosca, 1960 (ed. russa).

3. Identità energetica. Per precisare i valori di σ per cui lo schema (2) è stabile relativamente ai dati iniziali e al secondo membro dell'equazione, valutiamo in funzioni di φ e u_0 la soluzione del problema alle differenze (3)-(4) sotto condizioni ai limiti omogenee ($u_1 = u_2 \equiv 0$).

A tal fine ricorriamo al metodo delle relazioni integrali o energetiche il quale, senza modifiche sostanziali, si applica al caso delle equazioni a coefficienti costanti. Avremo bisogno di alcuni dati preliminari. Siano $v(x) = v_i$ e $z(x) = z_i$ due funzioni arbitrarie date sulla rete $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih\}$.

Sussistono le seguenti formule:

1. *Formula della derivazione alle differenze del prodotto*

$$(vz)_{x,i} = v_i z_{x,i} + v_{x,i} z_{i+1}. \tag{16}$$

Infatti, $v_i z_{x,i} + v_{x,i} z_{i+1} = [v_i (z_{i+1} - z_i) + (v_{i+1} - v_i) z_{i+1}]/h = (v_{i+1} z_{i+1} - v_i z_i)/h = (vz)_{x,i}$. La formula (16) rappresenta l'analogo alle differenze della formula di derivazione del prodotto $(uv)' = u'v + uv'$.

2. *Formula di somma per parti*

$$(v, z_x) = -(z, v_{\bar{x}}] + (vz)_N - v_0 z_1, \tag{17}$$

dove

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i h, \quad (v, w] = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i h, \tag{18}$$

è l'analogo alle differenze della formula di integrazione per parti.

Ricaviamo dalla (16) $v_i z_{x,i} = (vz)_{x,i} - v_{x,i} z_{i+1}$ e trasformiamo la somma

$$(v, z_x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i z_{x,\,i} h = \sum_{i=1}^{N-1} [(vz)_{i+1} - (vz)_i] -$$

$$- \sum_{i=1}^{N-1} v_{x,\,i}\, z_{i+1}\, h = (vz)_N - v_1 z_1 - \sum_{i=2}^{N} v_{\bar{x},\,i}\, z_i h \quad (v_{x,\,i} = v_{\bar{x},\,i+1}).$$

Tenendo poi conto che $v_1 = v_0 + (v_1 - v_0) = v_0 + h v_{\bar{x},\,1}$, otteniamo

$$(v, z_x) = (vz)_N - (v_0 + h v_{\bar{x},\,1})\, z_1 -$$

$$- \sum_{i=2}^{N} z_i v_{\bar{x},\,i}\, h = (vz)_N - v_0 z_1 - (z, v_{\bar{x}}].$$

3. *Prima formula alle differenze di Green*

$$(v, (a y_{\bar{x}})_x) = -(a y_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] + a y_{\bar{x}} v|_N - v_0 a_1 y_{\bar{x}}|_1. \tag{19}$$

Ponendo infatti nella (17) $z = ay_{\bar{x}}$, otteniamo immediatamente la (19). Dalla formula (19), in particolare, segue

$$(v, (ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] \quad \text{se} \quad y = v = 0 \quad \text{per } i = 0, N; \tag{20}$$

$$(y, (ay_{\bar{x}})_x) = -(a, (y_{\bar{x}})^2] \quad \text{se} \quad y_0 = y_N = 0. \tag{21}$$

La formula (19) rappresenta l'analogo alle differenze della formula di Green

$$\int_0^1 u\,(kw')'\,dx = kuw'\,|_0^1 - \int_0^1 ku'w'dx.$$

4. *Seconda formula alle differenze di Green*

$$(v, (ay_{\bar{x}})_x) - (y, (av_{\bar{x}})_x) = a_N\,(vy_{\bar{x}} - yv_{\bar{x}})_N - a_1\,(vy_x - yv_x)_0 \tag{22}$$

si ottiene dalla (19) scambiando di posto y e v e sottraendo dalla (19) l'uguaglianza così ottenuta.

Avremo bisogno anche della disuguaglianza

$$|(y, z)^i| \leqslant \sqrt{(y, y)^i\,(z, z)^i}, \tag{23}$$

dove

$$(y, z)^i = \sum_{k=1}^{i} y_k z_k h, \quad i = 2, 3, \ldots, N. \tag{24}$$

Consideriamo la somma

$$y + \lambda z,\ y + \lambda z)^i = (y, y)^i + 2\lambda\,(y, z)^i + \lambda^2\,(z, z)^i \geqslant 0,$$

dove λ è un numero reale qualsiasi.

Se $(z, z)^i \neq 0$, allora $(y + \lambda z, y + \lambda z)^i \geqslant 0$ per ogni λ sotto la sola condizione che il discriminante del trinomio quadratico $[(y, z)^i]^2 - (y, y)^i \cdot (z, z)^i \leqslant 0$. Di qui deriva la disuguaglianza (23). In particolare, per $i = N$ si ottiene la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij

$$|(y, z)| \leqslant \| y \| \cdot \| z \|, \tag{25}$$

dove $(,)$ è data dalla formula (18) e la norma $\| y \|$ della funzione reticolare $y = y_i$ vale

$$\| y \| = \sqrt{(y, y)} = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Dimostriamo le seguenti disuguaglianze:

$$\| z \| \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}] \quad \text{se } z_0 = z_N = 0, \tag{27}$$

$$\| z \|_c \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}] \quad \text{se } z_0 = z_N = 0, \tag{28}$$

dove $\| z \|_c = \max\limits_{0<i<N} | z_i |$, $\| z \|$ si esprime mediante la formula (26) e

$$\| z_{\bar{x}}] = (z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}]^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{N} z^2_{\bar{x},\, i}\, h\Big)^{1/2}.$$

Osservando che $z_i^2 = \Big(\sum\limits_{k=1}^{i} z_{\bar{x},\, k} h\Big)^2 = \Big(\sum\limits_{k=i+1}^{N} z_{\bar{x},\, k} h\Big)^2$, rappresentiamo z_i^2 nella forma

$$z_i^2 = (1 - x_i) \Big(\sum_{k=1}^{i} z_{\bar{x},\, k}\, h\Big)^2 + x_i \Big(\sum_{k=i+1}^{N} z_{\bar{x},\, k}\, h\Big)^2.$$

Applicando la disuguaglianza (23) a ciascuna delle somme, per esempio,

$$\Big(\sum_{k=1}^{i} z_{\bar{x},\, k} h\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x},\, k})^2 h \cdot \sum_{k=i}^{i} 1^2 h = x_i \sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x},\, k})^2 h,$$

otteniamo

$$z_i^2 \leqslant x_i (1 - x_i) \Big(\sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x},\, k})^2 h + \sum_{k=i+1}^{N} (z_{\bar{x},\, k})^2 h\Big) = x_i (1 - x_i) \| z_{\bar{x}}]]^2. \quad (29)$$

Poiché $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} x(1-x) = \frac{1}{4}$, ne segue che $\| z \|_c \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]]$.

Moltiplicando la (29) per h e sommando rispetto a $i = 1, 2, \ldots, N-1$, avremo $\| z \|^2 \leqslant \frac{1}{4} \| z_{\bar{x}}]]^2$ ossia $\| z \| \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]]$ poiché $\sum\limits_{i=1}^{N-1} ih = (N-1)h < 1$.

Sia $\Lambda v = (a v_{\bar{x}})_x$, $a \geqslant c_1 > 0$. Dalle (21) e (27) segue la stima

$$-(\Lambda v,\ v) = -((a v_{\bar{x}})_x,\ v) \geqslant 4 c_1 \| v \|^2. \quad (30)$$

Infatti, $-(\Lambda v,\ v) = (a,\ (v_{\bar{x}})^2] \geqslant c_1 \| v_{\bar{x}}]]^2$ in virtù della (21). Utilizzando poi la disuguaglianza (27) otteniamo la (30).

Indichiamo ancora una disuguaglianza

$$2|ab| \leqslant c_0 a^2 + \frac{1}{c_0} b^2, \quad (31)$$

dove a e b sono numeri dati, c_0 è un numero positivo qualsiasi. Infatti,

$$2|ab| = 2 \left| (a \sqrt{c_0}) \left(\frac{b}{\sqrt{c_0}} \right) \right| \leqslant a \sqrt{c_0})^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c_0}} \right)^2,$$

poiché $2 \mid a_1 b_1 \mid \leqslant a_1^2 + b_1^2$ qualunque siano a_1 e b_1.

Passiamo ora allo studio della stabilità dello schema (3) relativamente ai dati iniziali e al secondo membro dell'equazione.

Scriviamo l'identità energetica corrispondente all'equazione con condizioni al contorno omogenee

$$z_{\bar{t}} = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z(x,\ 0) = z_0(x), \tag{32}$$

dove

$$z^{(\sigma)} = \sigma z + (1-\sigma)\,\check{z}.$$

Moltiplichiamo l'equazione per $2\,\tau z_{\bar{t},\,i} h = 2\,(z_i - \check{z}_i)h$ e sommiamo rispetto a $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$:

$$2\tau \,\|\, z_{\bar{t}} \,\|^2 = 2\tau\,(\Lambda z^{(\sigma)},\ z_{\bar{t}}) + 2\tau\,(\psi,\ z_{\bar{t}}), \quad \Lambda z = z_{\bar{x}x}. \tag{33}$$

Rappresentando $z^{(\sigma)}$ sotto la forma

$$z^{\sigma)} = 0{,}5\,(z+\check{z}) + (\sigma - 0{,}5)\,(z-\check{z}) = 0{,}5\,(z+\check{z}) + (\sigma - 0{,}5)\,\tau z_{\bar{t}}$$

e usando la prima formula di Green (20) per $a=1$, $y = \tau z_{\bar{t}} = z - \check{z}$, $v = z + \check{z}$ e $a=1$, $y = v = z_{\bar{t}}$, abbiamo *)

$$2\tau\,(\Lambda z^{(\sigma)},\ z_{\bar{t}}) = -2\,(\sigma - 0{,}5)\,\tau^2\,(z_{\bar{x}t},\ z_{\bar{x}t}] -$$

$$-(z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}},\ z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}] = -2\,(\sigma - 0{,}5)\,\tau^2 \,\|\, z_{\bar{x}t}\rangle\!]^2 -$$

$$-\,\|\, z_{\bar{x}}\rangle\!]^2 + \|\, \check{z}_{\bar{x}}\rangle\!]^2.$$

Sostituendo questa espressione nella formula (33), otteniamo l'identità energetica

$$2\tau\,[\,\|\, z_{\bar{t}} \,\|^2 + (\sigma - 0{,}5)\,\tau \,\|\, z_{\bar{x}t}\rangle\!]^2] + \|\, z_{\bar{x}}\rangle\!]^2 = \|\, \check{z}_{\bar{x}}\rangle\!]^2 + 2\tau\,(\psi,\ z_{\bar{t}}). \tag{34}$$

È da notare che sussiste la seguente disuguaglianza:

$$\|\, v_{\bar{x}}\rangle\!]^2 \leqslant \frac{4}{l^2} \,\|\, v \,\|^2 \quad \text{se} \quad v_0 = v_N = 0. \tag{35}$$

Infatti, sommando la disuguaglianza

$$v^2_{\bar{x},\,i} = \frac{1}{h^2}\,(v_i - v_{i-1})^2 \leqslant \frac{2}{h^2}\,(v_i^2 + v_{i-1}^2)$$

rispetto a $i = 1, 2, \ldots, N$, otteniamo la (35).

4. Stabilità. Come è stato detto nel § 1, n. 4, la stabilità di uno schema significa dipendenza continua della soluzione del problema alle differenze dai dati di partenza (dalle condizioni iniziali, dal secondo membro dell'equazione e dalle condizioni ai limiti nel caso in esame).

Vediamo per quali valori del parametro σ lo schema (3) è stabile relativamente ai dati iniziali e al secondo membro. A tale

*) $(\Lambda\,(z+\check{z}),\ z-\check{z}) = -(z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}},\ z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}]$, $(\Lambda z_{\bar{t}},\ z_{\bar{t}}) = -\,(z_{\bar{x}t},\ z_{\bar{x}t}]$.

scopo consideriamo il problema (32) con condizioni ai limiti omogenee. Precisiamo la nozione di stabilità.

Supponiamo che la soluzione del problema (32) sia valutata nella norma $\| z \|_{(1)}$ ($\| z \|_{(1)} = \| z \|_c$, $\| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]\!]$, ad esempio) e il secondo membro dell'equazione ψ nella norma $\| \psi \|_{(2)}$ ($\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|_c$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|_2$, ad esempio).

Diremo che *lo schema* (32) (*oppure* (3)-(4)) *è stabile relativamente ai dati iniziali e al secondo membro dell'equazione se per* $h \leqslant h_0$ *e* $\tau \leqslant \tau_0$ *sufficientemente piccoli si verifica la disuguaglianza*

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \| z(x, t) \|_{(1)} \leqslant M_1 \| z(x, 0) \|_{(1)} + M_2 \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \| \psi(x, t) \|_{(2)}, \tag{36}$$

dove M_1 *e* M_2 *sono costanti positive indipendenti da* h *e* τ.

Per la stabilità dello schema (32) è sufficiente che sia soddisfatta una delle condizioni

$$\| z \|_{(1)} \leqslant (1 + c_1 \tau) \| \check{z} \|_{(1)} + c_2 \tau \| \psi \|_{(2)}, \tag{37}$$

o

$$\| z \|^2_{(1)} \leqslant (1 + c_1 \tau) \| \check{z} \|^2_{(1)} + c_2 \tau \| \psi \|^2_{(2)}, \tag{38}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti positive indipendent da h e τ.

Supponiamo infatti che sia soddisfatta la condizione (37) e scriviamola nella forma

$$\| z^j \|_{(1)} \leqslant (1 + c_1 \tau) \| z^{j-1} \|_{(1)} + c_2 \tau \| \psi^j \|_{(2)}, \tag{39}$$

$j = 1, 2, \ldots$

Eliminando successivamente dalla (39) $\| z^{j-1} \|_{(1)}$, $\| z^{j-2} \|_{(2)}$, ... e tenendo conto che $(1 + c_1 \tau)^{j'} \leqslant e^{c_1 t_j}$ per $j' \leqslant j$, otteniamo

$$\| z^j \|_{(1)} \leqslant e^{c_1 t_j} [\| z(x, 0) \|_{(1)} + c_2 \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|_{(2)}]. \tag{40}$$

Ne deriva la disuguaglianza (36) per $M_1 = e^{c_1 T}$, $M_2 = c_2 M_1 T$. Supponendo soddisfatta la condizione (38), con ragionamenti analoghi otteniamo una disuguaglianza della forma (40) nella quale si deve sostituire $\| \cdot \|$ con le espressioni $\| \cdot \|^2$. Come risultato riotteniamo la disuguaglianza (36), dove $M_1 = e^{\frac{1}{2} c_1 T}$ e $M_2 = \sqrt{c_2} M_1$.

Usando l'identità (34) per lo schema (32), stabiliamo una disuguaglianza della forma (36) dalla quale deriverà, in virtù di quanto detto sopra, la stabilità dello schema (3).

Per precisare la questione della stabilità anche relativamente ai dati iniziali, consideriamo il problema (32) per $\psi = 0$ e poniamo $\| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]\!]$.

L'identità (34) per $\psi = 0$ diventa

$$2\tau [\| z_{\bar{t}} \|^2 + (\sigma - 0{,}5) \tau \| z_{\bar{x}t}]\!]^2] + \| z_{\bar{x}}]\!]^2 = \| \check{z}_{\bar{x}}]\!]^2. \tag{41}$$

Sia $\sigma \geqslant 0{,}5$. Allora l'espressione fra parentesi quadra è non negativa e

$$\| z_{\bar{x}}]\!]^2 \leqslant \| \check{z}_{\bar{x}}]\!]^2 \text{ o } \| z^j_{\bar{x}}]\!] \leqslant \| z^{j-1}_{\bar{x}}]\!] \leqslant \| z^0_{\bar{x}}]\!].$$

Ne segue, in virtù della condizione iniziale, $z^0 = z_0(x)$

$$\| z^j \|_{(1)} \leqslant \| z_0 \|_{(1)}, \quad \text{dove} \quad \| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]\!]. \tag{42}$$

Sia $\sigma < 0{,}5$ di modo che $\sigma - 0{,}5 < 0$. Ponendo $z_{\bar{t}} = v$ e usando la formula (35) troviamo

$$\| v \|^2 + (\sigma - 0{,}5)\,\tau \| v_{\bar{x}}]\!]^2 \geqslant \| v \|^2 - (0{,}5 - \sigma)\,\tau \cdot \frac{4}{h^2} \| v \|^2 =$$

$$= \left(1 - (0{,}5 - \sigma)\,\tau \cdot \frac{4}{h^2}\right) \| v \|^2 \geqslant 0$$

per

$$1 - (0{,}5 - \sigma)\,\tau \cdot \frac{4}{h^2} \geqslant 0,$$

cioè per $\sigma \geqslant \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$. Sotto questa condizione l'espressione fra parentesi quadra nella (34) non è negativa e riotteniamo la formula (42).

Quindi, lo schema (32) (così come lo schema (3)) è stabile relativamente ai dati iniziali nella norma $\| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]\!]$ se si verifica la condizione

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0. \tag{43}$$

Consideriamo casi particolari. Se $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, la condizione (43) è sempre soddisfatta e lo schema (32) è stabile per qualsiasi h e τ.

Per uno schema esplicito $\sigma = 0$ e la condizione (43) dà

$$\gamma = \frac{\rho}{h^2} \leqslant \frac{1}{2} \text{ o } \tau \leqslant \frac{1}{2} h^2, \tag{44}$$

vale a dire lo schema esplicito è relativamente stabile, cioè stabile sotto la condizione (44) che lega h e τ. Si può mostrare che per $\gamma \geqslant \frac{1}{2} + c_1 \tau^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, lo schema esplicito è instabile, cioè la condizione $\gamma < \frac{1}{2} + c_1 \tau^\alpha$ è necessaria perché lo schema esplicito sia stabile (c_1 = costante > 0 è una costante arbitraria indipendente da h e τ).

Dall'espressione (43) si vede che uno schema con un ordine elevato di precisione $\left(\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}\right)$ è necessariamente stabile (qualunque siano h e τ) poiché $\sigma_* \geqslant \sigma_0$.

Passiamo ora alla valutazione della stabilità dello schema (32) relativamente al secondo membro dell'equazione. A tale scopo partiremo dall'identità (34). Sussiste il seguente teorema.

Lo schema di differenze (32) *è stabile rispetto ai dati iniziali e al secondo membro dell'equazione per*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2},$$

di modo che per la soluzione z del problema (32) *è valida la valutazione*

$$\| z_{\overline{x}}^{j} \| \leqslant \| z_{0\overline{x}} \| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|^2 \right)^{1/2}. \tag{45}$$

Applicando le disuguaglianze (26) e (31) abbiamo

$$2\tau (\psi, z_{\overline{t}}) \leqslant c_0 \tau \| z_{\overline{t}} \|^2 + \frac{\tau}{c_0} \| \psi \|^2. \tag{46}$$

Se $\sigma \geqslant 1/2$, dalla (34) ricaviamo la disuguaglianza

$$2\tau \| z_{\overline{t}} \|^2 + \| z_{\overline{x}} \|^2 \leqslant \| \check{z}_{\overline{x}} \|^2 + c_0 \tau \| z_{\overline{t}} \|^2 + \frac{\tau}{c_0} \| \psi \|^2.$$

Considerando quindi $c_0 = 2$ avremo

$$\| z_{\overline{x}} \|^2 \leqslant \| \check{z}_{\overline{x}} \|^2 + \frac{1}{2} \tau \| \psi \|^2.$$

Ne segue immediatamente

$$\| z_{\overline{x}}^{j} \|^2 \leqslant \| z_{0\overline{x}} \|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|^2.$$

Siccome $a^2 + b^2 \leqslant (a + b)^2$ per $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$, ciò dimostra il teorema.

Osservazione. Cambiando alquanto i ragionamenti, si può mostrare che il teorema resta valido per $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2$, dove $0 < \varepsilon \leqslant 1$; nell'espressione (45) al posto di $\sqrt{2}$ si deve scrivere $\sqrt{2\varepsilon}$. Il confronto con la (36) mostra che $\| z \|_{(1)} < \| z_{\overline{x}} \|$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|$, $M_1 = 1$, $M_2 = \sqrt{\frac{T}{2\varepsilon}}$.

È facile ottenere la valutazione (36) con $\| z \|_{(1)} = \| z \|$ e $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|$ per $\sigma \geqslant 1/2$.

Limitiamoci alla dimostrazione della stabilità relativamente ai dati iniziali. Poniamo nell'equazione (32) $\psi = 0$, moltiplichiamo per $2\tau z_i^{(\sigma)} h$ e sommiamo rispetto a $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Applicando la formula di Green (20) e l'identità $2\tau (z^{(\sigma)}, z_{\overline{t}}) = (z + \check{z}, z - \check{z}) + 2\tau (\sigma - 0{,}5) \| z_{\overline{t}} \|^2 = \| z \|^2 - \| \check{z} \|^2 + 2\tau (\sigma - 0{,}5) \| z_{\overline{t}} \|^2$, otteniamo $\| z \|^2 + 2\tau^2 (\sigma - 0{,}5) \times \| z_{\overline{t}} \|^2 + 2\tau \| z_{\overline{x}}^{(\sigma)} \|^2 = \| \check{z} \|^2$. Di qui per $\sigma \geqslant 0{,}5$ segue $\| z \|^2 \leqslant \| \check{z} \|^2$ e $\| z^j \| \leqslant \| z_0 \|$.

Questa valutazione è valida anche per $\sigma \geqslant$ (10[illegible]5) con le cond[illegible]
la possibilità di soffermarci sulla dimostrazion[illegible]

Abbiamo dimostrato la stabilità dello $A_i + B_i + D_i, D_i \geqslant$
$\| z_{\bar{x}} \|$ e $\| z \|$ che sono l'analogo alle
$\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{1/2} dx \right)$ e $\left(\int_0^1 u^2 dx \right)^{1/2}$. Ricorre[illegible] mostrato più avanti
ferenze del principio del valore mass[illegible]ovare la soluzione s
uno schema puramente implicito è sta[illegible]bra lineare o i meto[illegible]
forme, cioè [illegible]onomico, nel
[illegible]metodo di fattorizz
della matrice del s
$\| z \|_c \leqslant \| z_0 \|_c$ per $\sigma = 1$ ($\psi = 0$ diag[illegible]nali.
Risulta che lo schema simmetrico a sei pu[illegible]oblem[illegible]a (105)-(106)
so uniformemente stabile qualunque sia[illegible]
$\| z \|_c \leqslant M \| z_0 \|_c$ per $\sigma = 0{,}5$. [illegible], $N - 1$,

Consideriamo uno schema esplicito (σ[illegible]rmina[illegible]re. Sostituend[illegible]
forma [illegible] y_{i-1} [illegible]e e otteniamo [illegible]
$y_i = (1 - 2\gamma)\, \check{y}_i + \gamma (\check{y}_{i-1} + \check{y}_{i+1}) + \tau \varphi_i$. = 0; d[illegible]topo questa o[illegible]
(108):
Se $\gamma \leqslant 1/2$, allora $|y_i| \leqslant (1 - 2\gamma) |\check{y}_i| + [illegible] C_i)\, \beta_{i+1} +$ [illegible]
$+ \tau |\varphi_i| \leqslant \| \check{y} \|_c + \tau \| \varphi \|_c$ poiché $1 -$ [illegible].
$\| y \|_c \leqslant \| \check{y} \|_c + \tau \| \varphi \|_c$ per $\gamma \leqslant 1/2$ e le espressioni fra
guagl[illegible]ianze ricavian
[illegible]$_{-1}$ e [illegible]$_{i+1}$:
$\| y^j \|_c \leqslant \| y_0 \| + \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \varphi^{j'} \|_c$, [illegible]$i =$ [illegible], 2, ..., $N -$ [illegible]
dove $\| y \|_c = \max_{\bar{\omega}_h} | y |$. In tal modo un[illegible] [illegible]
[illegible]$+ \beta_1$ [illegible] con la cond[illegible]
bile uniformemente rispetto ai dati iniz[illegible]
dell'equazione se è soddisfatta la condiz[illegible]

5. Convergenza e precisione. Direm[illegible]
1) la soluzione del problema (3)-(4) le condizioni inizi[illegible]e
$u = u(x, t)$ del problema (1), cioè lo sch[illegible], N.) Per poter usa[illegible]e
per $h \to 0$ e $\tau \to 0$, se $\max_{0 \leqslant t_j \leqslant T} \| y^j$ [illegible]0
e $\tau \to 0$; [illegible]β_N d[illegible]alla condizion[illegible]
2) lo schema (3)-(4) converge con [illegible]y_{N-1} dalle formul[illegible]
$m > 0$, $n > 0$, ossia ha la precisione O [illegible], trovia[illegible]mo [illegible], [illegible]
in h e di ordine n in τ) se per $h \leqslant h_0$ [illegible] [illegible]e
piccoli si ha [illegible]

$$\max_{0 \leqslant t_j \leqslant T} \| y^j - u^j \|_{(1)} \leqslant M (h^m + \tau^n),$$

dove M = costante > 0 non dipende [illegible]

erici d[illegible] calcolo dei reatto
ov, V. [illegible] S. Rjabenkij, *I*
ntgiz, [illegible] 1962 (ed. russa)

Come caratteristica della precisione dello schema (3)-(4) serve $\| z \|_{(1)} = \| y - u \|_{(1)}$, dove $\| \cdot \|_{(1)}$ è una delle norme sopra introdotte. La funzione $z = z(x_i, t_{j+1})$ è la soluzione del problema (5). Poiché $z(x, 0) = 0$, dalla (45) deriva la seguente valutazione per z:

$$\| z_{\overline{x}}^{j} \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{per} \qquad \sigma \geqslant \frac{1}{2}. \tag{50}$$

Tenendo conto della disuguaglianza (28), otteniamo

$$\| z^j \|_c \leqslant \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2}} \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi^{j'} \| = M_2 \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi^{j'} \|. \tag{51}$$

Ne deriva il seguente teorema.

Dalla stabilità relativamente al secondo membro e dall'approssimazione dello schema (3) *segue la convergenza uniforme e, inoltre, l'ordine della precisione coincide con l'ordine dell'approssimazione* *). In altre parole, se lo schema (3) è stabile relativamente al secondo membro, cioè se $\sigma \geqslant 1/2$, e sono soddisfatte le condizioni sotto le quali lo schema (3) ha ordine di approssimazione massimo sulla soluzione $u = u(x, t)$ (si vedano le formule (12) e (13)), allora la sua precisione è $O(\tau^{m_\sigma} + h^2)$, dove $m_\sigma = 2$ per $\sigma = 0{,}5$ e $m_\sigma = 1$ per $\sigma \neq 0{,}5$, ossia

$$\| y^j - u^j \|_c \leqslant M (h^2 + \tau^{m_\sigma}) \quad \text{per} \quad \sigma \neq \sigma_*, \tag{52}$$

dove $M =$ costante > 0 non dipende da h e τ.

Dal n. 2 segue che la valutazione (52) ha luogo se $u \in C_2^{(4)}$, $\varphi = f$ per $\sigma \neq 0{,}5$, $u \in C_3^{(4)}$, $\varphi = \bar{f} = f^{j+1/2}$ per $\sigma = 0{,}5$.

Dalla disuguaglianza (49) segue che per lo schema esplicito $\| y^j - u^j \|_c \leqslant M (h^2 + \tau)$ se $u \in C_2^{(4)}$.

Osservazione. In virtù dell'osservazione al teorema del n. 4 lo schema (3) per $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ ha la precisione $O(h^4 + \tau^2)$ per $u \in C_3^{(3)}$, $f \in C_1^{(2)}$ se φ è definita dalla formula (15).

6. Schemi di differenze per le equazioni a coefficienti variabili. Passiamo ora allo studio degli schemi di differenze per la soluzione numerica dell'equazione della conduzione termica (della diffusione) a coefficienti variabili

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu + f, \quad k > 0, \quad c > 0, \tag{53}$$

dove $c = c(x, t)$, $k = k(x, t)$, $q = q(x, t)$ e $f = f(x, t)$ sono funzioni date di x e t. Se, ad esempio, il coefficiente di conduzione termica $k = k(x, t, u)$ dipende dalla temperatura u, l'equazione

*) Si veda V. S. Rjabenkij, A. F. Filippov, *Sulla stabilità delle equazioni alle differenze*, Gostechizdat, Mosca, 1956 (ed. russa).

(53) si dice quasi-lineare. Le equazioni quasi-lineari ammettono soluzioni analitiche solo in casi eccezionali. Lo sviluppo della tecnica di calcolo e l'applicazione del metodo delle differenze finite hanno reso possibile la soluzione delle equazioni lineari e quasi-lineari a coefficienti variabili. Inoltre, è risultato necessario sviluppare con gli stessi programmi metodi adatti alla soluzione delle equazioni a coefficienti sia continui che discontinui.

Problemi a coefficienti discontinui sono assai frequenti in fisica e in ingegneria. È sufficiente ricordare, ad esempio, i problemi della diffusione dei neutroni e del regime termico in un reattore eterogeneo composto di un gran numero di zone con proprietà fisiche diverse, nonché i problemi del moto delle frontiere nelle transizioni di fase (si veda Appendice IV al capitolo III), ecc. Alla soluzione dei problemi a coefficienti discontinui si applicano schemi di calcolo « continuo » che non utilizzano l'informazione sulla posizione dei punti di discontinuità. In questo caso, in tutti i nodi della rete e per ogni coefficiente, si scrivono le stesse formule (senza modifica alcuna nell'intorno dei punti di discontinuità).

Le condizioni di convergenza e di precisione degli schemi di calcolo « continuo » impongono restrizioni sulla forma di questi schemi. Schemi convergenti nel caso dei coefficienti discontinui si possono ottenere mediante il metodo del bilancio o dell'interpolazione integrale.

7. Metodo del bilancio. Schemi conservativi. I processi fisici con i quali abbiamo avuto a che fare nel presente Corso sono caratterizzati dalle equazioni integrali di conservazione (della quantità di calore, della quantità di moto, dell'energia, ecc.). Così, per esempio, la legge di conservazione del calore (equazione del bilancio) nell'intervallo $[x_1, x_2]$ durante il tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ ha la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} c\,[u(x, t_2) - u(x, t_1)]\,dx = \int_{t_1}^{t_2} [W(x_1, t) - W(x_2, t)]\,dt +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\,dx\,dt,$$

dove $u(x, t)$ è la temperatura, c il calore specifico per unità di lunghezza, $f(x, t)$ la densità delle sorgenti di calore, $W(x, t) = -k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ il flusso di calore, $k(x, t)$ il coefficiente di conduzione termica. Se esistono le derivate continue $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, dall'equazione del bilancio deriva

l'equazione della conduzione termica

$$c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,\ t).$$

È naturale partire dall'equazione del bilancio per scrivere le equazioni alle differenze che descrivono approssimativamente questo o quel processo. Sia data la rete $(x_i = ih,\ t_j = j\tau)$. Per ogni cella elementare (rettangolo) di questa rete si scrive l'equazione del bilancio contenente gli integrali della funzione e delle sue derivate (flussi nel caso dell'equazione del bilancio della conduzione termica) lungo il contorno della cella. Per il calcolo di queste equazioni occorrono delle ipotesi sul profilo delle funzioni. A seconda dell'interpolazione locale sia in x che in t otteniamo degli schemi distinti. La questione dell'interpolazione da scegliere dipende dalle condizioni di stabilità, precisione e semplicità della realizzazione (in particolare, dalla condizione di minimo di operazioni aritmetiche che si devono eseguire per ottenere una soluzione).

Illustriamo su alcuni esempi il *metodo del bilancio* (dell'*interpolazione integrale*).

Consideriamo dapprima l'equazione stazionaria della conduzione termica

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)\,u=-f(x),\quad 0<x<1,\ k>0,\ q\geqslant 0; \tag{54}$$

qui $q(x)\,u$ è l'intensità dei deflussi di calore (per $q \leqslant 0$ sorgenti) proporzionale alla temperatura $u(x)$.

Consideriamo nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$ la rete $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$ con passo h. Scriviamo l'equazione del bilancio di calore nell'intervallo $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$, $x_{i-1/2} = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i) = x_{i-1}+\frac{h}{2}$:

$$W_{i-1/2}-W_{i+1/2}-\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx+\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx=0, \tag{55}$$

dove $W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}$ è il flusso di calore. Per ottenere lo schema richiesto, sostituiamo il primo integrale e W con espressioni alle differenze. Consideriamo l'approssimazione elementare seguente (u = costante = u_i per $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$):

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx hd_iu_i,\quad d_i=\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx. \tag{56}$$

Integriamo l'uguaglianza $\frac{du}{dx} = -\frac{W}{k}$ nell'intervallo $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W}{k}\, dx.$$

Siccome W figura nella (55) nei punti seminteri $x_{i\pm 1/2}$, allora, ponendo $W = \text{costante} = W_{i-1/2}$ per $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, avremo

$$u_{i-} - u_i = W_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

ossia

$$W_{i-1/2} = -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\overline{x},\, i}, \tag{57}$$

$$a_i = \frac{1}{\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}}. \tag{57'}$$

È da notare che $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$ esprime la resistenza termica dell'intervallo $[x_{i-1},\ x_i]$. Sostituendo l'integrale (57') mediante una delle formule

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{k_{i-1/2}}, \quad \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_{i-1}} + \frac{1}{k_i}\right),$$

otteniamo $a_i = k_{i-1/2}$, $a_i = \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1}+k_i}$, ecc. Tutti questi coefficienti differiscono l'uno dall'altro di $O(h^2)$. Sostituendo nella (55) le espressioni (56) e (57) e indicando con y_i la funzione cercata, avremo lo schema di differenze esprimente la legge di conservazione di calore sulla rete (schema conservativo):

$$\frac{1}{h}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{h} - \frac{a_i (y_i - y_{i-1})}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i, \tag{58}$$

che si può scrivere nella forma

$$(a y_{\overline{x}})_x - dy = -\varphi, \tag{58'}$$

dove

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\, dx. \tag{59}$$

Quindi, il metodo del bilancio consente di ottenere schemi i cui coefficienti in tutti i nodi della rete si calcolano mediante le

stesse formule, come medie dei coefficienti dell'equazione differenziale nell'intorno del nodo della rete.

Gli schemi stessi (58) si scrivono allo stesso modo in tutti i nodi della rete e per qualsiasi $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Questi schemi si dicono *omogenei*. A scopi pratici è opportuno cercare i coefficienti dello schema a, d, φ mediante formule più semplici e usando i valori di k, q, f in punti separati. In questo caso i coefficienti a, d, φ vengono determinati come medie di k, q, f in uno o più punti

$$a(x)=\sum_{j=n_1}^{n_2} c_j k(x+s_j h), \quad -1\leqslant s_j\leqslant 0, \quad \sum_{j=n_1}^{n_2} c_j=1, \quad c_j\geqslant 0, \quad (60)$$

e analogamente per d, φ. L'insieme dei punti $\{s_j\}$ si chiama campione di coefficiente.

Si suole usare campioni a uno o a due punti, ponendo ad esempio

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad (61)$$

se k, q, f sono continui. Se k, q, f sono discontinui, in queste formule si deve calcolare la semisomma dei valori limite a primo e secondo membro *).

Lo schema (58) ha il secondo ordine d'approssimazione se

$$\frac{a_i+a_{i+1}}{2}=k_i+O(h^2), \quad \frac{a_{i+1}-a_i}{h}=k_i'+O(h^2),$$

$$d_i=q_i+O(h^2), \quad \varphi_i=f_i+O(h^2). \quad (62)$$

Infatti, l'errore di approssimazione per lo schema (58) della soluzione $u = u(x)$ dell'equazione (54) vale

$$\psi_i=(\Lambda u-du+\varphi)_i=\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(u_{i+1}-u_i)-a_i(u_i-u_{i-1})\right]-$$

$$-d_i u_i+\varphi_i.$$

Sostituendo

$$u_{i\pm 1}=u_i\pm hu_i'+\frac{h^2}{6}u_i''\pm\frac{h^3}{6}u_i'''+O(h^4)$$

e tenendo conto che $((ku')'-qu+f)_i=0$, otteniamo

$$\psi_i=\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2}-k_i\right)u_i''+\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h}-k_i'\right)u_i'-(d_i-q_i)u_i+$$

$$+(\varphi_i-f_i).$$

Si vede di qui che $\psi = O(h^2)$, se sono soddisfatte le condizioni (62). È facile provare che i coefficienti a, d, φ dedotti sopra verificano le stesse condizioni.

*) Si veda A. N. Tichonov e A. A. Samarskij, *Sugli schemi di differenze omogenei*, Rivista di calcolo numerico e di fisica matematica **1**, n. 1, 1961 (ed. russa).

Quindi, il metodo del bilancio conduce a schemi omogenei del secondo ordine d'approssimazione. Questi schemi sono convergenti nella classe dei coefficienti continui a tratti e hanno almeno il primo ordine di precisione (lo schema (58) con coefficienti (57′) e (59) ha il secondo ordine).

Gli schemi di differenze per l'equazione (54) si possono scrivere passando dalla condizione che l'approssimazione sia del secondo

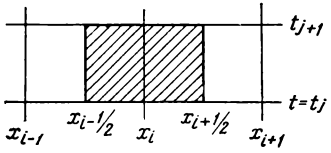


Fig. 86

ordine. Ma in questo caso può succedere che lo schema $O(h^2)$ sia divergente nella classe dei coefficienti discontinui. Come esempio può servire lo schema

$$\Lambda y_i = k_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = -f_i, \tag{63}$$

corrispondente all'equazione $(ku')' - qu = ku'' + k'u' - qu = -f$. Esiste un altro esempio *) dal quale risulta che (per $q = 0$, $f = 0$, $u(0) = 1$, $u(1) = 0$) la soluzione dell'equazione (63) per $h \to 0$ ha come limite la funzione $\bar{u}(x)$ che non è soluzione del problema iniziale. Se la questione della convergenza di uno schema si risolve mediante un infittimento delle reti (ciò che si fa spesso in pratica), si può trarre una conclusione sbagliata circa la convergenza (lo schema « converge », ma non alla soluzione del problema iniziale).

8. Schemi a due strati per l'equazione della conduzione termica a coefficienti variabili. Trattiamo ora l'equazione non stazionaria della conduzione termica (53). Per semplicità, poniamo $c = 1$, $q = 0$. Scriviamo l'equazione del bilancio per il rettangolo $(x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2},\ t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1})$ (fig. 86):

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x,\ t_{j+1}) - u(x,\ t_j)]\,dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [M(x_{i-1/2},\ t) - W(x_{i+1/2},\ t)]\,dt + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x,\ t)\,dx\,dt, \tag{64}$$

*) Si veda la nota precedente alla pag. 591.

dove $W = -k\frac{\partial u}{\partial x}$. Consideriamo le formule elementari seguenti:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)]\, dx \approx h\,[u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)], \qquad (65)$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [W(x_{i+1/2}, t) - W(x_{i-1/2}, t)]\, dt \approx$$

$$\approx \tau\sigma\,[W_{i+1/2}^{i+1} - W_{i-1/2}^{j+1}] + \tau(1-\sigma)[W_{i+1/2}^{j} - W_{i-1/2}^{j}], \qquad (66)$$

dove σ è un numero qualsiasi. Usando per $W_{i-1/2}$ la formula (57) e sostituendo le (65) e (66) nell'espressione (64), otteniamo lo schema conservativo a due strati

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sigma(\Lambda y)_i^{j+1} + (1-\sigma)(\Lambda y)_i^j + \varphi_i^{j+1}, \qquad (67)$$

$$\Lambda y = (a y_{\overline{x}})_x,$$

$$\varphi_i^{j+1} = \frac{1}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t)\, dx\, dt, \qquad (68)$$

dove a si calcola (per t fissato) mediante le formule del n. 7 di modo che $\Lambda u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + O(h^2)$. Per φ si possono adoperare anche altre formule equivalenti alla (68) a meno di $O(h^2+\tau^2)$. Se f è una funzione continua, allora poniamo $\varphi_i^{j+1} = f_i^{j+1/2}$.

Per analogia con il n. 3 vediamo che lo schema (67) ha l'approssimazione $O(h^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau + \tau^2)$. Se sostituiamo $\sigma(\Lambda y)_i^{j+1} + (1-\sigma)(\Lambda y)_i^j$ con l'espressione

$$\Lambda^{j+1/2}(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j) = (a^{j+1/2}(\sigma y_{\overline{x}}^{j+1} + (1-\sigma)\, y_{\overline{x}}^j)_x,$$

otteniamo uno schema con lo stesso ordine di precisione:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda^{j+1/2}(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j) + \varphi^{j+1}$$

o

$$y_{\overline{t}} = \Lambda(\sigma y + (1-\sigma)\, y) + \varphi. \qquad (69)$$

Poiché l'equazione del bilancio può essere scritta per ogni dominio G nel piano (x, t) delimitato dalla curva Γ:

$$\int_\Gamma (cu\, dx + W\, dt) = \iint_G f(x, t)\, dx\, dt,$$

la si può usare per ottenere schemi di differenze conservativi per problemi termici con frontiere interne ed esterne mobili su reti arbitrarie non uniformi.

Analogamente si possono ottenere schemi conservativi per le equazioni della dinamica dei gas, dell'elasticità, ecc. In tutti i casi è necessario, negli schemi così ottenuti, verificare l'ordine d'approssimazione, la stabilità, la convergenza e altre proprietà poiché tutte queste caratteristiche non derivano dalla natura conservativa dello schema.

Il metodo del bilancio o dell'interpolazione integrale (si veda la nota alla pag. 591) trova una larga applicazione nella pratica *). Gli schemi di calcolo continuo che si ottengono in questo caso sono convergenti nella classe dei coefficienti discontinui.

Consideriamo ora il primo problema ai limiti per l'equazione della conduzione termica nel dominio $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ &Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ &u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ &0 < c_1 \leqslant k(x, t) \leqslant c_2, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

dove c_1, c_2 = costanti.

Per la sua soluzione sulla rete $\overline{\omega}_{h\tau}$ (si veda n. 1, § 1), ricorriamo allo schema a due strati (69) ottenuto con il metodo del bilancio

$$\left.\begin{aligned} &y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma y + (1-\sigma)\check{y}) + \varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau > 0, \\ &y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \\ &y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

dove $\Lambda y = (a(x, t_{j+1/2})\, y_{\bar{x}})_x$ è uno schema del secondo ordine d'approssimazione in h.

Per determinare $y = y_i^{j+1}$ dalla (71) otteniamo il problema ai limiti seguente:

$$\left.\begin{aligned} &A_{i+1}y_{i+1} - C_i y_i + A_i y_{i-1} = -F_i, \quad 0 < i < N, \\ &y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

dove $A_1 = \sigma \frac{\tau}{h^2} a_i$, $C_i = A_i + A_{i+1} + 1$ e F_i si esprime in funzione di y^j.

Valutiamo l'errore di approssimazione dello schema (71). Supponiamo che $y(x, t)$ sia la soluzione del problema (71) e $u = u(x, t)$ quella del problema iniziale (70). Sostituendo nella (71)

*) Si veda, ad esempio, G. I. Marčuk, *Metodi numerici nel calcolo dei reattori nucleari*, Atomizdat, Mosca, 1958 (ed. russa).

$y^j = z^j + u^j$ otteniamo per la differenza $z = y - u$ le condizioni

$$z_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma z + (1-\sigma)\check{z}) + \psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z(x, 0) = 0, \tag{73}$$

dove $\psi = \Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) + \varphi - u_{\bar{t}}$ è l'errore di approssimazione per lo schema (71) della soluzione $u = u(x, t)$ dell'equazione (70). Tenendo conto del fatto che $\Lambda u = Lu + O(h^2)$, $\varphi = f^{j+1/2}$, $u_{\bar{t}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2} + O(\tau^2)$ e $\sigma u + (1-\sigma)\check{u} = (u + (\sigma - 0{,}5)\tau \dot{u})^{j+1/2} + O(\tau^2)$, otteniamo $\psi = (\sigma - 1/2) \times \times \tau (\dot{Lu})^{j+1/2} + O(\tau^2 + h^2)$ se $u(x, t)$ e $k(x, t)$ sono funzioni sufficientemente derivabili ($u \in C_3^{(4)}$, $k \in C_0^{(3)}$).

Si vede di qui che lo schema simmetrico ($\sigma = 0{,}5$) ha il secondo ordine d'approssimazione in h e τ.

Passiamo allo studio dello stabilità dello schema (73) relativamente ai dati iniziali e al secondo membro dell'equazione. Poiché $\sigma z + (1-\sigma)\check{z} = 0{,}5(z + \check{z}) + (\sigma - 0{,}5)\tau z_{\bar{t}}$, allora le condizioni (73) si possono scrivere nella forma

$$z_{\bar{t}} - (\sigma - 0{,}5)\tau \Lambda z_{\bar{t}} - 0{,}5\Lambda(z + \check{z}) = \psi, \quad z_0 = z_N = 0. \tag{74}$$

Supporremo che

$$z(x, 0) = z_0(x), \tag{75}$$

$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_2, \quad |a_{\bar{t}}| \leqslant c_3 \quad \text{o} \quad |a - \check{a}| \leqslant \tau c_3. \tag{76}$$

Procedendo come nel n. 3, scriviamo l'identità energetica per il problema (74)-(76), analoga alla (33):

$$2\tau \|z_{\bar{t}}\|^2 - 2\tau^2 (\sigma - 0{,}5)(\Lambda z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) - (\Lambda(z + \check{z}), z - \check{z}) = 2\tau(\psi, z_{\bar{t}}). \tag{77}$$

In virtù della formula di Green (19) abbiamo $-(\Lambda v, v) = (a, v_{\bar{x}}^2]$, $-(\Lambda(z + \check{z}), z - \check{z}) = (a(z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}}), z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}] = (a, z_{\bar{x}}^2] - (a, \check{z}_{\bar{x}}^2]$. Rappresentando quindi a nella forma $a = \check{a} + (a - \check{a}) = \check{a} + \tau a_{\bar{t}}$ e usando la condizione $|a_{\bar{t}}| \leqslant c_3$, avremo $a \leqslant (1 + \tau c_4)\check{a}$, $c_4 = c_3/c_1$, $(a, \check{z}_{\bar{x}}^2] \leqslant (1 + c_4\tau)(\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2]$. Portiamo questa valutazione nella (77):

$$2\tau [\|z_{\bar{t}}\|^2 + (\sigma - 1/2)\tau (a, z_{\bar{x}\bar{t}}^2]] + (a, z_{\bar{x}}^2] \leqslant$$

$$\leqslant (1 + c_4\tau)(\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2] + 2\tau(\psi, z_{\bar{t}}). \tag{78}$$

Esaminiamo dapprima la stabilità dello schema (73) relativamente ai dati iniziali. A tal fine poniamo $\psi = 0$ nella (78) e mostriamo che l'espressione fra parentesi quadra $\geqslant 0$ per $\sigma \geqslant 0{,}5 - \frac{h^2}{4c_2\tau}$. Ciò è evidente per $\sigma \geqslant 0{,}5$. Sia $\sigma < 0{,}5$. Per analogia con il n. 4 troviamo $\|v\|^2 - (0{,}5 - \sigma)\tau(a, v_{\bar{x}}^2] \geqslant$

$\geqslant \|v\|^2 - (0{,}5-\sigma)\, c_2\tau\, \|v_{\bar{x}}\|^2 \geqslant \left(1 - (0{,}5-\sigma)\,\frac{4c_2\tau}{h^2}\right) \|v\|^2 \geqslant 0$ per $1-(0{,}5-\sigma)\,4c_2\tau h^{-2} \geqslant 0$ (qui $v = z_{\bar{t}}$). Pertanto dalla (78) segue

$$\|z\|^2_{(1)} \leqslant (1 + c_4\tau\, \|\check{z}\|^2_{(1)} \leqslant \left(1 + \frac{c_4\tau}{2}\right)^2 \|\check{z}\|^2_{(1)},$$

dove $\|z\|^2_{(1)} = (a, z^2_{\bar{x}}]$, (79)

$$\|z^j\|_{(1)} \leqslant (1 + 0{,}5c_4\tau\, \|z^{j-1}\|_{(1)} \leqslant \left(1 + \frac{c_4\tau}{2}\right)^j \|z^0\|_{(1)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{0{,}5c_4 t_j}\, \|z_0\|_{(1)}. \tag{80}$$

Abbiamo dimostrato così il teorema:

Lo schema di differenze (74) *(o il* (71)*) è stabile rispetto ai dati iniziali nella norma* $\|z\|_{(1)} = \sqrt{(a, z^2_{\bar{x}}]}$ *per*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4c_2\tau}. \tag{81}$$

In questo caso per la soluzione del problema (74)-(76) *per* $\psi = 0$ *è valida la valutazione*

$$\|\, z^j \,\|_{(1)} \leqslant M_1\, \|\, z_0 \,\|_{(1)}, \quad \text{dove} \quad M_1 = e^{0{,}5c_4 T}. \tag{82}$$

Dalla (81) deriva che lo schema esplicito ($\sigma = 0$) $z_{\bar{t}} = \Lambda\check{z}$ è stabile per $\tau \leqslant h^2/2c_2$, vale a dire il passo nel tempo, per la stabilità di uno schema esplicito, deve essere tanto più piccolo quanto più grande è il coefficiente di conduzione termica. Per questa ragione non è opportuno applicare schemi espliciti alle equazioni a coefficienti variabili.

Dimostriamo il teorema:

Per la soluzione del problema alle differenze (74)-(76) *per* $\sigma \geqslant 0{,}5$ *è valida la valutazione*

$$\max_{\bar{\omega}_\tau} \|\, z \,\|_{(1)} \leqslant M_1\, \|\, z_0 \,\|_{(1)} + M_2 \max_{\bar{\omega}_\tau} \|\, \psi \,\|, \tag{83}$$

dove

$$\|\, z \,\|_{(1)} = \sqrt{(a, z^2_{\bar{x}}]}. \tag{84}$$

Ricorriamo alla disuguaglianza (78):

$$2\tau\, \|\, z_{\bar{t}} \,\|^2 + (a, z^2_{\bar{x}}] \leqslant (1 + c_4\tau)\, (\check{a}, \check{z}^2_{\bar{x}}] + 2\tau\, (\psi, z_{\bar{t}}) \quad \text{per} \quad \sigma \geqslant 1/2. \tag{85}$$

Sostituendo la valutazione (46) otteniamo, per $c_0 = 2$,

$$(\check{a}, \check{z}^2_{\bar{x}}] \leqslant (1 + c_4\tau)\, (\check{a}, \check{z}^2_{\bar{x}}] + \frac{\tau}{2}\, \|\, \psi \,\|^2.$$

Risolvendo questa disuguaglianza (per analogia con il n. 4)

$$\| z^j \|^2_{(1)} \leqslant M_1' \left[\| z_0 \|^2_{(1)} + \frac{\tau}{2} \sum_{j'=1}^{j} \| \psi^{j'} \|^2 \right], \qquad M_1' = e^{c_4 T},$$

riotteniamo la valutazione (83).

Se teniamo conto del fatto che $(a, z_{\bar{x}}^2] \geqslant c_1 \| z_{\bar{x}} \|^2 \geqslant 4c_1 \| z \|^2_c$, allora dalla (83) ricaviamo la soluzione del problema (73)

$$\max_{\bar{\omega}_\tau} \| z \|_c \leqslant M \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi \|, \tag{86}$$

dove

$$M = \sqrt{\frac{M_1'}{8c_1}}, \qquad \| z \|_c = \max_{\omega_h} |z|.$$

Abbiamo dimostrato così il teorema: *se lo schema* (71) *è stabile* (*per* $\sigma \geqslant 0{,}5$) *e approssima l'equazione* (70), *esso è convergente e l'ordine della sua precisione coincide con quello d'approssimazione.*

Supponiamo che la rete $\bar{\omega}_h$ non sia uniforme, $\bar{\omega}_h^* = (x_i, i = 0, 1, \ldots, N)$ e che il suo passo $h_i = x_i - x_{i-1}$ dipenda da i. Allora nella (71) al posto di Λy si deve sostituire l'espressione (cfr. n. 2, § 1, (15))

$$\Lambda y_i = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}, i} = \frac{1}{\hbar_i} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right],$$

$$\hbar_i = \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}). \tag{87}$$

L'errore di approssimazione per Λ può essere rappresentato nella forma

$$\psi_i = \Lambda u_i - L u_i = \frac{1}{\hbar_i} (\eta_{i+1} - \eta_i) + O(h_i^2 \quad h_{i+1}^2),$$

dove $\eta = O(h_i^2)$, cioè $\| \psi \|_0 = O(h_0)$, $\| \psi \|_2 = O(h)$. Tuttavia, come è stato mostrato nel n. 2, per $\| \psi \|_3$ sussiste la valutazione

$$\| \psi \|_3 = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k \right)^2 \right]^{1/2} = O(h_0^2), \qquad \text{dove} \quad h_0 = \max h_i.$$

Lo schema può essere ottenuto con il metodo del bilancio.

Se il coefficiente $k(x, t)$ ha una discontinuità di prima specie sulla curva $x =$ costante (discontinuità fissa) o $x = \xi(t)$ (discontinuità mobile), lo schema (71) resta, come prima, convergente, ma l'ordine della sua precisione, in generale, diminuisce. Nel caso di discontinuità fissa (per $x =$ costante) è opportuno considerare una rete tale che il punto di discontinuità $x =$ costante sia un nodo della rete ω_h. Ciò conduce a reti non uniformi. Tuttavia l'ordine di precisione (secondo h) dello schema (71) su questa rete si conserva anche nel caso di k discontinuo.

La valutazione dell'ordine di precisione nel caso di coefficienti discontinui e di rete non uniforme presenta notevoli difficoltà. In questo caso sussiste una valutazione della forma (86), ma a secondo membro dell'(86) in luogo di $\| \psi \|$ figura la norma $\| \psi \|_3$ di tipo speciale indicato sopra.

Finora abbiamo considerato condizioni ai limiti di prima specie. Esse si verificano con precisione sulla rete $\overline{\omega}_h$, e perciò la precisione dello schema di differenze è determinata dall'ordine di approssimazione dell'equazione. Le condizioni ai limiti di terza specie vengono approssimate con poca precisione. È naturale perciò chiedere che l'ordine della loro approssimazione coincida con l'ordine dell'approssimazione dell'equazione differenziale.

Diamo alcune condizioni limite alle differenze di terza specie, senza dimostrazione *).

Consideriamo dapprima il problema ai limiti

$$(ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1; \quad k(x) > 0, \; q(x) \geqslant 0;$$
$$k(0)\, u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1; \quad -k(1)\, u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, \quad (88)$$

dove $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. L'equazione va sostituita dallo schema (58) e le condizioni per $x = 0$, $x = 1$ dalle condizioni limite alle differenze di terza specie

$$a_1 y_{x,0} = \widetilde{\beta}_1 y_0 - \widetilde{\mu}_1, \quad -a_N y_{\overline{x},N} = \widetilde{\beta}_2 y_N - \widetilde{\mu}_2, \quad (89)$$

dove $a_1 = a(h)$, $a_N = a(x_N) = a(1)$, $\widetilde{\beta}_1 = \beta_1 + 0{,}5\, hq(0)$, $\widetilde{\beta}_2 = \beta_2 + 0{,}5\, hq(1)$, $\widetilde{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5\, hf(0)$, $\widetilde{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5\, hf(1)$. Queste condizioni approssimano le condizioni (88) relative alla soluzione $u = u(x)$ del problema (88) con ordine $O(h^2)$.

Risolvendo l'(89) rispetto a y_0 e y_N, otteniamo la seguente scrittura delle condizioni ai limiti di terza specie, comoda per i calcoli:

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2, \quad (90)$$

dove $\varkappa_1 = a_1/(a_1 + h\widetilde{\beta}_1)$, $\varkappa_2 = a_N/(a_N + h\widetilde{\beta}_2)$, $\nu_1 = h\widetilde{\mu}_1/(a_1 + h\widetilde{\beta}_1)$, $\nu_2 = h\widetilde{\mu}_2/(a_N + h\widetilde{\beta}_2)$.

Consideriamo ora il terzo problema ai limiti per l'equazione della conduzione termica (70). Per $x = 0$, $x = 1$ siano date le condizioni

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_1(t)\, u - \mu_1(t) \quad \text{per } x = 0, \\ -k\frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_2(t)\, u - \mu_2(t) \quad \text{per } x = 1. \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

*) Si veda A. A. Samarskij, *Schemi di differenze omogenei per equazioni di tipo parabolico*, Žurn. vyčisl. mat. i matem. fis. (Rivista di calcolo numerico e di fisica matematica) **2**, n. 1 (1962). Le condizioni (89) e (92) si possono ottenere con il metodo del bilancio.

In questo caso le condizioni limite alle differenze di terza specie hanno la forma

$$\left.\begin{aligned} &a_1 (\sigma y_{x,\,0} + (1-\sigma)\,\check{y}_{x,\,0} = \\ &\quad = 0{,}5h y_{\bar{t},\,0} + \beta_1 (\sigma y_0 + (1-\sigma)\,\check{y}_0) - \tilde{\mu}_1, \\ &\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5hf(0,\,t), \\ &-a_N (\sigma y_{\bar{x},\,N} + (1-\sigma)\,\check{y}_{\bar{x},\,N} = \\ &\quad = 0{,}5h y_{\bar{t},\,N} + \beta_2 (\sigma y_N + (1-\sigma)\,\check{y}_N) - \tilde{\mu}_2, \\ &\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5hf(1,\,t), \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

dove a_1, a_N, β_1, β_2, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ si calcolano all'istante $t = t_{j+0,5}$ e σ è il parametro che figura nell'equazione (71). Queste condizioni hanno lo stesso ordine d'approssimazione $O(h^2 + (\sigma - 0{,}5)\,\tau + \tau^2)$ relativo alla soluzione $u = u(x, t)$ (dell'equazione (70) con le condizioni (91)) dello schema (71). Tenendo conto che $\check{y} = y^j$ sono note per tutti gli $i = 0, 1, \ldots, N$, è facile ridurre la (92) alla forma (90). Non scriviamo le espressioni di $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ν_1 e ν_2.

Come risultato otteniamo, per determinare $y = y^{j+1}$, l'equazione alle differenze (72) con le condizioni ai limiti (90).

9. Schemi a tre strati. Oltre agli schemi a due strati considerati nel n. 8, alla soluzione numerica dell'equazione della conduzione termica (70) si applicano schemi a tre strati che legano i valori della funzione cercata y in tre istanti $t = t_{j+1}, t_j, t_{j-1}$ (su tre strati) *).

Spesso si usano schemi a tre strati simmetrici

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda (\sigma y^{j+1} + (1-2\sigma)\,y^j + \sigma y^{j-1}) + \varphi^j \quad (\varphi^j = f^j), \qquad (93)$$

dove $\Lambda y = (a(x, t_j)\,y_{\bar{x}})_x$. L'errore di approssimazione di questi schemi è $O(h^2 + \tau^2)$ per ogni σ.

Per lo schema a tre strati (93), oltre a $y(x, 0)$ si deve assegnare il valore $y(x, \tau)$ per $t = \tau$. Ciò si può fare in due modi: 1) usando la formula $u(x, \tau) = u(x, 0) + \tau \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + O(\tau^2)$ e l'equazione (70), otteniamo $y(x, \tau) = u_0(x) + \tau\,[Lu + f]_{t=0} = u_0(x) + \tau\,[(k(x, 0)\,u_0')' + f(x, 0)]$; 2) usando per determinare $y(x, \tau)$ lo schema a due strati del secondo ordine di precisione: $y_t^- = 0{,}5\Lambda(y + \check{y}) + \varphi$ per $t = \tau$. Dunque, siano date le condizioni iniziali

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y(x, \tau) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h. \qquad (94)$$

Per $x = 0$, $x = 1$ si pongono problemi ai limiti, per esempio di prima specie.

Mostriamo che lo schema (93) è stabile relativamente alle condizioni iniziali e al secondo membro dell'equazione per

$$\sigma \geqslant 1/4. \qquad (95)$$

A tale scopo consideriamo le condizioni al contorno omogenee $y_0 = 0$, $y_N = 0$. Introduciamo le notazioni $y = y^{j+1}$, $\check{y} = y^j$, $\check{\check{y}} = y^{j-1}$ e riscriviamo

*) Si veda R. Richtmyer, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, New York, 1957.

lo schema (93) nella forma

$$\frac{y-\overset{\vee\vee}{y}}{2\tau}=\Lambda y^{(\sigma)}+\varphi, \qquad y^{(\sigma)}=\sigma y+(1-2\sigma)\,\overset{\vee}{y}+\sigma\overset{\vee\vee}{y}. \tag{96}$$

Moltiplichiamo l'equazione (96) per $2\tau y_i^{(\sigma)}h$, sommiamo rispetto a $i=1, 2, \ldots, N-1$ e teniamo conto delle identità

$$(y-\overset{\vee\vee}{y})y^{(\sigma)}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(y^2+\overset{\vee}{y}{}^2)+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)(y-\overset{\vee}{y})^2\right]-\left[\frac{1}{2}(\overset{\vee}{y}{}^2+\overset{\vee\vee}{y}{}^2)+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)(\overset{\vee}{y}-\overset{\vee\vee}{y})^2\right],$$

$$\frac{1}{2}(y^2+\overset{\vee}{y}{}^2)=\frac{1}{4}(y+\overset{\vee}{y})^2+\frac{1}{4}(y-\overset{\vee}{y})^2.$$

Come risultato avremo

$$\|y\|_{(1)}^2+2\tau\,(a,\ (\overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2]=\|\overset{\vee}{y}\|_{(1)}^2+2\tau\,(\varphi,\ y^{(\sigma)}), \tag{97}$$

dove

$$\|y\|_{(1)}^2=\frac{1}{4}\|y+\overset{\vee}{y}\|^2+(\sigma-1/4)\|y-\overset{\vee}{y}\|^2,$$

$$\|y\|_{(1)}^2\geqslant\frac{1}{4}\|y-\overset{\vee}{y}\|^2 \quad \text{per} \quad \sigma\geqslant 1/4. \tag{98}$$

Quindi adoperando le disuguaglianze

$$2\tau\,(\varphi,\ y^{(\sigma)})\leqslant\tau c_0\|y^{(\sigma)}\|^2+\frac{\tau}{c_0}\|\varphi\|^2, \qquad (a,\ (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2]\geqslant 4c_1\|y^{(\sigma)}\|^2$$

e assumendo $c_0=8c_1$, otteniamo

$$\|y\|_{(1)}^2\leqslant\|\overset{\vee}{y}\|_{(1)}^2+\frac{\tau}{8c_1}\|\varphi\|^2. \tag{99}$$

Di qui deriva la valutazione

$$\|y^j\|_{(1)}\leqslant\|y(\tau)\|_{(1)}+\frac{1}{\sqrt{8c_1}}\left(\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\varphi^{j'}\|^2\right)^{1/2} \quad \text{per} \quad \sigma\geqslant 1/4. \tag{100}$$

Questa valutazione consente di dimostrare la convergenza dello schema (93), (94) con la velocità $O(h^2+\tau^2)$ per $\sigma\geqslant 1/4$.

Indichiamo ancora lo schema a tre strati seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{3}{2\tau}(y^{j+1}-y^j)-\frac{1}{2\tau}(y^j-y^{j-1})=\Lambda y^{j+1}+\varphi^{j+1}, \qquad \varphi^{j+1}=f^{j+1},\\ &\Lambda y=(a,\ (x,\ t_{j+1})\,y_{\bar{x}})_x.\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Esso è indubbiamente stabile e di precisione $O(h^2+\tau^2)$. Per determinare y^{j+1} nell'espressione (101), otteniamo il problema (72) con

$$A_i=\frac{1}{h^2}a_i, \qquad C_i=A_i+A_{i+1}+\frac{3}{2\tau},$$

$$F_i=\varphi_i+\frac{4y_i^j-y_i^{j-1}}{\tau},$$

che si risolve con il metodo di fattorizzazione (si veda il n. 10).

Per l'equazione di tipo iperbolico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \qquad Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{102}$$

$$u(0, t) = u_1(t), \qquad u(1, t) = u_2(t), \qquad u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x) \tag{103}$$

gli schemi di differenze devono contenere non meno di tre strati. Gli schemi simmetrici

$$\frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} = \Lambda^j(\sigma y^{j+1} + (1 - 2\sigma)\, y^j + \sigma y^{j-1}) + f^j \tag{104}$$

hanno l'approssimazione $O(h^2 + \tau^2)$ e sono stabili per

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2 c_2}.$$

In particolare, lo schema esplicito ($\sigma = 0$) è relativamente stabile per

$$\tau \leqslant \frac{h}{\sqrt{c_2}}.$$

Sebbene tutti gli schemi stabili (104) abbiano lo stesso ordine di precisione, ma su reti reali, come mostrano gli esperimenti numerici, la loro precisione aumenta al diminuire di σ. Pertanto è consigliabile utilizzare schemi assolutamente stabili per $\sigma = 1/4$.

10. Soluzione dei sistemi di equazioni alle differenze. Metodo di fattorizzazione. Gli schemi impliciti per l'equazione della conduzione termica conducono a un sistema di equazioni algebriche nei valori y_i^{j+1} della funzione cercata sul nuovo strato $t = t_{j+1}$.

Questo sistema di equazioni ha la forma

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad 0 < i < N, \tag{105}$$

dove F_i è una funzione data.

Per l'equazione a coefficienti costanti abbiamo

$$A_i = \sigma\gamma, \qquad B_i = \sigma\gamma, \qquad C_i = 1 + 2\sigma\gamma, \qquad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Per l'equazione a coefficienti variabili

$$A_i = \sigma\gamma a_i, \quad B_i = \sigma\gamma a_{i+1} = A_{i+1}, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + 1.$$

Nel caso di una rete non uniforme

$$A_i = \frac{\sigma a_i}{\hbar_i h_i}\tau, \qquad B_i = \frac{\sigma a_{i+1}}{\hbar_i h_{i+1}}\tau, \qquad C_i = A_i + B_i + 1.$$

Le condizioni ai limiti di prima e terza specie considerate nei §§ 1 e 2 si possono scrivere nella forma

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2. \tag{106}$$

Per $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ seguono le condizioni ai limiti di prima specie $y_0 = \nu_1$, $y_N = \nu_2$.

Alla $t)$ striamo r
tenente spo $= 1$, =
reticola $B_i + A$,
Son stal seguenz
sponde ui. < 1. Qu
2. fere) ha se
Un ope reti risoluz
zione r di i inizia
ratore fun vamen
contin o) e da si
differe A y_N e pi
derivat di vamen
nome te . . ., y_1
zione r am alcolo
per le ion 1.
Sia ll'i te anc
$\leqslant 1$. C v' d
Esiste sen $\frac{A_i}{-B_i\xi_{i+}}$)
con un pli
$Lv \sim$ $\frac{\eta_{i+1} - I}{-B_i\xi_{i+}}$)
dette por $_{i+1}y_i +$
nistro dine de
successi
$Lv \sim$ apprim
ante le
deriva $_i =$ a dest
vata cile ve
Qu isp r la so
mazio ssi di eq
$L_h^{\pm}v_i$ s tto **Metodi**
mazio i d Nello
turale ten nto de
tare ψ a f uzione
Direm zio calcre
$\in C^{(m)}$ erv , il ca
$v(x)$ h $0 \leqslant$ scrizio
otteni oni quazion
$\leqslant x \leqslant$ $= \frac{\partial}{\partial x}$ (
Si ilu
$v(x)$ o gener
n mezz
$v_{i\pm1} =$ gli arg
e calc $L_h^+ v$ ia da s

diante il metodo delle iterazioni, applicando la formula di fattorizzazione a ciascuna iterazione. Se nella (27) poniamo $a_1 = a_1(y^j)$ e $a_2 = a_2(y^{(1)})$, allora per determinare $y_{(1)}$ e y^{j+1} otteniamo problemi lineari ai limiti che si risolvono immediatamente tramite il metodo di fattorizzazione sulle righe e le colonne, rispettivamente.

Diamo due esempi.

Esempio 1. Calcolo di un'onda di temperatura bidimensionale. Consideriamo l'equazione della conduzione termica bidimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(u)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right),$$

$$k_\alpha(u) = \varkappa_\alpha u^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{29}$$

coi parametri $\sigma_1 = 4$, $\varkappa_1 = 4$, $\sigma_2 = 2$, $\varkappa_2 = 0{,}25$ e per i calcoli usiamo la soluzione esatta

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 0{,}5\sqrt{-1+\sqrt{1+16(t-x_1-2x_2)}} \\ \qquad \text{per} \quad t \geqslant x_1 + 2x_2, \\ 0 \quad \text{per} \quad t \leqslant x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{30}$$

La rete è grossolana: $h_1 = h_2 = 1$; il numero di nodi è $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 20 = 600$. Dalla soluzione abbiamo preso i dati iniziali,

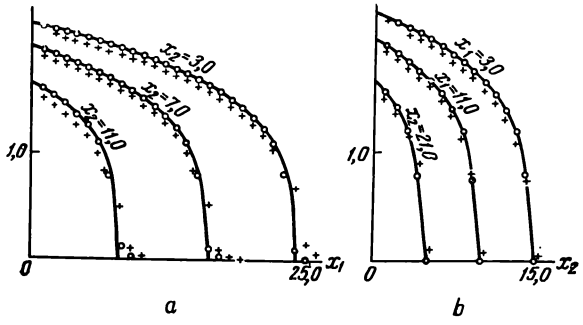


Fig. 92

e cioè $u(x_1, x_2, 0) \equiv 0$ e le condizioni ai limiti sulle rette $x_1 = 0$, $x_1 = 30$, $x_2 = 0$ e $x_2 = 20$.

I calcoli sono stati eseguiti mediante lo schema localmente unidimensionale (19) con gli operatori Λ_1 e Λ_2 definibili dalle formule (27): a) di passo $\tau = 0{,}2$; b) di passo $\tau = 1{,}0$; c) di passo $\tau = 2{,}0$. Alcuni risultati per $t = 30$ sono rappresentati nella fig. 92, dove le crocette indicano i risultati della variante c),

i puntini quelli della variante a) e le curve continue rappresentano la soluzione analitica *).

Esempio 2. Calcolo del problema della transizione di fase (problema di Stephan). Supponiamo che esistano due fasi 1, 2 a coefficienti di calore specifico $c_1(u)$, $c_2(u)$ e di conduzione termica $k_1(u)$, $k_2(u)$. In ciascuna delle dette fasi la temperatura $u(x, t)$ verifica l'equazione della conduzione termica

$$c_s(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_s(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f(x, t), \quad s = 1, 2,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_p), \quad p = 1, 2, 3, \tag{31}$$

dove $f(x, t)$ è la densità di sorgenti di calore. Sulla frontiera di separazione delle fasi la temperatura $u(x, t) = u^*$ è costante e uguale alla temperatura u^* della transizione di fase; i flussi di calore sono discontinui e la loro differenza vale λv, dove λ è il calore della transizione di fase e v la velocità del fronte della frontiera fra le fasi. Nel caso unidimensionale le condizioni sulla frontiera di separazione delle fasi $x = \xi(t)$ hanno la forma

$$u(\xi+0, t) = u(\xi-0, t) = u^*, \qquad k_1\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi+0} -$$

$$-k_2\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi-0} = \lambda\frac{d\xi}{dt}, \tag{32}$$

se nella fase 1 $u < u^*$, e nella fase 2 $u > u^*$.

Introducendo la funzione δ di Dirac, scriviamo l'equazione (31) sotto la forma

$$(c(u) + \lambda\delta(u-u^*))\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f, \tag{33}$$

$$c = \begin{cases} c_1, & u < u^*, \\ c_2, & u > u^*, \end{cases} \qquad k = \begin{cases} k_1, & u < u^*, \\ k_2, & u > u^*. \end{cases}$$

Le condizioni sulla frontiera fra le fasi (in particolare, le condizioni (32) per $p = 1$) derivano dall'equazione (33).

Per la soluzione del problema di Stephan si usa il metodo di smussamento: la funzione δ va sostituita con una funzione del tipo $\delta\,\delta(u - u^*, \Delta)$, non nulla nell'intervallo $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$ e soddisfacente alla condizione di normalizzazione

$$\int_{u^*-\Delta}^{u^*+\Delta} \delta(u-u^*, \Delta)\,du = 1.$$

Introducendo il calore specifico effettivo

$$\tilde{c}(u) = c(u) + \lambda\delta(u - u^*, \Delta)$$

*) Si veda la nota alla pag. 607.

e il coefficiente effettivo $\widetilde{k}(u)$ coincidente con $k_1(u)$ per $u < u^* - \Delta$ e con $k_2(u)$ per $u > u^* + \Delta$, otteniamo per determinare u l'equazione della conduzione termica quasi-lineare

$$\widetilde{c}(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\widetilde{k}(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f \tag{34}$$

con condizioni ai limiti corrispondenti sulla frontiera Γ del dominio G in cui si cerca la soluzione.

Poiché lo « smussamento » riguarda la temperatura, questo metodo è applicabile al caso di un numero di dimensioni e di fasi qualsiasi.

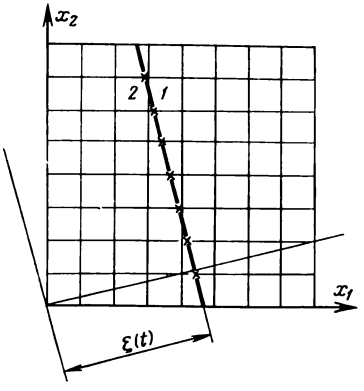


Fig. 93

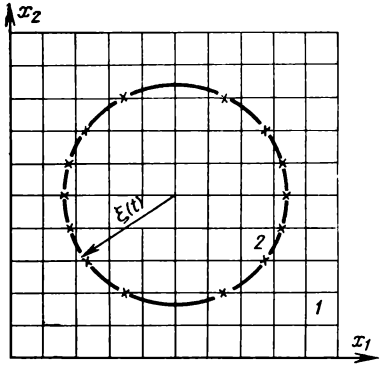


Fig. 94

Per la soluzione dell'equazione (34) si usa lo schema localmente unidimensionale (19), (27).

È da notare che δ ($u - u^*$, Δ) si sceglie in modo tale che in prossimità di $u = u^*$ la funzione $\widetilde{c}(u)$ abbia forma semplice: a « gradino », parabola ecc.

Sono stati risolti numericamente i seguenti problemi, aventi soluzioni analitiche esatte *):

1) problema a fronte piano obliquo (fig. 93);

2) problema a simmetria assiale in cui la circonferenza rappresenta la frontiera fra le fasi (fig. 94).

La soluzione di questi problemi è stata effettuata in coordinate ortogonali. Nelle figg. 93 e 94 sono rappresentati i risultati dei

*) A. A. Samarskij, B. D. Moiseenko, *Schema economico del calcolo continuo per il problema di Stephan pluridimensionale*, Rivista di calcolo numerico e di fisica matematica 5, n. 5 (1965); B. M. Budak, E. N. Solovjeva, A. B. Uspenskij, *Metodo alle differenze a smussamento dei coefficienti per la soluzione del problema di Stephan*, idem.

calcoli, dove le curve continue indicano la frontiera di separazione delle fasi e le crocette i punti di calcolo in cui $u = u^*$.

3. Metodi iterativi a direzione variabile per la soluzione del problema di Dirichlet alle differenze. La soluzione dell'equazione della conduzione termica $\partial u/\partial t = \Delta u$ sotto condizioni ai limiti omogenee tende a zero per $t \to \infty$ (si vedano i capitoli III e VI) e, di conseguenza, la soluzione del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad u|_\Gamma = \mu(x),$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

con secondo membro e valori ai limiti indipendenti da t (a disomogeneità stazionaria), per $t \to \infty$ tende alla soluzione del problema di Dirichlet

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_\Gamma = \mu(x). \tag{35}$$

Della stessa proprietà godono anche le soluzioni dei problemi alle differenze (33) corrispondenti all'equazione della conduzione termica. Per questa ragione gli schemi di differenze per l'equazione della conduzione termica si usano come metodi iterativi per risolvere in maniera approssimata il problema di Dirichlet alle differenze

$$\Lambda v = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{36}$$

considerato nel § 3.

Un metodo iterativo semplice (§ 3, n. 5) è lo schema esplicito (6) per l'equazione della conduzione termica (1) (per $f = f(x)$) di passo fissato $\tau = \frac{1}{4}h^2$ (nel caso in cui $G = G_0$ è un rettangolo e $h_1 = h_2 = h$). In questo caso, y^j è l'iterazione d'indice j, $y(x, 0) = u_0(x)$ è l'approssimazione iniziale. Il numero di iterazioni per lo schema esplicito vale $s_0 = s_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Lo schema longitudinale-trasversale (schema implicito a direzione variabile)

$$y^{s+1/2} - \tau_{s+1/2}\Lambda_1 y^{s+1/2} = y^s + \tau_{s+1/2}\Lambda_2 y^s + \tau_{s+1/2},$$

$$y^{s+1/2}|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{37}$$

$$y^{s+1} - \tau_{s+1}\Lambda_2 y^{s+1} = y^{s+1/2} + \tau_{s+1}\Lambda_1 y^{s+1/2} + \tau_{s+1} f,$$

$$y^{s+1}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad y^0 = y_0(x) \tag{38}$$

richiede un numero di iterazioni notevolmente inferiore. Qui s è l'indice d'iterazione ($s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$), $y^{s+1/2}$ il valore intermedio (sottoiterazione), $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}$, $\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}$, $\tau_{s+1/2}$ e τ_{s+1} sono parametri iterativi dipendenti dall'indice d'iterazione. Per trovare $y^{s+1/2}$ si usa il metodo di fattorizzazione sulle righe,

per y^{s+1} sulle colonne. I parametri $\tau_{s+1/2}$ e τ_{s+1} sono presi in modo tale che il numero di iterazioni $s_0 = s_0(\varepsilon)$ sia minimo. Nel caso in cui $G = G_0 = (0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2)$ è un rettangolo, il problema della scelta di una collezione ottimale di parametri $\{\tau_{s+1/2}\}$ e $\{\tau_{s+1}\}$ è risolto.

Siano

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha} \quad \text{e} \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}$$

gli autovalori più piccolo e più grande dell'operatore Λ_α $(\alpha = 1, 2)$. Facciamo la sostituzione

$$\tau_{s+1/2} = \frac{m\omega_{s+1} + r}{1 + p\omega_{s+1}}, \quad \tau_{s+1} = \frac{m\omega_{s+1} - r}{1 - p\omega_{s+1}}, \tag{39}$$

dove p e r si esprimono mediante le formule

$$p = \frac{\varkappa - \xi}{\varkappa + \xi}, \quad \varkappa = \frac{\Delta_1 - \delta_1}{\Delta_2 + \delta_1} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_2 + \delta_1)(\Delta_1 + \delta_2)}},$$

$$r = \frac{1}{2\Delta_1 \Delta_2} (\Delta_1 - \Delta_2) + (\Delta_1 + \Delta_2) p), \quad m = r + \frac{1 - p}{\Delta_1}. \tag{40}$$

Valutiamo il numero di iterazioni in base alla formula

$$s_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{4}{\eta}, \quad \text{dove} \quad \eta = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}. \tag{41}$$

Conoscendo s_0, calcoliamo i parametri

$$\omega_j = \frac{(1 + 2\theta)(1 + \theta^{\sigma_j})}{2\theta^{0,5\sigma_j}(1 + \theta^{1-\sigma_j} + \theta^{1+\sigma_j})}, \quad j = 1, 2, \ldots, s_0, \tag{42}$$

dove

$$\theta = \frac{1}{16} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2\right), \quad \sigma_j = \frac{2j - 1}{2s_0}, \quad j = 1, 2, \ldots, s_0,$$

e quindi mediante le formule (39) troviamo $\tau_{s+1/2}$ e τ_{s+1} (« collezione di parametri secondo Jordan »).

Esiste un altro metodo, più rozzo, per la scelta dei parametri ω_j ossia una collezione ciclica di parametri con n_0 parametri in un ciclo e k_0 cicli, cosicché $\omega_{j+kn_0} = \omega_j$, $j = 1, 2, \ldots, n_0$. I parametri $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_0}$ formano una progressione geometrica $\omega_{j+1} = q\omega_j$ di ragione $q = 0{,}16$ e

$$n_0 = \left[\ln \frac{1}{\eta} \Big/ \ln \frac{1}{q}\right] + 1, \quad k_0 = \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} \Big/ \ln \frac{1}{\bar{\rho}}\right] + 1,$$

dove $[a]$ è la parte intera del numero $a > 0$, $\bar{\rho} = 0{,}186$.

Per uno qualunque dei due modi di scelta dei parametri, per $s_0(\varepsilon)$ è valida la valutazione $s_0 = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$, dove $h =$

$= \min(h_1, h_2)$, ma la collezione ciclica conduce a un numero di iterazioni alquanto più grande. In compenso questo tipo di collezione può essere costruito nel caso tridimensionale.

Per lo schema $O(|h|^4)$ nel caso $p = 2, 3$ si possono indicare collezioni di parametri per cui $s_0 = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Nel caso di domini di forma più complicata si usa lo schema (37)-(38) con parametri costanti $\tau^{(1)} = \tau_{s+1/2}$ e $\tau^{(2)} = \tau_{s+1}$.

Supponiamo che $G = G_1$ sia un dominio a gradini composto di rettangoli di lati paralleli agli assi coordinati, dove l_α è il diametro del dominio G_1 nella direzione x_α ($\alpha = 1, 2,$), e che si possa introdurvi la rete $\overline{\omega}_h$ uniforme relativamente a x_1 e x_2 e di passo h_1 e h_2. Gli autovalori dell'operatore $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ appartengono all'intervallo $(\delta_\alpha, \Delta_\alpha)$,

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}.$$

Ponendo $\delta_1 + c_0 = \delta_1'$, $\Delta_1 + c_0 = \Delta_1'$, $\delta_2 - c_0 = \delta_2'$, $\Delta_2 - c_0 = \Delta_2'$ e definendo $\omega = (\delta_2 \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1)/(\delta_1 + \delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2)$ dalla condizione $\delta_1' \Delta_1' = \delta_2' \Delta_2'$, otteniamo per $\tau^{(1)}$ e $\tau^{(2)}$ le seguenti formule:

$$\tau^{(1)} = \frac{\omega}{1 + \omega c_0}, \quad \tau^{(2)} = \frac{\omega}{1 - \omega c_0}, \quad \text{dove} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta_1' \Delta_1'}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta_2' \Delta_2'}}. \tag{43}$$

Il numero di iterazioni è $s_0 = \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} \Big/ \ln \frac{1}{\rho}\right] + 1$, dove

$$\rho = \left(1 + \sqrt{\eta_1'}\right)^{-1} \left(1 - \sqrt{\eta_1'}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{\eta_2'}\right) \left(1 + \sqrt{\eta_2'}\right)^{-1},$$

$$\eta_\alpha' = \delta_\alpha'/\Delta_\alpha', \quad \alpha = 1, 2,$$

cioè $s_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Il metodo a direzione variabile (37)-(38) con parametri costanti $\tau^{(1)} = \tau_{s+1/2}$ e $\tau^{(2)} = \tau_{s+1}$ è comodo anche nel caso di domini di forma più complicata e per le equazioni ellittiche a coefficienti variabili. Nelle formule (43) cambiano le sole espressioni di δ_α e Δ_α.

Tuttavia lo schema longitudinale-trasversale (37)-(38) è applicabile al solo caso bidimensionale. Per numero di iterazioni gli equivale lo schema triangolare variabile a due parametri (« schema del conto corrente » o « metodo esplicito a direzione variabile ») che è idoneo a ogni numero di dimensioni sia per domini di forma complicata, sia per equazioni a coefficienti variabili. Questo

schema si può scrivere nella forma

$$y^{s+1/2} + \omega R_1 y^{s+1/2} = y^s + \omega R_2 y^s + \omega^2 R_1 R_2 y^s + \tau (\Lambda y^s + \varphi) = F^s, \tag{44}$$

$$y^{s+1} + \omega R_2 y^{s+1} = y^{s+1/2} = F^{s+1/2}, \quad s = 0, 1, \ldots, y^{s+1/2}|_{\gamma_h} =$$

$$= y^{s+1}|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{45}$$

dove

$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \qquad R_2 y = -\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{h_\alpha} y_{x_\alpha},$$

p è il numero di dimensioni. Per semplicità, supponiamo che $G = G_0 = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p\}$ sia un parallelepipedo p-dimensionale e la rete ω_h sia uniforme relativamente a ogni x_α,

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

I parametri ω e τ si trovano mediante le formule

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{dove} \quad \gamma_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\eta})},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\omega}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \tag{46}$$

e δ e Δ sono le frontiere dello spettro dell'operatore Λ, che valgono

$$\delta = 4 \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{h_\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}, \qquad \Delta_\alpha = 4 \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{h_\alpha^2}.$$

Precisiamo l'algoritmo che consente di trovare $y^{s+1/2}$ e y^{s+1} mediante le espressioni (44)-(45) per $p = 2$. In questo caso le (44)-(45) danno

$$y^{s+1/2} = K \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\omega}{h_\alpha^2} y_{i_\alpha - 1}^{s+1/2} + F^s \right),$$

$$y^{s+1/2}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad K = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\omega}{h_\alpha^2} + 1 \right)^{-1}, \tag{47}$$

$$y^{s+1} = K \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\omega}{h_\alpha^2} y_{i_\alpha + 1}^{s+1} + F^{s+1/2} \right), \quad y^{s+1}|_{\gamma_h} = \mu(x). \tag{48}$$

Sia $G = G_0 = (0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2)$. Il calcolo di $y^{s+1/2}$ inizia dall'angolo inferiore sinistro (0, 0) e prosegue ora lungo le

righe ora lungo le colonne. Il calcolo di y^{s+1} inizia dall'angolo superiore destro (l_1, l_2) e prosegue ora lungo le righe ora lungo le colonne. Infatti, il valore nel nodo (h_1, h_2) si ottiene immediatamente in base alla formula (47), poiché sono noti $y^{s+1/2}(h_1, 0) = \mu(h_1, 0)$ e $y^{s+1/2}(0, h_2) = \mu(0, h_2)$. Conoscendo $y^{s+1/2}(h_1, h_2)$, si può trovare $y^{s+1/2}(h_1, 2h_2)$ e $y^{s+1/2}(2h_1, h_2)$ e via di seguito. Quindi, si ottengono i valori $y^{s+1/2}$ e y^{s+1} in tutti i nodi $x \in \omega_h$ mediante le formule ricorrenti (47)-(48), con un numero di operazioni proporzionale al numero di nodi. Il numero di iterazioni vale $O\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ *).

*) Per i dettagli si veda A. A. Samarskij, *Introduzione alla teoria degli schemi di differenze*, capitolo VIII, Nauka, Mosca, 1971, dove è data la bibliografia (ed. russa).

Complemento II

FUNZIONI SPECIALI

1. Introduzione. Il metodo di separazione delle variabili per le equazioni alle derivate parziali conduce al problema di Sturm-Liouville. Per le equazioni a coefficienti costanti e condizioni al contorno di prima specie, considerate nei capitoli II, III e V, otteniamo il problema degli autovalori, o problema di Sturm-Liouville:

trovare i valori λ *per cui l'equazione omogenea* $\Delta v + \lambda v = 0$ *nel dominio* T *con la condizione omogenea* $v \mid_{\Sigma} = 0$ *sul contorno* Σ *ha soluzioni non banali* $v(P) \not\equiv 0$ (*autofunzioni*).

Se T è l'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$, il rettangolo $(0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2)$ o il parallelepipedo $(0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3)$, allora le autofunzioni $v_n(P)$ saranno espresse mediante funzioni trigonometriche.

Se T è un cerchio, cilindro o sfera, per determinare le autofunzioni si introducono funzioni speciali: funzioni cilindriche e sferiche.

Consideriamo alcuni casi.

1. *Cerchio* $0 \leqslant r \leqslant r_0$. In coordinate polari (r, φ) abbiamo

$$\Delta_2 v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad 0 < r < r_0, \tag{1}$$

$$v|_{r=r_0} = 0, \quad v \not\equiv 0.$$

Cerchiamo la funzione v sotto la forma $v(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$. Portiamo $v = R\Phi$ nell'equazione e separiamo le variabili:

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \quad \text{dove} \quad \mu = \text{costante}.$$

Ne segue

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0.$$

Essendo univoca la soluzione, $\Phi(\varphi)$ deve essere una funzione periodica, cioè $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Questa condizione dà $\mu = n^2$, dove n è un intero. Ponendo $x = \sqrt{\lambda}\, r$, otteniamo l'equazione delle

funzioni cilindriche, o equazione di Bessel dell'n-esimo ordine

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0,$$

o

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \tag{2}$$

dove $R(r)=y(\sqrt{\lambda}\,r)$. Per $n=0$ otteniamo l'equazione di Bessel d'ordine zero

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=0 \quad \text{o} \quad y''+\frac{1}{x}y'+y=0,$$

che corrisponde al caso di soluzioni del problema (1) le quali godono di simmetria assiale.

Le soluzioni dell'equazione (2) sono dette funzioni cilindriche. All'equazione (2) conducono anche i problemi relativi all'equazione di Laplace e l'equazione d'onda nel caso in cui T è un cilindro circolare.

2. *Sfera* $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$\Delta v+\lambda v=0, \quad 0<r<r_0, \quad v\mid_{r=r_0}=0. \tag{3}$$

In coordinate sferiche abbiamo

$$\Delta v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v, \quad \Delta_{\theta,\varphi}v=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \tag{4}$$

Poniamo $v=R(r)\,w(\theta,\varphi)$ e separiamo le variabili

$$\frac{(r^2R')'+\lambda r^2R}{R}=-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}w}{w}=\mu,$$

da cui segue

$$\Delta_{\theta,\varphi}w+\mu w=0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2R')'+\left(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0, \quad R(r_0)=0. \tag{6}$$

La sostituzione $x=\sqrt{\lambda}\,r$, $y=R/\sqrt{x}$ conduce la (6) all'equazione di Bessel

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0, \quad \nu^2=\mu-\frac{1}{4}.$$

Per la funzione $w(\theta,\varphi)$ definita sulla sfera abbiamo ottenuto l'equazione (5) avente soluzione limitata (funzioni sferiche) soltanto per $\mu=n(n+1)$. Quindi, applicando il metodo di separazione delle variabili all'operatore di Laplace in coordinate

sferiche, otteniamo le funzioni sferiche. Nel caso particolare in cui $w = w(\theta)$ non dipende da φ, l'equazione (5) diventa

$$\frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{dw}{ds}\right)+\mu w=0, \quad \text{dove} \quad s=\cos\theta, \quad -1\leqslant s\leqslant 1. \tag{7}$$

Questa è l'equazione di Legendre avente soluzione limitata (polinomi di Legendre) soltanto per $\mu = n(n+1)$. Le funzioni sferiche si esprimono mediante le derivate dei polinomi di Legendre e le funzioni trigonometriche.

Nella meccanica quantistica spesso si ha a che fare con i polinomi di Čebyšev-Hermite e Čebyšev-Laguerre.

2. Equazione generale della teoria delle funzioni speciali. Le equazioni per le funzioni speciali elementari si possono scrivere sotto la forma

$$Ly+\lambda\rho(x)\,y=0, \quad a<x<b, \quad \rho(x)>0, \tag{8}$$

$$Ly=\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)\,y, \quad k(x)\geqslant 0, \quad q(x)\geqslant 0.$$

Il problema ai limiti elementare $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$, corrispondente al caso $a = 0$, $b = l$, $q = 0$ e $k = \rho = \text{costante}$, definisce le funzioni trigonometriche. Consideriamo le equazioni per le altre funzioni speciali.

1) L'equazione di Bessel (2) o $(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$ corrisponde a $k(x) = x$, $\rho(x) = x$, $q(x) = \frac{n^2}{x}$, $a = 0$, $b = r_0$.

2) Per $k(x) = 1 - x^2$, $\rho = 1$, $q = 0$, $a = -1$ e $b = 1$ otteniamo l'equazione di Legendre

$$[(1 - x^2)\,y']' + \lambda y = 0. \tag{9}$$

3) L'equazione delle funzioni associate di Legendre

$$[(1-x^2)\,y']' - \frac{m^2}{1-x^2}y + \lambda y = 0 \tag{10}$$

corrisponde a $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}$, $\rho = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

4) L'equazione di Čebyšev-Hermite

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad \text{o} \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{11}$$

corrisponde a $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

5) L'equazione di Čebyšev-Laguerre

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0 \quad \text{o} \quad y'' + (1 - x)\,y' + \lambda y = 0 \tag{12}$$

corrisponde a $k(x) = xe^{-x}$, $q = 0$, $\rho = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$.

Il tratto caratteristico delle suddette equazioni è l'annullarsi del coefficiente $k(x)$ almeno in uno degli estremi dell'intervallo

(a, b). Questa proprietà di $k(x)$, come verrà mostrato più avanti, gioca un ruolo importante per l'impostazione dei problemi ai limiti per l'equazione (8).

Consideriamo l'andamento della soluzione dell'equazione (8) in prossimità di un punto singolare, in cui $k(x)$ si annulla.

3. Andamento delle soluzioni nell'intorno di $x = a$ se $k(a) = 0$. Consideriamo il caso in cui a è finito.

Se nell'equazione (8) alla differenza $q(x) - \lambda\rho(x)$ sostituiamo la funzione $q(x)$, tutti i risultati che verranno ottenuti più avanti per l'equazione

$$Ly = (k(x)\, y')' - q(x)\, y = 0, \quad k(x) > 0 \text{ per } a < x < b, \qquad (8')$$

saranno validi anche per l'equazione (8).

Lemma 1. Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (8') il cui coefficiente $k(x)$ ha la forma

$$k(x) = (x - a)\,\varphi(x), \quad \varphi(a) \neq 0, \qquad (13)$$

dove $\varphi(x) > 0$ è una funzione continua in (a, b). Se $y_1(x)$ è una soluzione limitata rappresentabile nella forma

$$y_1(x) = (x - a)^n u(x), \quad n \geqslant 0, \qquad (14)$$

dove $u(x)$ è una funzione continua in (a, b) e $u(a) \neq 0$, allora la seconda soluzione $y_2(x)$ non è limitata per $x \to a$.

Osserviamo che la $y_2(x)$ si può rappresentare come quadratura mediante la soluzione linearmente indipendente $y_1(x)$. Infatti, da $0 = y_2 L y_1 - y_1 L y_2 = [k(y_2 y_2' - y_1 y_2')]'$ segue che il wronskiano delle funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ vale $y_1 y_2' - y_2 y_1' = C/k(x)$, dove $C \neq 0$, poiché $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti. Dopo aver diviso per y_1^2 otteniamo $(y_2/y_1)' = C/k y_1^2$. L'integrazione di questa equazione da x_0 a x dà

$$y_2(x) = y_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} \frac{C\, d\alpha}{k(\alpha)\, y_1^2(\alpha)} + C_1\right], \quad \text{dove } C_1 = \text{costante}.$$

In virtù dell'indipendenza lineare di $y_1(x)$ e $y_2(x)$ si può ritenere che sia $C_1 = 0$. Inoltre, si può porre $C = 1$ poiché una soluzione dell'equazione omogenea è definita a meno di un fattore costante. Come risultato avremo

$$\bar{y}_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{k(\alpha)\, y_1^2(\alpha)},$$

inoltre scegliamo x_0 tale che $y_1(\alpha)$ non si annulli nell'intervallo $a < \alpha < x_0$.

Sostituendo a $k(x)$ e $y_1(x)$ le loro espressioni e usando il teorema della media, troviamo (sostituendo $\overline{y}_2$ in luogo di y_2)

$$y_2(x) = (x-a)^n u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(\alpha-a)^{2n+1} \varphi(\alpha) u^2(\alpha)} =$$

$$= \frac{(x-a)^n u(x)}{\psi(x^*)} \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(\alpha-a)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{(x-a)^n u(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \dfrac{-1}{2n(\alpha-a)^{2n}} \Big|_{x_0}^{x} & \text{per } n > 0, \\ \ln(\alpha-a) \Big|_{x_0}^{x} & \text{per } n = 0, \end{cases} \tag{15}$$

dove $\psi = \varphi(x)\, u^2(x)$, $x^* \in (x, x_0)$. Rappresentiamo $y_2(x)$ nella forma

$$y_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0),$$

dove

$$f_1(x) = \frac{u(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} -\dfrac{1}{2n(x-a)^n} & \text{per } n > 0, \\ \ln(x-a) & \text{per } n = 0; \end{cases}$$

$$f_2(x, x_0) = \frac{u(x)(x-a)^n}{\psi(x^*)} \begin{cases} \dfrac{1}{2n(x_0-a)^{2n}} & \text{per } n > 0, \\ -\ln(x_0-a) & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Si vede di qui che $f_2(x, x_0)$ resta limitata per $x \to a$, mentre $|f_1(x)| \to \infty$ come $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ o come $|\ln(x-a)|$ per $x \to a$. Abbiamo infatti dimostrato il

Lemma 2. Siano soddisfatte le ipotesi del lemma 1. Se $y_1(a) \neq 0$, cioè $n = 0$, allora per $x = a$, $y_2(x)$ ha una singolarità logaritmica

$$y_2(x) \sim \ln(x-a) \quad \text{per} \quad y_1(a) \neq 0 \quad (n = 0).$$

Se $y_1(x)$ ha per $x = a$ uno zero dell'n-esimo ordine, cioè se $y_1(x) = (x-a)^n u(x)$, $n > 0$, allora $y_2(x)$ ha per $x = a$ un polo dell'n-esimo ordine:

$$y_2(x) \sim (x-a)^{-n} \quad \text{se} \quad y_1(x) \sim (x-a)^n, \quad n > 0.$$

Lemma 3. Supponiamo che le ipotesi del lemma 1 siano soddisfatte e che il coefficiente $q(x)$ sia limitato o tenda all'infinito per $x \to a$, di modo che

$$q(x) = \frac{q_0(x)}{(x-a)^\sigma}, \qquad \sigma \geqslant 0, \qquad q_0(a) \neq 0,$$

dove $q_0(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$. Allora per la soluzione limitata $y_1(x)$ della forma (14) si verifica la condizione

$$\lim_{x \to a} k(x) \frac{dy_1}{dx}(x) = 0, \tag{16}$$

se, inoltre, vale la disuguaglianza

$$n > \sigma - 1.$$

Fissiamo infatti un valore x_1 $(a < x_1 < b)$ e integriamo la (8') da x a x_1 $(a < x < x_1)$:

$$k(x) y_1'(x) = k(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} q(\alpha) y_1(\alpha) \, d\alpha = Q(x).$$

Sostituendo le espressioni di $y_1(x)$ e $q(x)$, troviamo

$$Q(x) = k(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{q_0(\alpha) u(\alpha)}{(\alpha - a)^{\sigma - n}} \, d\alpha, \quad n \geqslant 0.$$

Si vede di qui che $Q(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $a \leqslant x \leqslant x_1$ se $\sigma - n < 1$ oppure $n > \sigma - 1$. Passando al limite per $x \to a$ vediamo che esiste il limite $\lim_{x \to a} Q(x) = Q(a)$ e, di conseguenza,

$$\lim_{x \to a} k(x) y_1(x) = Q(a).$$

Mostriamo che $Q(a) = 0$. A tal fine esprimiamo $y_1(x)$ in funzione di $Q(x)$:

$$y_1(x) = y_1(x_1) - \int_x^{x_2} \frac{Q(\alpha)}{k(\alpha)} \, d\alpha = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\alpha)}{(\alpha - a) \varphi(\alpha)} \, d\alpha.$$

Di qui si vede che $y_1(x)$ può essere limitata nel punto $x = a$ sotto la sola condizione che $Q(a) = 0$, da cui deriva la (16).

4. Impostazione dei problemi ai limiti. Passiamo all'impostazione dei problemi ai limiti per l'equazione

$$Ly + \lambda \rho y = 0 \quad \text{e} \quad Ly = 0 \tag{17}$$

nell'intervallo (a, b) su uno o ambedue gli estremi del quale $k(x)$ si annulla. Se $k(a) = 0$ e la condizione (13) è soddisfatta, allora per $x = a$ chiederemo che la soluzione dell'equazione (17) sia limitata nella forma (14). In questo caso non occorre che la soluzione $y(x)$ per $x = a$ assuma un valore dato.

La soluzione generale dell'equazione (17) è $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti qualsiasi dell'equazione (17), A e B sono costanti arbitrarie. Se $y_1(x)$ verifica la condizione di limitatezza (14) per $x = 0$,

allora $y_2(x)$ diventa infinita per $x \to a$ (lemma 1). Perciò dalla condizione di limitatezza (14) che scriveremo formalmente

$$|y(a)| < \infty \tag{18}$$

e chiameremo condizione di limitatezza naturale (poiché è una conseguenza della struttura dell'operatore L), deriva immediatamente $B = 0$.

Come risultato otteniamo il problema ai limiti seguente.

Trovare autovalori e autofunzioni $y(x) \not\equiv 0$ dell'equazione

$$(ky')' - qy + \lambda\rho y = 0, \quad k(x) > 0, \quad a < x < b, \tag{19}$$

dove $k(x)$ ha la forma (13) sotto la condizione di limitatezza (14) o (18) e una condizione consueta, ad esempio, di prima specie:

$$y(b) = 0 \quad \text{per} \quad x = b.$$

Se $k(a) = 0$ e $k(b) = 0$ (per l'equazione di Legendre, ad esempio), allora in ambedue gli estremi dell'intervallo (a, b) si pone la condizione di limitatezza per cui $y_1(x) = (x-a)^{n_1} \times (b-x)^{n_2} u(x)$, dove $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$, $u(a) \neq 0$, $u(b) \neq 0$ e $u(x)$ è una funzione continua in (a, b); questa condizione si scrive formalmente come segue:

$$|y(a)| < \infty, \quad |y(b)| < \infty.$$

Se l'intervallo (a, b) è infinito come, ad esempio, $a = -\infty$ e $b = \infty$, per l'equazione di Čebyšev-Hermite, oppure $a = 0$ e $b = \infty$ per l'equazione di Čebyšev-Laguerre, allora in questo caso per $a = -\infty$ o per $b = \infty$ la condizione di limitatezza (18) va sostituita con un'altra più debole: la soluzione all'infinito non deve crescere più rapidamente di una potenza finita di x.

Formuliamo le proprietà generali delle autofunzioni e degli autovalori del problema ai limiti in esame (18)-(20).

1. Esiste un insieme infinito di autovalori $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ cui corrispondono le autofunzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$, $\ldots$

2. Per $q \geqslant 0$ tutti gli autovalori sono non negativi:

$$\lambda_n \geqslant 0.$$

3. Autofunzioni $y_n(x)$ e $y_m(x)$, corrispondenti ad autovalori distinti λ_n e λ_m, sono mutuamente ortogonali di peso $\rho(x)$:

$$(y_n, y_m) = \int_a^b y_n(x)\, y_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

4. Sussiste il teorema di sviluppabilità seguente: la funzione $f(x)$ si sviluppa in serie assolutamente e uniformemente conver-

gente di autofunzioni $y_n(x)$ del problema in esame:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \qquad f_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)},$$

se: 1) $f(x)$ ha per $a < x < b$ la derivata prima continua e la derivata seconda continua a tratti;

2) $f(x)$ verifica le condizioni al contorno del problema; inoltre, se $k(a) = 0$ allora

$$|f(a)| < \infty \quad \text{per} \quad 0 \leqslant q(a) < \infty,$$

$$f(a) = 0 \qquad \text{per } q(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty.$$

Le proprietà 2 e 3 si dimostrano come nel capitolo II, § 3 mediante le formule di Green. In questo caso si ricorre alla limitatezza della funzione $y_n(x)$ nel punto $x = a$ e all'uguaglianza $\lim_{x \to a} k(x) y_n'(x) = 0$ derivante dal lemma 3, per cui le sostituzioni nelle formule di Green si annullano per $x = a$. La dimostrazione delle proprietà 1 e 4 è basata, di solito, sulla teoria delle equazioni integrali. Affinché le proprietà 1 e 4 siano verificate è sufficiente che $k(x)$ sia una funzione continua e $q(x)$ sia continua o abbia la forma $q_1(x)/(x - a)$, dove $q_1(x)$ è una funzione continua. Queste proprietà sono verificate per la classe delle funzioni speciali studiate più avanti.

Il problema ai limiti (19)-(20) è equivalente all'equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) \, d\xi,$$

dove $K(x, \xi) = G(x, \xi) \sqrt{\rho(x) \rho(\xi)}$, $\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}\, y(x)$ e $G(x, \xi)$ è la funzione di Green per l'operatore L. Nel caso $k(a) = 0$, $k(b) \neq 0$, $y(b) = 0$ la funzione di Green è definita come segue:

1. $G(x, \xi)$ è una funzione continua di x per ξ_1 fissato, $a \leqslant \xi \leqslant b$.

2. La derivata prima $\frac{dG}{dx}$ ha un salto per $x = \xi$:

$$k(x) \frac{dG}{dx}(x, \xi)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = k(\xi) [G'(\xi + 0, \xi) - G'(\xi - 0, \xi)] = -1.$$

3. $L_x G(x, \xi) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo $a < x < b$, tranne il punto $x = \xi$.

4. $G(x, \xi)$ verifica le condizioni al contorno

$$|G(a, \xi)| < \infty, \qquad G(b, \xi) = 0.$$

Dalla definizione di $G(x, \xi)$ segue che $G(x, \xi) > 0$ per $x, \xi \in (a, b)$, $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ (simmetria).

Passiamo ora allo studio di concrete funzioni speciali, ossia delle funzioni cilindriche e sferiche, nonché dei polinomi di Čebyšev-Hermite e di Čebyšev-Laguerre.

FUNZIONI CILINDRICHE

§ 1. Funzioni cilindriche

Risolvendo numerosi problemi di fisica matematica, si ottiene l'equazione differenziale ordinaria

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \\ &\text{ossia} \\ &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

detta *equazione delle funzioni cilindriche dell'n-esimo ordine.* Questa equazione si chiama anche *equazione di Bessel dell'n-esimo ordine.*

Problemi caratteristici (si vedano i capitoli V, VI e VII) che conducono alle funzioni cilindriche sono i problemi ai limiti per l'equazione

$$\Delta u + k^2u = 0 \tag{2}$$

all'esterno o all'interno del cerchio (all'esterno o all'interno de cilindro nel caso di tre variabili indipendenti). Introducendo le coordinate polari riduciamo l'equazione (2) alla forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{3}$$

Ponendo $u = R\Phi$ e separando le variabili nella (3), otteniamo

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

e

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

La condizione di periodicità per $\Phi(\varphi)$ dà $\lambda = n^2$, dove n è un intero. Ponendo quindi $x = kr$, otteniamo l'equazione delle funzioni cilindriche

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \qquad R(r)=y(kr)$$

ossia

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0.$$

Nel caso di soluzioni dell'equazione (2) che godono di simmetria radiale (cilindrica), otteniamo l'equazione di Bessel d'ordine zero

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=0 \quad \text{o} \quad y''+\frac{1}{x}y'+y=0.$$

1. Serie di potenze. L'equazione di Bessel di ordine ν

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{1}$$

o

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \tag{1'}$$

(ν è un numero reale o complesso qualsiasi la cui parte reale possiamo ritenere non negativa) ha un punto singolare per $x = 0$. Questa è la ragione per cui la soluzione $y(x)$ si deve cercare sotto forma di serie di potenze *)

$$y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots), \tag{4}$$

che inizia da x^σ, dove σ è un esponente caratteristico da determinare. Sostituendo la serie (4) nell'equazione (1') ed uguagliando a zero i coefficienti di x^σ, $x^{\sigma+1}$, ..., $x^{\sigma+k}$, otteniamo un'equazione per determinare σ e un sistema di equazioni per determinare i coefficienti a_k:

$$\left.\begin{aligned} a_0 (\sigma^2 - \nu^2) &= 0, \\ a_1 [(\sigma+1)^2 - \nu^2] &= 0, \\ a_2 [(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_k [(\sigma+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} &= 0 \\ (k = 2,\ 3,\ \ldots). & \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

In quanto possiamo supporre che $a_0 \neq 0$, dalla prima equazione (5) segue

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0 \text{ o } \sigma = \pm \nu. \tag{6}$$

Riscriviamo la k-esima equazione (5), $k > 1$, nella forma

$$(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)\, a_k + a_{k-2} = 0. \tag{7}$$

Per il momento trascuriamo il caso in cui $\sigma + \nu$ e $\sigma - \nu$ (e rispettivamente -2ν o 2ν) è un intero negativo.

Allora dalla seconda equazione (5), in virtù della (6), avremo

$$a_1 = 0. \tag{8}$$

L'equazione (7) fornisce una formula ricorrente per determinare a_k in funzione di a_{k-2}:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma+k+\nu)(\sigma+k-\nu)}. \tag{9}$$

*) Si vedano V. V. Stepanov, *Corso di equazioni differenziali*, Fizmatgiz, 1959 (ed. russa); L. E. Elsgolts, *Equazioni differenziali e calcolo delle variazioni*, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1980.

Di qui e dalla (8) concludiamo che tutti i coefficienti dispari sono nulli. Se ν è reale, allora per $\sigma = -\nu$ la soluzione diventa infinita nel punto $x = 0$.

Soffermiamoci sul caso $\sigma = \nu$. Dalla (9) risulta che ogni coefficiente pari può essere espresso in funzione del precedente come segue:

$$a_{2m} = -a_{2m-2} \frac{1}{2^2 m (m+\nu)}. \tag{10}$$

L'applicazione successiva di questa formula consente di trovare l'espressione di a_{2m} in funzione di a_0

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (\nu+1)(\nu+2) \ldots (\nu+m)}. \tag{11}$$

Ricorriamo alla proprietà della funzione gamma $\Gamma(s)$ *)

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \ldots = s(s-1)\ldots(s-n)\,\Gamma(s-n).$$

Se s è un intero, allora

$$\Gamma(s+1) = s!$$

Finora il coefficiente a_0 è arbitrario. Se $\nu \neq -n$, dove $n > 0$ è un intero, ponendo

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

e tenendo conto della suddetta proprietà delle funzioni gamma, otteniamo

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{13}$$

Se, invece, $\sigma = -\nu$, $\nu \neq n$, dove $n > 0$ è un intero, ponendo

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}, \tag{12'}$$

otteniamo

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{14}$$

La serie (3) corrispondente a $\sigma = \nu \geqslant 0$, con coefficienti (12) e (13),

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{15}$$

---

*) B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, Mosca, 1965 (ed. russa).

si chiama *funzione di Bessel di prima specie di ordine* ν. La serie

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \tag{16}$$

corrispondente a $\sigma = -\nu$, rappresenta una seconda soluzione dell'equazione (1), linearmente indipendente da $J_\nu(x)$. Le serie (15) e (16) sono convergenti, evidentemente, nell'intero piano x.

Consideriamo ora il caso in cui ν vale la metà di un intero.

Sia $\nu^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, dove $n \geqslant 0$ è un intero. Ponendo $\sigma = n+\frac{1}{2}$ nella formula (5), otteniamo

$$2(n+1)\,a_1 = 0,$$

$$k(k+2n+1)\,a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k > 1),$$

di modo che

$$a_1 = 0,$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n+1)}.$$

Applicando successivamente questa formula, troviamo

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4 \ldots (2k)(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)}.$$

Ponendo $\nu = n + \frac{1}{2}$, riotteniamo la formula (11).

Ponendo quindi

$$a_0 = \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

riotteniamo la formula (13).

Sia

$$\sigma = -n-\frac{1}{2};$$

allora le equazioni (5) per gli a_k diventano

$$a_1 \cdot 1\,(-2n) = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$k(k-1-2n)\,a_k + a_{k-2} = 0.$$

Tutti i coefficienti $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ sono nulli, come prima, ma per a_{2n+1} otteniamo l'equazione $0 \cdot a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0$ che si verifica qualunque sia a_{2n+1}. Per $k > n$ il coefficiente a_{2k+1} è definito dall'uguaglianza

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-n} a_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)\ldots 2\cdot 4 \ldots (2k-2n)}.$$

Ponendo $a_{2n+1}=0$, $a_0=\dfrac{1}{2^{-n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}$, riotteniamo la formula (14).

Quindi per $\nu=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ la definizione della funzione $J_\nu(x)$ non necessita di nessuna modifica. Le formule (15) e (16) restano valide.

È da notare che la formula (16) definisce $J_{-\nu}(x)$ solo per valori non interi di ν, poiché la definizione di a_0 in base alle formule (12) per $\nu=-n$ intero negativo non ha senso. Prolunghiamo per continuità l'espressione (16) a $\nu=n$ intero. Poiché $\Gamma(k-n+1)=\pm\infty$ per $k\leqslant k_0=n-1$, la sommatoria nella (16) inizia di fatto dai valori $k=k_0+1=n$. Cambiando nella formula (16) l'indice di sommatoria $k=n+k'$, otteniamo

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\,\Gamma(k'+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n}=(-1)^n J_n(x),$$

poiché la sommatoria inizia da $k'=0$.

A titolo di esempio scriviamo le serie per le funzioni di Bessel di prima specie d'ordine zero ($n=0$) e del primo ($n=1$) ordine:

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots,$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\ldots$$

Le funzioni $J_0(x)$ e $J_1(x)$ si incontrano spesso nelle applicazioni e per esse esistono tabelle particolareggiate *). Alla pag. 739 sono dati i grafici di $J_0(x)$ e $J_1(x)$.

Le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ (n intero), come abbiamo visto, sono linearmente dipendenti

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\,J_n(x).$$

Per ν non intero le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Infatti, $J_\nu(x)$ ha uno zero e $J_{-\nu}(x)$ un polo d'ordine ν nel punto $x=0$. Quindi, se ν è un numero non intero, ogni soluzione $y_\nu(x)$ dell'equazione di Bessel (1) può essere rappresentata sotto forma di combinazione lineare delle funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

---

*) Tutte le tabelle delle funzioni speciali contengono sempre quelle per le funzioni di Bessel di prima specie. (Si veda, per esempio, E. Janke, F. Emde, F. Lösch, *Funzioni speciali, formule, grafici, tabelle*, dove $J_0(x)$ e $J_1(x)$ sono date con cinque decimali per i valori di x nell'intervallo da 0 a 14,9.)

Se si cerca una soluzione limitata dell'equazione (1), allora $C_2 = 0$ e
$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x)$ per $\operatorname{Re} \nu > 0$.

2. Formule ricorrenti. Stabiliamo le seguenti relazioni che esistono fra le funzioni di Bessel di prima specie di ordini diversi:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{18}$$

Queste formule si possono provare per derivazione diretta delle serie delle funzioni di Bessel. Mostriamo, ad esempio, la validità della relazione (17)

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = x^\nu \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} 2k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}.$$

Nell'ultima somma k varia da 1 a ∞. Introduciamo un nuovo indice di sommatoria $l = k - 1$ che varierà da 0 a ∞. Allora avremo

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) =$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\Gamma(l+1)\Gamma[l+(\nu+1)+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{[2l+(\nu+1)]} = -J_{\nu+1}(x),$$

ciò che dimostra la formula (17). Analogamente si dimostra la validità della formula (18).

Diamo due casi particolari importanti delle formule ricorrenti. Per $\nu = 0$ dalla (17) segue

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{19}$$

Per il caso $\nu = 1$ la formula (18) dà

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x) \quad \text{o} \quad xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi)\, d\xi. \tag{20}$$

Stabiliamo le formule ricorrenti che legano le funzioni $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ e $J_{\nu-1}(x)$. Dopo la derivazione nelle (17) e (18) otte-

niamo

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x), \tag{17'}$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{18'}$$

Sommando e sottraendo le (17') e (18'), troviamo le formule ricorrenti

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2J'_\nu(x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Le formule (21) consentono di calcolare $J_{\nu+1}(x)$ se sono note $J_\nu(x)$ e $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu J_\nu(x)}{x}. \tag{21'}$$

3. Funzioni di ordine semintero. Scriviamo le espressioni delle funzioni $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2m}, \tag{22}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2+2m}. \tag{23}$$

Tenendo conto della proprietà della funzione gamma, troviamo

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m+1)}{2^{m+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right) &= \frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1)}{2^m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

dove

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Sostituendo le espressioni (24) nelle formule (22) e (23), otteniamo

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \tag{25}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}. \tag{26}$$

È facile vedere che la somma nella (25) rappresenta lo sviluppo di sen x e la somma nella (26) lo sviluppo di cos x secondo le potenze

di x. In tal modo, $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$ si esprimono mediante le funzioni elementari

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x, \tag{27}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{28}$$

Consideriamo le funzioni $J_{n+1/2}(x)$, dove n è un intero. Dalla (21′) segue

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ -\operatorname{sen} x + \frac{3}{x} \left[\operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \operatorname{sen} (x - \pi) \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \cos (x - \pi) \cdot \frac{3}{x} \right\}.$$

Applicando successivamente la formula (21′), troviamo

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \operatorname{sen} \left(x - \frac{n\pi}{2} \right) P_n \left(\frac{1}{x} \right) + \right.$$

$$\left. + \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} \right) Q_n \left(\frac{1}{x} \right) \right\}, \tag{29}$$

dove $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ è un polinomio di grado n in $\frac{1}{x}$ e $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ è un polinomio di grado $n-1$. Notiamo che $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$.

4. Ordine asintotico delle funzioni cilindriche. Le soluzioni dell'equazione di Bessel si chiamano solitamente funzioni cilindriche. Nel n. 1 è stata definita una delle funzioni cilindriche, ossia la funzione di Bessel.

La proprietà fondamentale delle funzioni cilindriche si rivela nel loro andamento per $x \to 0$ e $x \to \infty$ (andamento asintotico). Più avanti verrà mostrato che *ogni funzione cilindrica è definita univocamente dal suo comportamento asintotico per* $x \to \infty$, *e più precisamente, dal termine principale dello sviluppo asintotico.*

Dimostriamo che ogni funzione cilindrica reale per x grande è rappresentabile sotto la forma

$$y_\nu(x) = \gamma_\infty \frac{\operatorname{sen} (x + \delta_\infty)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}} \right), \tag{30}$$

dove $\gamma_\infty \neq 0$, δ_∞ sono delle costanti e $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ indica termini di ordine non inferiore a $\frac{1}{x^{3/2}}$.

Ponendo

$$y = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}, \tag{31}$$

calcolando le derivate $y' = -0{,}5x^{-3/2}v + x^{-1/2}v'$, $y'' = x^{-1/2}v'' - x^{-3/2}v' + 0{,}75x^{-5/2}v$ e sostituendo nell'equazione di Bessel, otteniamo

$$v'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) v = 0, \tag{32}$$

che rappresenta un caso particolare dell'equazione

$$v'' + (1 + \rho(x))\, v = 0, \tag{33}$$

dove

$$\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{34}$$

Poniamo

$$v = \gamma \operatorname{sen}(x + \delta), \quad v' = \gamma \cos(x + \delta) \tag{35}$$

dove $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ sono due funzioni di x; inoltre $\gamma(x) \neq 0$ in ogni punto altrimenti v e v' si annullerebbero contemporaneamente e $v(x)$ sarebbe identicamente nulla. Partendo dalle (35) e (33), avremo

$$v' = \gamma \cos(x + \delta) = \gamma' \operatorname{sen}(x + \delta) + \gamma(\delta' + 1) \cos(x + \delta),$$

$$v'' = \gamma' \cos(x+\delta) - \gamma(\delta'+1) \operatorname{sen}(x+\delta) = -(1+\rho)\gamma \operatorname{sen}(x+\delta).$$

Di qui ricaviamo

$$\delta' = \rho \operatorname{sen}^2(x+\delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\delta'}{\operatorname{tg}(x+\delta)} = -\rho \operatorname{sen}(x+\delta)\cos(x+\delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{37}$$

Mostriamo che esistono valori limite di γ e δ per $x \to \infty$.

Infatti,

$$\delta(x) = \delta(a) - \int_x^a \delta'(s)\, ds,$$

da cui, in virtù della (36), deriva l'esistenza del limite $\lim_{a\to\infty} \delta(a) = \delta_\infty$ e

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{38}$$

Analogamente dalla (37) ricaviamo

$$\gamma(x) = \gamma_\infty \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \tag{39}$$

dove $\gamma_\infty \neq 0$.

In tal modo, ogni soluzione dell'equazione (33) e, di conseguenza, dell'equazione (32) per $x \to \infty$ ha la forma

$$v(x) = \gamma_\infty \operatorname{sen}(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{40}$$

Abbiamo stabilito così la validità della formula asintotica (30) per qualsiasi funzione cilindrica $y_\nu(x)$.

Mostriamo che non possono esistere due funzioni cilindriche distinte col medesimo comportamento asintotico. Supponiamo infatti che $\bar{y}_\nu(x)$ e $\bar{\bar{y}}_\nu(x)$ siano due funzioni cilindriche distinte per le quali

$$\bar{\gamma}_\infty = \bar{\bar{\gamma}}_\infty, \quad \bar{\delta}_\infty = \bar{\bar{\delta}}_\infty. \tag{41}$$

La differenza di queste funzioni

$$\tilde{y}_\nu(x) = \bar{y}_\nu(x) - \bar{\bar{y}}_\nu(x) \not\equiv 0$$

è anch'essa una funzione cilindrica che, in virtù della (41), ha il comportamento asintotico seguente:

$$\tilde{y}_\nu(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Tuttavia ciò contraddice la formula (30) per ogni funzione cilindrica $\tilde{y}_\nu(x)$.

Di conseguenza, $\tilde{y}_\nu(x) \equiv 0$ e $\bar{y}_\nu(x) \equiv \bar{\bar{y}}_\nu(x)$.

Soluzione dell'equazione di Bessel può essere anche una funzione complessa $Z_\nu(x) = \bar{Z}_\nu(x) + i\bar{\bar{Z}}_\nu(x)$, dove $\bar{Z}_\nu(x)$ e $\bar{\bar{Z}}_\nu(x)$ sono funzioni cilindriche reali. Da quanto detto segue che una funzione cilindrica complessa è definita univocamente anch'essa dal suo comportamento asintotico per $x \to \infty$.

I valori delle costanti γ_∞ e δ_∞ vanno determinati mediante studi complementari che danno

$$\gamma_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{per ogni} \quad \nu.$$

Nel § 1, n. 3 per $\nu = n + 1/2$ è stata dedotta la formula (29) dalla quale risulta

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{42}$$

Nel § 4 verrà dedotta una formula asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{43}$$

dove ν è un numero non negativo qualsiasi ($\nu \geqslant 0$). La formula (43) è valida anche per ν arbitrario, di modo che

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{44}$$

§ 2. Problemi ai limiti per l'equazione di Bessel

Il problema ai limiti elementare per l'equazione di Bessel nell'intervallo $[0, r_0]$ è legato al problema degli autovalori della membrana circolare

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$v(r, \varphi)|_{r=r_0} = 0, \quad |v(r, \varphi)| < \infty, \quad v(r, \varphi) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Ponendo $v(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ e separando le variabili (si veda Introduzione alla pag. 636), otteniamo

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0. \tag{4}$$

La condizione di periodicità per $\Phi(\varphi)$ dà $\nu = n^2$, dove n è un intero. Quindi, la funzione $R(r)$ deve essere definita dall'equazione di Bessel

$$\mathcal{L}[R] + \lambda r R = 0 \quad \left(\mathcal{L}[R] = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{n^2}{r}R\right) \tag{5}$$

con la condizione al contorno

$$R(r_0) = 0 \tag{6}$$

e la condizione al contorno di limitatezza naturale nel punto $r = 0$

$$|R(0)| < \infty. \tag{7}$$

Ponendo

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda}\, r, \\ y(x) &= R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad y(x) \not\equiv 0 \tag{9}$$

con le condizioni aggiuntive

$$y(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0, \tag{10}$$

$$|\, y\,(0)\,| < \infty. \tag{11}$$

Di cui troviamo

$$y\,(x) = AJ_n\,(x). \tag{12}$$

In virtù della condizione al contorno $y\,(r_0\sqrt{\lambda}) = 0$ abbiamo

$$J_n\,(\mu) = 0 \quad (\mu = r_0\sqrt{\lambda}). \tag{13}$$

Questa equazione trascendente ha un'infinità di radici reali $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$ *), vale a dire l'equazione (1) ha un'infinità di autovalori

$$\lambda_m^{(n)} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{14}$$

cui corrispondono le autofunzioni

$$R\,(r) = AJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\, r\right) \tag{15}$$

del problema ai limiti (5)-(7).

Dal metodo di costruzione delle autofunzioni si vede che ogni soluzione non banale del problema ai limiti considerato è data dalla formula (15).

Dalla teoria generale delle equazioni della forma $\mathcal{L}[y] + \lambda\rho y = 0$ studiate sopra (si veda Introduzione alla pag. 636) deriva l'ortogonalità del sistema di autofunzioni

$$\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\, r\right)\right\}$$

di peso r:

$$\int_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}\, r\right) J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}\, r\right) r\, dr = 0 \quad \text{per} \quad m_1 \neq m_2. \tag{16}$$

Calcoliamo la norma delle autofunzioni $R_1\,(r) = J_n\,(\alpha_1 r)$, dove $\alpha_1 = \mu_m^{(n)}/r_0$. Calcolando si otterrà la condizione di ortogonalità (16). A tale scopo consideriamo la funzione $R_2\,(r) = J_n\,(\alpha_2 r)$, dove α_2 è un parametro arbitrario.

Le funzioni $R_1\,(r)$ e $R_2\,(r)$ verificano le equazioni

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_1}{dr}\right) + \left(\alpha_1^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_2}{dr}\right) + \left(\alpha_2^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_2 = 0,$$

*) Alla pag. 738 è data la tabella delle radici per l'equazione $J_0\,(\mu) = 0$; in particolare, la prima radice $\mu_1^{(0)} = 2{,}4048$.

dove $R_1(r_0) = 0$ e $R_2(r)$ non soddisfa più a questa condizione al contorno. Sottraendo la seconda equazione dalla prima, moltiplicandole preliminarmente rispettivamente per $R_2(r)$ e $R_1(r)$, integrando quindi rispetto a r da 0 a r_0, avremo

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \int_0^{r_0} rR_1(r) R_2(r)\, dr + [r(R_2R_1' - R_1R_2')]\,|_0^{r_0} = 0,$$

da cui ricaviamo

$$\int_0^{r_0} R_1R_2 r\, dr = -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\,\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0) - r_0 J_n(\alpha_1 r_0)\,\alpha_2 J_n'(\alpha_2 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} =$$

$$= -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\,\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \qquad (17)$$

Passando al limite per $\alpha_2 \to \alpha_1$ ed eliminando l'indeterminazione a secondo membro, otteniamo l'espressione per il quadrato della norma

$$\| R_1 \|^2 = \| J_n(\alpha_1 r) \|^2 = \int_0^{r_0} rR_1^2(r)\, dr = \frac{r_0^2}{2} [J_n'(\alpha_1 r_0)]^2$$

ossia

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr = \frac{r_0^2}{2} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2. \qquad (18)$$

In particolare, il quadrato della norma per la funzione $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$ vale

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right) r\, dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}).$$

Se poniamo $\alpha_2 = \frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} \neq \alpha_1 = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$, dalla formula (17) deriva immediatamente la condizione di ortogonalità (16) delle funzioni di Bessel.

Notiamo che esistono tabelle degli zeri $\mu_m^{(0)}$ della funzione $J_0(\mu)$ e dei valori corrispondenti $J_1(\mu_m^{(0)})$ (si veda la pag. 738). Diamo alcuni dei primi valori di $\mu_m^{(0)}$: $\mu_1^{(0)} = 2{,}4048$, $\mu_2^{(0)} = 5{,}5201$, $\mu_3^{(0)} = 8{,}6531$, $\mu_4^{(0)} = 11{,}7915$.

Dalla formula asintotica del § 2 segue che al crescere dell'indice m dello zero $\mu_m^{(n)}$ la differenza $\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)}$ deve tendere a π. Ciò si può osservare anche per i valori suindicati di $\mu_m^{(0)}$ (per esempio, $\mu_3^{(0)} - \mu_2^{(0)} = 3{,}1330$, $\mu_4^{(0)} - \mu_3^{(0)} = 3{,}1384$, $\mu_7^{(0)} - \mu_6^{(0)} = 3{,}1405$, ecc.).

In virtù delle proprietà generali delle autofunzioni dei problemi ai limiti (pag. 642) sussiste il teorema di sviluppabilità:

ogni funzione $f(r)$ derivabile due volte, limitata per $r = 0$ e nulla per $r = r_0$ può essere sviluppata in serie assolutamente e uniformemente convergente

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right),$$

dove

$$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) r\, dr}{\| J_n \|^2}, \qquad \| J_n \|^2 = \frac{r_0^2}{2} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2.$$

Analogamente si risolve il secondo problema ai limiti per l'equazione di Bessel

$$\mathscr{L}(R) + \lambda r R = 0, \quad R(r) \not\equiv 0,$$
$$R'(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty.$$

Le autofunzioni e gli autovalori saranno espressi dalle formule (15) e (14) nelle quali con $\mu_m^{(n)}$ si deve intendere la radice di indice m dell'equazione

$$J_n'(\mu) = 0.$$

Le autofunzioni del problema sono mutuamente ortogonali di peso r (si veda la (16)) e hanno il quadrato della norma uguale a

$$\int_0^{r_0} J_n^2 \left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0} \right) r\, dr = \frac{r_0^2}{2} \left[1 - \frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2} \right] J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

Si risolve analogamente anche il terzo problema ai limiti. In questo caso per determinare $\mu_m^{(n)}$ si ottiene un'equazione della forma

$$J_n'(\mu) = \mu h J_n(\mu).$$

§ 3. Vari tipi di funzioni cilindriche

1. Funzioni di Hankel. Accanto alle funzioni di Bessel di prima specie $J_\nu(x)$, nelle applicazioni sono molto importanti altri tipi speciali di soluzioni dell'equazione di Bessel, tra cui indichiamo soprattutto le *funzioni di Hankel di prima e di seconda specie* $H_\nu^{(1)}(x)$ e $H_\nu^{(2)}(x)$ che sono soluzioni complesse coniugate dell'equazione di Bessel. Dal punto di vista delle applicazioni fisiche, la caratteristica fondamentale delle funzioni di Hankel sta nel loro andamento asintotico per valori grandi dell'argo-

mento. Perciò definiremo le funzioni di Hankel come funzioni cilindriche aventi l'andamento asintotico seguente:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{2}$$

dove i puntini di sospensione indicano termini infinitesimali di ordine superiore a $1/x$. Le condizioni (1) e (2), in virtù di quanto detto nel § 1, n. 4, definiscono $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ univocamente. Separando le parti reale ed immaginaria, rappresentiamo le funzioni di Hankel nella forma

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{3}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{4}$$

dove le funzioni

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)], \tag{3'}$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)] \tag{4'}$$

hanno l'andamento asintotico

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \tag{5}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \tag{6}$$

che deriva dalle formule (1) e (2).

Come verrà mostrato più avanti (si veda il n. 4 del § 4), la funzione $J_\nu(x)$ qui introdotta è la funzione di Bessel di prima specie studiata nel § 1. La parte immaginaria $N_\nu(x)$ delle funzioni di Hankel si dice *funzione di Neumann* o *funzione cilindrica di seconda specie di ordine* ν.

Le formule (3) e (4) stabiliscono un legame fra le funzioni di Hankel, Bessel e Neumann, analogo al legame esistente fra la funzione esponenziale di argomento immaginario, il seno e il coseno (formula di Eulero). Le formule asintotiche (1), (2), (5) e (6) sottolineano questa analogia.

Studiando le soluzioni dell'equazione delle vibrazioni

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

abbiamo visto che l'ampiezza $v(x, y)$ delle vibrazioni stabili

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, e^{i\omega t}$$

verifica l'equazione d'onda

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = \Delta v + k^2 v = 0 \qquad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right).$$

Se la soluzione dell'equazione d'onda gode della simmetria radiale $v(x, y) = v(r)$, allora, come è stato detto nel § 1, la funzione $v(kr)$ verifica l'equazione di Bessel d'ordine zero.

In tal modo, le funzioni

$$H_0^{(1)}(kr)\, e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(\omega t + kr)}\, \frac{1}{\sqrt{i}} + \ldots \qquad \left(\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}\right), \tag{7}$$

$$H_0^{(2)}(kr)\, e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(\omega t - kr)}\, \sqrt{i} + \ldots \tag{8}$$

sono soluzioni dell'equazione delle vibrazioni aventi il carattere di onde cilindriche. La funzione $H_0^{(2)}(kr)\, e^{i\omega t}$ corrisponde alle onde cilindriche divergenti, e la funzione $H_0^{(1)}(kr)\, e^{i\omega t}$ alle onde cilindriche convergenti *).

La seconda proprietà importante delle funzioni cilindriche sta nel loro comportamento per $x \to 0$. In virtù del lemma 1 dell'Introduzione (pag. 639), le funzioni $H_\nu^{(1),\,(2)}$ e N_ν per $x \to 0$ diventano infinite (poiché $J_\nu(0)$ è finita), e più precisamente $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$, $N_0(x) \sim \ln \frac{1}{x}$ poiché $J_0(0) = 1 \neq 0$; $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$, $N_\nu(x) \sim \frac{1}{x^\nu}$ per $\nu > 0$ poiché $J_\nu(x) \sim x^\nu$ per $x \to 0$.

Le funzioni di Hankel e Neumann d'ordine zero sono soluzioni fondamentali dell'equazione $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ poiché hanno una singolarità logaritmica essenziale per $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ (si veda il capitolo VII). Diamo (senza dimostrazione) le espressioni precise dei termini principali dello sviluppo di queste funzioni nell'intorno del punto $x = 0$:

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \ldots, \qquad H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \ldots,$$

$$H_0^{(2)} = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} \ldots$$

2. Funzioni di Hankel e di Neumann. Come è stato notato nel n. 1, ogni soluzione dell'equazione di Bessel di ordine non intero si esprime mediante le funzioni J_ν e $J_{-\nu}$. Stabiliamo una relazione fra le funzioni $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, N_ν a J_ν, $J_{-\nu}$.

Poiché ogni soluzione dell'equazione di Bessel per ν non intero si può rappresentare sotto forma di combinazione lineare delle funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$, allora

$$H_\nu^{(1)}(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \tag{9}$$

*) Se consideriamo il fattore temporale $e^{-i\omega t}$, allora $H_0^{(1)}(kr)\, e^{-i\omega t}$ corrisponde alle onde divergenti e $H_0^{(2)}(kr)\, e^{-i\omega t}$ a quelle convergenti.

dove C_1 e C_2 sono due costanti da determinare. Per i termini principali degli sviluppi asintotici si verifica, evidentemente, l'uguaglianza analoga

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right). \tag{10}$$

Trasformiamo l'argomento del secondo termine nella forma $\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+\pi\nu\right] =$$

$$= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\cos\pi\nu - \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\pi\nu.$$

Dividendo per $\sqrt{2/\pi x}$ i due membri dell'uguaglianza (10) e applicando al primo membro la formula di Eulero, otteniamo

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= (C_1 + C_2\cos\pi\nu)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- C_2 \operatorname{sen}\pi\nu \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right),$$

da cui

$$C_1 + C_2\cos\pi\nu = 1, \qquad -C_2\operatorname{sen}\pi\nu = i$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{i\operatorname{sen}\pi\nu}\,; \\ C_1 &= -\frac{\cos\pi\nu - i\operatorname{sen}\pi\nu}{i\operatorname{sen}\pi\nu} = -C_2 e^{-i\pi\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Sostituendo l'(11) nella (9) troviamo

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{i\operatorname{sen}\pi\nu}\left[J_\nu(x)\, e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right]. \tag{12}$$

Analogamente

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i\operatorname{sen}\pi\nu}\left[J_\nu(x)\, e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right]. \tag{13}$$

Usando la formula (4') che definisce $N_\nu(x)$, dalle (12) e (13) ricaviamo

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\pi\nu}. \tag{14}$$

Le formule (12), (13) e (14) sono dedotte per ν non intero. Per i valori interi $\nu = n$ le funzioni di Hankel e di Neumann si possono determinare in base alle (12), (13) e (14) mediante il passaggio al limite per $\nu \to n$. Passando in queste formule al limite per $\nu \to n$ ed eliminando l'indeterminazione mediante la regola ben nota, avremo

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right], \quad (12')$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right], \quad (13')$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \quad (14')$$

Usando la rappresentazione delle funzioni J_ν e $J_{-\nu}$ sotto forma di serie di potenze, si possono ottenere rappresentazioni analoghe per $N_\nu(x)$ e anche per $H_\nu^{(1)}(x)$ e $H_\nu^{(2)}(x)$.

Le formule (12) e (13) si possono considerare come una definizione analitica delle funzioni di Hankel. Esistono, però, anche altri modi per introdurre le funzioni di Hankel. Nel § 6 sarà data una rappresentazione delle funzioni di Hankel sotto forma di integrali di contorno.

Se $\nu = n + 1/2$, le funzioni di Hankel e di Neumann si esprimono in forma finita mediante funzioni elementari. In particolare, per $\nu = 1/2$ abbiamo

$$N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = J_{1/2}(x) + iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + i\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$H_{1/2}^{(2)}(x) = J_{1/2}(x) - iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - i\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Funzioni di argomento immaginario. Le funzioni cilindriche si possono considerare sia per valori reali che per valori complessi dell'argomento. Considereremo qui funzioni cilindriche di prima specie con argomento immaginario puro.

Sostituendo x con ix nella serie che definisce $J_\nu(x)$, otteniamo

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, i^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x), \quad (15)$$

dove

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{16}$$

è una funzione reale legata a $J_\nu(ix)$ dalla relazione

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad \text{o} \quad I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i} J_\nu(ix).$$

In particolare, per $\nu = 0$ si ha

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \tag{17}$$

La serie (16) mostra che le $I_\nu(x)$ sono funzioni crescenti monotonamente e aventi per $x = 0$ uno zero di ordine ν. Usando la formula asintotica (5), concludiamo che per $I_\nu(x)$ deve sussistere la formula asintotica

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x \tag{18}$$

per valori grandi dell'argomento x.

Si introduce analogamente $I_{-\nu}(x)$. Le funzioni I_ν e $I_{-\nu}$ sono linearmente indipendenti per ν non intero poiché, nel punto $x = 0$, $I_\nu(x)$ ($\nu > 0$) ha uno zero di ordine ν e $I_{-\nu}(x)$ un polo $x^{-\nu}$. Se $\nu = n$ è un intero, allora $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Le funzioni cilindriche di argomento immaginario sono soluzioni dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{19}$$

e, in particolare, la funzione $I_0(x)$ verifica l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0. \tag{20}$$

Oltre alla funzione $I_\nu(x)$ si considera anche la funzione di Macdonald $K_\nu(x)$ definita mediante la funzione di Hankel di argomento immaginario puro

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\pi\nu i} H_\nu^{(1)}(ix). \tag{21}$$

$K_\nu(x)$ è una funzione reale di x. Infatti, le formule (12) e (13) danno

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\,\text{sen}\,\pi\nu}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right] \quad \text{per} \quad \nu \neq n,$$

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\left(\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \tag{22}$$

Usando l'espressione asintotica di $H_\nu^{(1)}$, troviamo

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots \tag{23}$$

Le formule (23) e (18) mostrano che le funzioni $K_\nu(x)$ decrescono esponenzialmente e le $I_\nu(x)$ crescono esponenzialmente per $x \to \infty$. Ne segue l'indipendenza lineare di queste funzioni e anche la possibilità di rappresentare ogni soluzione dell'equazione (19) sotto forma di combinazione lineare

$$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x).$$

In particolare, se y è limitata all'infinito, allora $A = 0$ e $y = BK_\nu(x)$; se, invece, y è limitata per $x = 0$, allora $B = 0$ e $y = AI_\nu(x)$.

Dall'indipendenza lineare di I_ν e K_ν segue che $K_\nu(x)$ per $x = 0$ ha un polo di ordine ν ($K_\nu \sim x^{-\nu}$) per $\nu \neq 0$ e una singolarità logaritmica per $\nu = 0$. Nel n. 4 è stato mostrato che

$$K_0(x) = \ln\frac{1}{x} + \ldots \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Nella fig. 107 di pag. 740 sono rappresentati i grafici delle funzioni $I_0(x)$ e $K_0(x)$. A differenza di $J_\nu(x)$ e $N_\nu(x)$, le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ sono monotone ($I_\nu(x)$ cresce e $K_\nu(x)$ decresce all'aumentare di x).

Molto importante è la funzione

$$K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix).$$

4. La funzione $K_0(x)$. Mostriamo che per la funzione $K_0(x)$ è valida l'equazione integrale seguente:

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch}\xi}\, d\xi \qquad (x > 0). \tag{24}$$

È facile vedere che l'integrale

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch}\xi}\, d\xi \tag{24'}$$

verifica l'equazione

$$\mathscr{L}(y) = y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0. \tag{25}$$

Infatti,

$$\mathscr{L}(F) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch}\xi}\left(\operatorname{ch}^2\xi - \frac{1}{x}\operatorname{ch}\xi - 1\right) d\xi =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch}\xi} \operatorname{sh}^2\xi\, d\xi - \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch}\xi} \operatorname{ch}\xi\, d\xi = S_1 - S_2.$$

Integrando per parti il secondo termine, otteniamo

$$S_2 = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{ch} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} \xi}{x} e^{-x \operatorname{ch} \xi} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{sh}^2 \xi \, d\xi = S_1,$$

da cui segue

$\mathscr{L}(F) = 0$.

Ponendo $\operatorname{ch} \xi = \eta$, trasformiamo l'integrale (24′) per $F(x)$ in

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \, d\eta.$$

Questa formula permette di precisare l'andamento della funzione $F(x)$ por $x \to \infty$. Effettuando ancora una volta una sostituzione della variabile

$x(\eta - 1) = \xi$,

otteniamo

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi \left(\frac{\xi}{x} + 2 \right)}} \, d\xi = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} F_1(x).$$

Per $x \to \infty$

$$\lim F_1(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}} \, d\xi = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \qquad (t = \sqrt{\xi}).$$

Di conseguenza, per grandi valori di x

$$F_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1 + \varepsilon),$$

dove $\varepsilon \to 0$ per $x \to \infty$. Di qui ricaviamo la formula asintotica

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + \ldots, \tag{26}$$

dove i puntini di sospensione indicano termini infinitesimali di ordine superiore. Introdotta mediante l'integrale (24′) la funzione $F(x)$ è soluzione dell'equazione (25), limitata all'infinito e perciò

$F(x) = BK_0(x)$.

Dal confronto delle formule asintotiche delle funzioni $K_0(x)$ e $F_0(x)$ risulta $B = 1$ e, di conseguenza,

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \, d\xi \qquad (x > 0). \tag{24}$$

Vediamo quale è il carattere della funzione $K_0(x)$ per $x \to 0$.

Rappresentiamo l'integrale

$$K_0(x) = F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2-1}}\, d\eta$$

nella forma

$$K_0(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\, d\lambda \qquad (x\eta = \lambda).$$

Spezzando questo integrale in tre parti

$$K_0(x) = \int_x^A \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} + \int_x^A \frac{(e^{-\lambda}-1)\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} + \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}},$$

dove A è una costante ausiliaria, vediamo che il primo addendo vale

$$\ln \frac{A+\sqrt{A^2-x^2}}{x} = -\ln x + \ldots,$$

mentre il secondo e il terzo addendo sono limitati per $x \to 0$. Ne segue che

$$K_0(x) = -\ln x + \ldots = \ln \frac{1}{x} + \ldots, \tag{27}$$

dove i puntini di sospensione indicano termini che restano finiti per $x = 0$. Quindi, la funzione $K_0(x)$ è soluzione dell'equazione (25), la quale ha una singolarità logaritmica nel punto $x = 0$ e decresce esponenzialmente per $x \to \infty$.

Il problema che segue dà un'interpretazione fisica della funzione $K_0(x)$. Supponiamo che nell'origine delle coordinate agisca una sorgente stazionaria di gas instabile di intensità Q_0. Il processo stazionario di diffusione è accompagnato dalla disintegrazione del gas e descritto dall'equazione

$$\Delta u - \varkappa^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \varkappa^2 u = 0 \qquad \left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D^2}\right), \tag{28}$$

dove β è il coefficiente di disintegrazione, D il coefficiente di diffusione. La funzione di sorgente di questa equazione gode di simmetria circolare e, quindi, verifica l'equazione

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) - u = 0 \qquad (x = \varkappa r);$$

inoltre, la funzione di sorgente ha una singolarità logaritmica nell'origine delle coordinate ed è limitata all'infinito. Ne segue che la funzione di sorgente è proporzionale a $K_0(\varkappa r)$:

$$\overline{G} = A\, K_0(\varkappa r). \tag{29}$$

Per determinare il fattore A, ricorriamo alla condizione della sorgente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varepsilon} \left(-D\frac{\partial u}{\partial r}\right) ds = Q_0, \tag{30}$$

dove l'integrale a primo membro esprime il flusso di diffusione attraverso la circonferenza K_ε di raggio ε e centro nella sorgente. Sostituendo in questa

condizione, in luogo di u, la funzione $\overline{G} = AK_0(\varkappa r)$ e tenendo conto della singolarità logaritmica della funzione $K_0(x)$ per $x = 0$, otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ - \int_{K_\varepsilon} D \frac{\partial \overline{G}}{\partial r} \, dS \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ D 2\pi\varepsilon A \frac{1}{\varepsilon} \right\} = 2\pi AD = Q_0.$$

Di qui

$$A = \frac{Q_0}{2\pi D}$$

e

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(\varkappa r). \tag{31}$$

Si può ottenere la formula integrale (24) per $K_0(x)$ partendo da considerazioni fisiche semplici.

Consideriamo il problema non stazionario della diffusione di gas accompagnata da disintegrazione. Nell'origine delle coordinate sia collocata una sorgente di intensità costante Q_0, agente a partire dall'istante $t = 0$. Supporremo che all'istante iniziale $t = 0$ la concentrazione di gas sia ovunque nulla. La concentrazione $u(x, y, t)$ deve verificare l'equazione

$$D \Delta u - \beta u = u_t \tag{32}$$

con condizioni aggiuntive corrispondenti. L'equazione (32) si riduce mediante la sostituzione

$$u = \tilde{u} e^{-\beta t}$$

all'usuale equazione della diffusione

$$D \Delta \tilde{u} = \tilde{u}_t,$$

per la quale la funzione di influenza della sorgente puntuale ha la forma

$$\tilde{G} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}} \quad (D = a^2).$$

Quindi, la funzione di influenza della sorgente puntuale istantanea per l'equazione (32) vale

$$G = \frac{Q}{(2\sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)}.$$

La funzione di influenza della sorgente di intensità Q_0 agente senza interruzione da $t = 0$ all'istante t è data dalla formula

$$G = Q_0 \int_0^t \frac{1}{4\pi D(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)} \, d\tau.$$

Introducendo la nuova variabile

$$\theta = t - \tau,$$

otteniamo

$$G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

La funzione di sorgente corrispondente al problema stazionario della diffusione può essere trovata mediante il passaggio al limite per $t \to \infty$ nella formula precedente

$$\overline{G} = \lim_{t\to\infty} G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4D}\frac{1}{\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Mediante la sostituzione

$\theta = Ce^{\xi}$,

dove C è una costante, trasformiamo questo integrale in

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{r^2}{4DC} e^{-\xi} + \beta C e^{\xi}\right]} d\xi.$$

Chiedendo che sia soddisfatta l'uguaglianza

$$\frac{r^2}{4DC} = \beta C,$$

troviamo

$$C = \frac{r}{2\sqrt{\beta D}} \quad \text{e} \quad \frac{r^2}{4DC} = \beta C = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{\varkappa r}{2} \quad \left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D}\right).$$

Ne segue che la funzione stazionaria di sorgente ha la forma

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa r \operatorname{ch}\xi} d\xi = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-\varkappa r \operatorname{ch}\xi} d\xi = \frac{Q_0}{4\pi D} K_0(\varkappa r).$$

In tal modo, il problema qui considerato conduce alla rappresentazione integrale (24) per la funzione $K_0(x)$.

§ 4. Rappresentazione delle funzioni cilindriche sotto forma di integrali di contorno

1. Integrali di contorno. Consideriamo l'equazione delle vibrazioni $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) = a^2\Delta_2 u$ e cerchiamo la soluzione nella forma $u(x, y, t) = v(x, y)\, e^{i\omega t}$; per $v(x, y)$ otteniamo l'equazione $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ $(k = \omega/a)$. Le sue soluzioni particolari sono rappresentate dalle funzioni $v = e^{\pm ikx}$ e $v = e^{\pm iky}$, ossia dalle ampiezze delle onde piane $u = e^{i(\omega t \pm kx)}$ e $u = e^{i(\omega t \pm ky)}$ propagantisi rispettivamente lungo gli assi x e y. Un'onda piana propagantesi nella direzione l ha, evidentemente. la forma

$$v = e^{-ik(lr)} = e^{-ik(x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi)} = e^{-ikr\cos(\varphi-\alpha)},$$

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\operatorname{sen}\alpha, \quad l = l(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi).$$

Se $\alpha = \pi/2$, allora sull'asse y l'ampiezza dell'onda incidente sotto l'angolo φ l'asse x vale

$$v = e^{-ikr \operatorname{sen} \varphi}. \tag{1}$$

Cercheremo la soluzione $Z_\nu(x)$ dell'equazione di Bessel

$$L(y) = x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \tag{2}$$

come sovrapposizione di onde della forma (1), supponendo $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ complesse e ponendo $kr = x$. Poniamo

$$Z_\nu(x) = \int_C K(x, \varphi)\, \Phi_\nu(\varphi)\, d\varphi = \int_C e^{-ix \operatorname{sen} \varphi} \Phi_\nu(\varphi)\, d\varphi, \tag{3}$$

dove C è un contorno nel piano $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $K(x, \varphi) = e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ e $\Phi_\nu(\varphi)$ è un fattore di fase da determinare. Consideriamo C in modo tale che l'integrale (3) sia convergente, e $\Phi_\nu(\varphi)$ sia tale che questo integrale verifichi l'equazione di Bessel. Determiniamo dapprima $\Phi_\nu(\varphi)$ supponendo che l'integrale (3) sia convergente e che lo si possa derivare sotto il segno di integrale. Calcoliamo $L(K)$. Notando che $K_\varphi = -ix \cos \varphi K$, $K_{\varphi\varphi} = ix \operatorname{sen} \varphi K - x^2 \cos^2 \varphi K$, $K_x = -i \operatorname{sen} \varphi K$, $K_{xx} = -\operatorname{sen}^2 \varphi K$, otteniamo $x^2 K_{xx} + x K_x + x^2 K = K(x^2 \cos^2 \varphi - ix \operatorname{sen} \varphi) = -K_{\varphi\varphi}$, $L(K) = -(\nu^2 K + K_{\varphi\varphi})$ e, di conseguenza,

$$L(Z_\nu) = -\int_C (K_{\varphi\varphi} + \nu^2 K)\, \Phi_\nu(\varphi)\, d\varphi.$$

Integriamo per parti, supponendo che le sostituzioni si annullino (all'infinito se il contorno va all'infinito):

$$L(Z_\nu) = -\int_C \{\Phi_\nu'' + \nu^2 \Phi_\nu\} K\, d\varphi - \int_C \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \Phi_\nu \frac{\partial K}{\partial \varphi} - K \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \varphi} \right\} d\varphi =$$

$$= -\int_C \{\Phi_\nu'' + \nu^2 \Phi_\nu\} K\, d\varphi.$$

Affinché sia $L(Z_\nu) = 0$, è sufficiente che sia

$$\Phi_\nu'' + \nu^2 \Phi = 0.$$

Poniamo $\Phi_\nu = e^{i\nu\varphi}$. Allora $Z_\nu(x) = \int_C e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi$. Per la convergenza di questo integrale è sufficiente che sia

$$\operatorname{Re}(ix \operatorname{sen} \varphi) = \operatorname{Re}(ix \operatorname{sen}(\varphi_1 + i\varphi_2)) = -x \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 > 0$$

$(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2)$.

Questa condizione è soddisfatta per $x > 0$ se

$$\varphi_2 < 0, \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

ovvero $\varphi_2 > 0$,

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$k = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \tag{4}$$

Nella fig. 95 i domini che devono essere percorsi dal contorno sono tratteggiati. Come C si può considerare ogni contorno i cui rami asintotici giacciono nei domini tratteggiati.

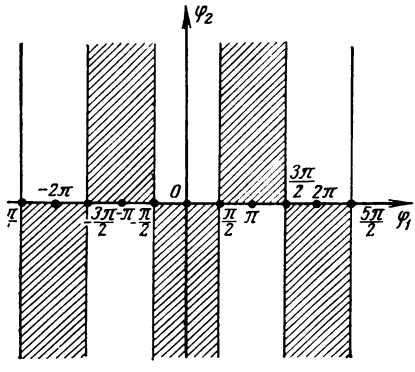


Fig. 95

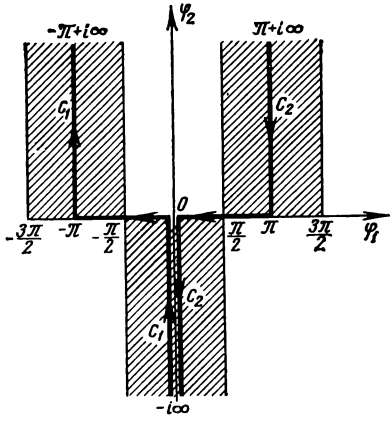


Fig. 96

2. Funzioni di Hankel. Consideriamo due contorni: C_1 composto dalla semiretta $(-i\infty, 0)$, il segmento $(0, -\pi)$ e la semiretta $(-\pi, -\pi + i\infty)$ e il contorno $C_2 = (i\infty + \pi, \pi) + (\pi, 0) + (0, -i\infty)$ (fig. 96). Gli integrali corrispondenti (3) definiscono le funzioni cilindriche

$$H_\nu^{(k)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_k} e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi} \, d\varphi, \quad k = 1, \ 2. \tag{5}$$

Nel n. 4 verrà mostrato che le funzioni $H_\nu^{(k)}(x)$ definite mediante gli integrali di contorno (5) coincidono con le funzioni di Hankel introdotte nel § 2. A tale scopo è sufficiente convincersi che le funzioni (5) abbiano l'andamento asintotico

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \, e^{i\alpha_\nu} + \ldots, \quad H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \, e^{-i\alpha_\nu} + \ldots,$$

$$\alpha_\nu = x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

Partendo dalla definizione (5) delle funzioni di Hankel $H_\nu^{(1,\ 2)}(x)$, si possono ottenere per esse le formule ricorrenti

$$H_{\nu+1}^{(k)} + H_{\nu-1}^{(k)} = \frac{2\nu}{x} H_\nu^{(k)}, \quad H_{\nu+1}^{(k)} - H_{\nu-1}^{(k)} = -2H_\nu^{(k)\prime}(x), \quad k = 1, \ 2.$$

Deduciamo la prima formula. Osservando che $\Phi_{\nu+1} + \Phi_{\nu-1} = 2\cos\varphi\Phi_\nu$, $\Phi_\nu = e^{i\nu\varphi}$, e integrando per parti, troviamo

$$H^{(k)}_{\nu+1}(x) + H^{(k)}_{\nu-1}(x) = -\frac{2}{\pi}\int_{C_k} e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+i\nu\varphi}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{2\nu}{x\pi}\int_{C_k} e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+i\nu\varphi}\, d\varphi = \frac{2\nu}{x} H^{(k)}_\nu(x).$$

Dalla formula (5) e dell'espressione $J_\nu(x) = \frac{1}{2}(H^{(1)}_\nu + H^{(2)}_\nu)$ si può ricavare una rappresentazione sotto forma di integrale di contorno per la funzione di Bessel $J_\nu(x)$, ponendo

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}(H^{(1)}_\nu(x) + H^{(2)}_\nu(x)) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_0} e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+i\nu\varphi}\, d\varphi, \tag{7}$$

dove $C_0 = C_1 + C_2$ è il contorno composto dalla semiretta $(\pi + i\infty,\ 0)$, dal segmento $(\pi,\ -\pi)$ e dalla semiretta $(-\pi,\ -\pi + i\infty)$. La direzione del percorso è indicata nella fig. 96.

Per convincersi che l'integrale (7) coincida effettivamente con la funzione di Bessel introdotta nel § 1, si deve mostrare che esso si sviluppa nella serie di potenze (15) del § 1. A tal fine avremo bisogno di alcune proprietà della funzione gamma.

3. Alcune proprietà della funzione gamma. Come è noto, la funzione gamma $\Gamma(s)$ è l'integrale

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\, dx, \tag{8}$$

dove s è, in generale, un argomento complesso e $\operatorname{Re} s > 0$. Oltre alle proprietà elementari *)

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \text{ ecc.}$$

avremo bisogno della proprietà

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi s}. \tag{9}$$

Infatti,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+t)}x^{s-1}t^{-s}\, dx\, dt.$$

Consideriamo questo integrale come doppio e operiamo una sostituzione di variabili ponendo $\xi = x + t$ e $\eta = x/t$. Calcolando

*) B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrali multipli e serie*, Nauka, Mosca 1965 (ed. russa).

$\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x = -(1+\eta)/t$, otteniamo $dx\,dt = -\frac{t}{1+\eta}\,d\xi\,d\eta$ e

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi} \eta^{s-1} \frac{d\xi\,d\eta}{1+\eta} = \int_0^\infty \frac{\eta^{s-1}\,d\eta}{1+\eta}.$$

L'integrale a secondo membro si calcola mediante i residui e vale $\pi/\text{sen}\,\pi s$ *).

Per la funzione gamma ha luogo la seguente rappresentazione sotto forma di integrale di contorno (integrale di Riemann-Hankel):

$$\Gamma(s) = (e^{i2\pi s} - 1)^{-1} \int_\gamma e^{-\varphi} \varphi^{s-1}\,d\varphi, \tag{10}$$

dove γ è un contorno qualsiasi (nel piano della variabile complessa $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$) della forma indicata nella fig. 97; questo con-

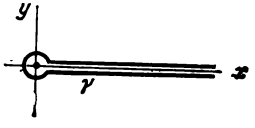


Fig. 97

torno parte da $+\infty$, aggira il punto $\varphi = 0$ e ritorna a $+\infty$. La funzione integranda $f(\varphi) = e^{-\varphi}\varphi^{s-1} = e^{-\varphi} e^{(s-1)\ln\varphi}$ della variabile complessa φ ha il punto di diramazione $\varphi = 0$. Facciamo un taglio lungo la parte positiva dell'asse reale e poniamo $\arg\varphi = 0$ sull'orlo superiore del taglio e $\arg\varphi = 2\pi$ sull'orlo inferiore. In virtù del teorema di Cauchy il contorno γ si può deformare a piacere, lasciando invariato il valore dell'integrale $\int_\gamma f(\varphi)\,d\varphi$ conservando il percorso attorno al punto $\varphi = 0$ e mantenendo gli estremi del contorno a $+\infty$. In qualità di γ consideriamo un contorno composto dalla semiretta $(+\infty, \varepsilon)$ sull'orlo superiore del taglio, dalla circonferenza C_ε di centro $\varphi = 0$ e raggio ε e, infine, dalla semiretta $(\varepsilon, +\infty)$ lungo l'orlo inferiore del taglio. Allora $f(\varphi) = e^{-\varphi+(s-1)\ln\varphi}$ sull'orlo superiore e $f(\varphi) = e^{(s-1)2\pi i - \varphi + (s-1)\ln\varphi}$ sull'orlo inferiore dove $\ln\varphi$ assume valori reali, di modo che si ha

$$\int_\gamma e^{-\varphi}\varphi^{s-1}\,d\varphi = \int_\infty^\varepsilon e^{-x}x^{s-1}\,dx +$$

$$+ e^{(s-1)\,2\pi i} \int_\varepsilon^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx + \int_{C_\varepsilon} e^{-\varphi}\varphi^{s-1}\,d\varphi. \tag{11}$$

*) M. A. Lavrentjev, B. V. Šabat, *Metodi di teoria delle funzioni di variabile complessa*, Fizmatgiz, 1958 (ed. russa).

Mostriamo che l'integrale su C_ε tende a zero per $\varepsilon \to 0$ se $\operatorname{Re} s > 0$. Infatti, sul contorno C_ε il modulo $|e^{-\varphi}|$ è limitato,

$$|\varphi^{s-1}| = e^{(s_0-1)\ln|\varphi| - s_1 \arg\varphi} = \varepsilon^{s_0-1} e^{-s_1 \arg\varphi}, \quad s = s_0 + is_1$$

e

$$\left| \int_{C_\varepsilon} e^{-\varphi} \varphi^{s-1}\, d\varphi \right| \leqslant A 2\pi \varepsilon^{s_0} e^{-s_1 \arg\varphi} \to 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0 \quad (s_0 > 0).$$

Pertanto il passaggio al limite (11) conduce alla formula (10).

La formula (10) definisce la funzione analitica $\Gamma(s)$ a destra dell'asse immaginario. In virtù del prolungamento analitico la

Fig. 98

formula (10) resta valida in tutto il piano e la $\Gamma(s)$ viene rappresentata come quoziente di due funzioni intere. Per $s = -n$ $(n \geqslant 0)$ la funzione $\Gamma(s)$ ha dei poli.

È valida la formula

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_\gamma e^{-\varphi} \varphi^{-s-1}\, d\varphi, \tag{12}$$

la quale deriva dalle (9) e (10). Infatti,

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{\operatorname{sen} \pi(s+1)}{\pi} \Gamma(-s) = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \Gamma(-s) =$$

$$= \frac{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}}{2\pi i\,(e^{-2\pi i s} - 1)} \int_\gamma e^{-\varphi} \varphi^{-s-1}\, d\varphi = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_\gamma e^{-\varphi} \varphi^{-s-1}\, d\varphi.$$

4. Rappresentazione integrale della funzione di Bessel. Mostriamo ora che la funzione

$$J_\nu(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi \tag{13}$$

si sviluppa nella serie (15) del § 1. A tale scopo trasformiamo il contorno C_0 (si veda la pag. 670) ponendo $\rho = \frac{x}{2} e^{-i(\varphi - \pi)}$ $(x > 0)$. Dalla tabella

φ	$i\infty + \pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\pi$	$-\pi + i\infty$
ρ	∞	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\frac{x}{2} e^{i\pi}$	$\frac{x}{2} e^{i2\pi}$	∞

si vede che C_0 si trasforma nel contorno γ rappresentato nella fig. 98, composto dalla semiretta $(+\infty,\ x/2)$, dalla circonferenza C^* di raggio $0{,}5x$ e dalla semiretta $(0{,}5x,\ +\infty)$. Calcoliamo

$$-ix\operatorname{sen}\varphi = -\frac{ix}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2\rho}e^{i\pi}-\frac{2\rho}{x}e^{-i\pi}\right) = \frac{x^2}{2\rho}-\rho$$

e trasformiamo l'integrale (13) in

$$J_\nu(x) = -\frac{i}{2\pi}\int_\gamma e^{-\rho+\frac{x^2}{4\rho}}\left(\frac{x}{2\rho}\right)^\nu e^{i\pi\nu}\frac{2\rho}{\rho}\quad\left(d\varphi=\frac{i\,d\rho}{\rho}\right). \tag{14}$$

Sviluppiamo $\exp(x^2/4\rho)$ in serie di potenze e sostituiamo nella (14):

$$J_\nu(x) = -\frac{i}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0{,}5x)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)}e^{i\pi\nu}\int_\gamma e^{-\rho}\rho^{-(k+\nu+1)}\,d\rho.$$

Usando quindi la formula (12) per $1/\Gamma(k+\nu+1)$, otteniamo

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

In tal modo, l'espressione (13) rappresenta la funzione di Bessel $J_\nu(x)$ introdotta nel § 1, n. 1. Trasformiamo l'integrale (13) spezzandolo in tre parti: lungo l'asse φ_1 (da $-\pi$ a π) e lungo i rami infiniti. Per calcolare l'integrale esteso ai rami $(\pm\pi + i\infty)$ introduciamo una nuova variabile, ponendo rispettivamente $\varphi = i\xi \pm \pi$. Come risultato otteniamo per la funzione di Bessel di ordine ν la rappresentazione integrale seguente:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi - \frac{\operatorname{sen}\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{sh}\xi-\nu\xi}\,d\xi. \tag{15}$$

Se $\nu = n$ è un intero, allora $\operatorname{sen}\pi\nu = 0$ e

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+in\varphi}\,d\varphi. \tag{16}$$

Di qui, in particolare, segue che per l'onda piana $e^{-ix\operatorname{sen}\varphi}$ vale lo sviluppo in serie di Fourier

$$e^{-ix\operatorname{sen}\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,e^{-in\varphi},$$

poiché la formula (16) fornisce il coefficiente di Fourier di questo sviluppo. Ponendo $\varphi = \psi + \pi/2$ e tenendo conto che, in virtù

della periodicità della funzione integranda nella (16), si può integrare su ogni intervallo di lunghezza 2π, otteniamo la seconda formula integrale

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\psi + in\psi}\, d\psi, \tag{17}$$

corrispondente allo sviluppo seguente dell'onda piana:

$$e^{-ix\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(x)\, e^{-in\varphi}.$$

In particolare, per $n = 0$ abbiamo

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\psi}\, d\psi. \tag{18}$$

5. Rappresentazione integrale della funzione $K_\nu(x)$. Mostriamo che per la funzione di argomento immaginario $K_\nu(x)$, definita dalla formula (si veda il § 3)

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\pi\nu i} H_\nu^{(1)}(ix), \tag{19}$$

sussiste la rappresentazione integrale

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\xi - \nu\xi}\, d\xi, \quad x > 0. \tag{20}$$

Si vede di qui che $K_\nu(x)$ è una funzione reale positiva che decresce monotonamente. Per $\nu = 0$ la formula (20) dà

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\xi}\, d\xi. \tag{21}$$

Per la dimostrazione della formula (20) partiamo dalla (19) e dalla rappresentazione (5) della funzione $H_\nu^{(1)}$. Sia $C_{1,\,\psi}$ un contorno (fig. 99) le cui parti verticali del percorso C_1 abbiano come ascisse $-\pi - \psi$ e ψ ($\psi < 0$) in luogo di $-\pi$ e 0; in particolare, $C_{1,\,0} = C_1$. In virtù del teorema di Cauchy la sostituzione di C_1 nella (5) con il contorno $C_{1,\,\psi}$ non incide sul valore dell'integrale se per $|\varphi_2|$ grande è soddisfatta la condizione di convergenza dell'integrale $\mathrm{Re}\,(-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi) < 0$, dove $x = x_1 + ix_2$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. In virtù della (19) ci interessa la funzione di Hankel $H_\nu^{(1)}(ix)$ di argomento immaginario puro. La condizione di convergenza per $x_1 = 0$, $x = ix_2$, $\varphi = \psi$ ha la forma $x_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\varphi_2 < 0$, oppure $x_2\,\mathrm{sen}\,\psi < 0$. Consideriamo il contorno $C_{1,\,-\pi/2}$ per $\psi = -\pi/2$. Sostituiamo x_2 con x ed introducia-

mo una nuova variabile di integrazione ξ ponendo $\varphi = -\frac{\pi}{2} + i\xi$; allora $d\varphi = i\,d\xi$, sen $\varphi = \cos i\xi = \operatorname{ch}\xi$ e l'integrale (5) esteso a $C_{1,\psi}$ diventa

$$H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{1}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\xi - \nu\xi}\, d\xi.$$

Di qui e dalla (19) deriva la formula (20).

6. Formule asintotiche per le funzioni cilindriche. Applicando il metodo del valico *), mostriamo che per le funzioni $H_\nu^{(1,\,2)}(x)$

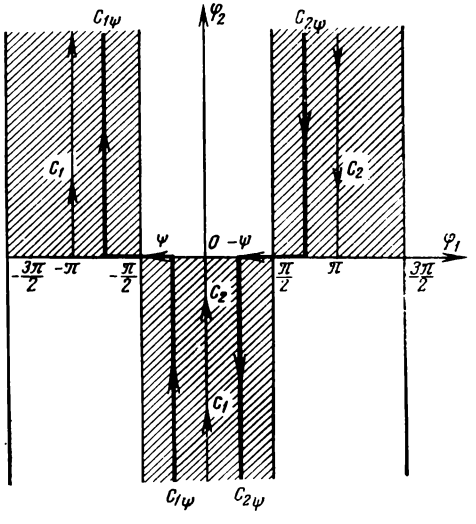


Fig. 99

definite mediante gli integrali di contorno (5) sono valide, per grandi valori dell'argomento reale $x > 0$, le formule asintotiche seguenti:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x > 0, \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Di qui, in virtù di quanto detto nel § 1, n. 4, segue che le funzioni (5) coincidono identicamente con le funzioni di Hankel introdotte nel § 3 mediante le formule (12) e (13).

*) M. A. Lavrentjev, B. V. Šabat, *Metodi di teoria delle funzioni di variabile complessa*, Fizmatgiz, 1958 (ed. russa).

Dalle formule $H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu$, $H_\nu^{(2)} = J_\nu - iN_\nu$ e dalle (22) derivano le formule asintotiche per le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$ e le funzioni di Neumann $N_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{23}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{24}$$

Ricordiamo che nel n. 4 abbiamo dimostrato l'identità delle funzioni $J_\nu(x)$ introdotte mediante gli integrali di contorno con le funzioni $J_\nu(x)$ introdotte nel § 1 mediante le serie.

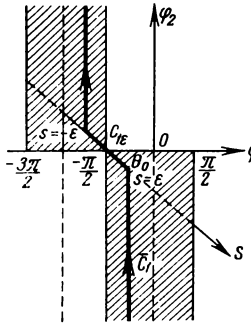


Fig. 100

Nel dedurre le formule asintotiche (22) ricorreremo agli integrali di contorno (5). È sufficiente considerare $H_\nu^{(1)}(x)$. La funzione integranda

$$e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi}, \quad x > 0,$$

nella formula (5) non ha nessuna singolarità nella parte finita del piano della variabile complessa φ.

Pertanto, in virtù del teorema di Cauchy, il contorno di integrazione nel piano finito si può deformare come si vuole a condizione che gli asintoti dei rami del contorno che vanno all'infinito giacciano nelle zone tratteggiate del piano φ come per il contorno C_1. Se il contorno considerato $\overline{C}_1$ giace interamente nel dominio tratteggiato (fig. 100), allora la funzione integranda, in tutti i punti in cui $\operatorname{sen} \varphi \neq 0$, tende esponenzialmente a zero per $x \to \infty$, poiché $\operatorname{Im} \operatorname{sen} \varphi < 0$. Se alcuni tratti del contorno attraversano domini non tratteggiati, allora su questi tratti nell'espressione integranda si verificano complicati fenomeni di interferenza.

Per chiarire l'andamento asintotico della funzione $H_\nu^{(1)}(x)$ per grandi valori dell'argomento x è opportuno considerare un contorno $\overline{C}_1$ che appartenga interamente al dominio tratteggiato. Questo contorno passerà, evidentemente, per il punto $-\pi/2$ in cui la parte reale $\operatorname{Re}(-i \operatorname{sen} \varphi) = \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2$ si annulla. Per $x \to \infty$ la funzione integranda, nell'intorno di questo punto, non tende uniformemente a zero; perciò la parte principale dell'integrale esteso a $\overline{C}_1$ per $x \to \infty$ è l'integrale esteso al piccolo arco contenente il punto $\varphi = -\pi/2$. Sotto questo punto di vista il contorno $\overline{C}_1$ deve essere considerato in modo tale che il fattore $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ su di esso decresca molto rapidamente allontanandosi dal punto $\varphi = -\pi/2$. Consideriamo la « topografia » della fun-

zione $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ nell'intorno del punto $\varphi = -\pi/2$. Poniamo $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{i\theta}$. Per piccoli valori di s troviamo

$$-i \operatorname{sen} \varphi = i \cos(se^{i\theta}) = i\left(1 - \frac{s^2}{2} e^{2i\theta} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{s^2}{2} \operatorname{sen} 2\theta + i\left(1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\theta\right) + \ldots$$

Per la parte reale $\operatorname{Re}(-i \operatorname{sen} \varphi) = \frac{1}{2} s^2 \operatorname{sen} 2\theta$ il punto $s = 0$ è un punto di sella: nei domini tratteggiati questa funzione è negativa, in quelli non tratteggiati positiva, e per $s = 0$ ($\varphi = -\pi/2$) si annulla. La direzione $\theta = \theta_0 = -\pi/4$ sarà, evidentemente, la direzione di massimo diminuire per la funzione $\frac{s^2}{2} \operatorname{sen} 2\theta$. Ne deriva che anche per il modulo della funzione $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ il punto $s = 0$ è di sella e che $\theta_0 = -\pi/4$ corrisponde alla direzione di massimo diminuire.

Consideriamo un contorno C_1 tale che contenga il segmento rettilineo $\overline{C}_{1\varepsilon}$ ($-\varepsilon < s < \varepsilon$), passi per il punto $s = 0$ ($\varphi = -\pi/2$) sotto l'angolo $\theta_0 = -\pi/4$ e tale che i suoi rami che vanno all'infinito giacciano interamente nei domini tratteggiati (fig. 100).

La funzione integranda nella (5) decresce esponenzialmente allontanandosi dal punto $s = 0$. Pertanto, a meno del termine che decresce esponenzialmente, possiamo scrivere

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\overline{C}_1} e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi} \, d\varphi \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{x\left(-\frac{s^2}{2} + i\right) - i\nu\frac{\pi}{2}} \, ds e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

poiché lungo $\overline{C}_{1\varepsilon}$ abbiamo $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{-i\pi/4}$, $d\varphi = e^{-i\pi/4} \, ds$, $-i \operatorname{sen} \varphi \approx -\frac{s^2}{2} + i$, $e^{i\nu\varphi} \approx e^{-i\nu\pi/2}$, e s varia da ε a $-\varepsilon$. Introduciamo le notazioni $\xi = s\sqrt{x/2}$, $d\xi = \sqrt{x/2} \, ds$, $\alpha = \sqrt{x/2}$. Allora

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Se $x \to \infty$ *), cioè se $\alpha \to \infty$ allora $\int_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2} d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$.

Di qui ricaviamo il primo termine della formula asintotica (22).

*) L'errore commesso sostituendo limiti finiti a limiti infiniti decresce esponenzialmente poiché

$$\int_z^\infty e^{-\xi^2} d\xi \approx e^{-z^2}/2z.$$

I termini successivi dello sviluppo si possono ottenere considerando i termini infinitesimi di ordine superiore a s. La valutazione $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ per i termini restanti nella (22) segue dal n. 4 del § 1.

È da notare che il suddetto metodo del valico, o metodo del punto di sella, è applicabile agli sviluppi asintotici di altre funzioni rappresentabili sotto forma di integrale di contorno e anche per $H_{\nu}^{(1,\ 2)}(x)$ per $\nu \approx x \to \infty$.

§ 5. Integrale di Fourier-Bessel e altri integrali contenenti le funzioni di Bessel

1. Integrale di Fourier-Bessel. Troviamo lo sviluppo di una data funzione $f(r)$ come integrale di funzioni di Bessel. L'integrale di Fourier per la funzione $f(x)$ e rispettivamente per la funzione di due variabili $f(x, y)$, come è noto, ha la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\mu(x-\xi)}\, d\xi, \tag{1}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, d\mu' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, e^{i\mu(x-\xi)+i\mu'(y-\eta)}\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

Introducendo le coordinate polari mediante le relazioni

$$x = r\cos\varphi, \quad \xi = \rho\cos\psi, \quad \mu = \lambda\cos\xi,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad \eta = \rho\,\mathrm{sen}\,\psi, \quad \mu' = \lambda\,\mathrm{sen}\,\xi,$$

otteniamo

$$d\xi\, d\eta = \rho\, d\rho\, d\psi, \quad d\mu\, d\mu' = \lambda\, d\lambda\, d\xi,$$
$$\mu x + \mu' y = \lambda r\cos(\xi - \varphi), \quad \mu\xi + \mu'\eta = \lambda\rho\cos(\psi - \xi).$$

Supponendo che la funzione $f(x, y)$ abbia la forma

$$f(x, y) = f(r)\, e^{in\varphi}, \tag{3}$$

dove n è un intero, e trasformando l'integrale di Fourier (2) mediante le relazioni suindicate, troviamo

$$f(r)\, e^{in\varphi} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\rho)\, \rho\, d\rho\lambda\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r\cos(\xi-\varphi)+in(\xi-\varphi)} \times$$

$$\times\, d\xi \cdot e^{in\varphi}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda\rho\cos(\psi-\xi)+in(\psi-\xi)}\, d\psi. \tag{4}$$

Ricorriamo alle seguenti formule (si vedano le (16) e (17) del § 4, n. 4):

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\xi + in\xi} e^{-i\frac{\pi n}{2}} d\xi \quad \left(\xi = \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \tag{5}$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\cos\xi' - in\xi'} e^{i\frac{\pi n}{2}} d\xi' \quad (\xi = \pi + \xi'). \tag{6}$$

Siccome le espressioni integrande nelle (5) e (6) sono funzioni periodiche di ξ e ξ' e, quindi, si può integrare su qualsiasi tratto di lunghezza 2π, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos(\xi-\xi_0) + in(\xi-\xi_0)} d\xi = J_n(z)\, e^{i\frac{\pi n}{2}}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\cos(\xi'-\xi_0') + in(\xi'-\xi_0')} d\xi' = J_n(z)\, e^{-i\frac{\pi n}{2}}, \tag{8}$$

dove ξ_0 e ξ_0' sono numeri arbitrari. Sostituendo le (7) e (8) nella formula (4) e semplificando per $e^{in\varphi}$, otteniamo l'*integrale di Fourier-Bessel*

$$f(r) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\rho)\, J_n(\lambda\rho)\, J_n(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda\, \rho\, d\rho \tag{9}$$

ossia

$$f(r) = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda)\, J_n(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda, \quad \text{dove} \quad \varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\rho)\, J_n(\lambda\rho)\, \rho\, d\rho.$$

Affinché lo sviluppo integrale di Fourier-Bessel sia possibile è sufficiente chiedere che la funzione $f(r)$ definita nell'intervallo $(0, \infty)$ verifichi le seguenti condizioni:

1) $f(r)$ è continua nell'intervallo $(0, \infty)$;

2) $f(r)$ ha un numero finito di massimi e minimi in ogni intervallo finito;

3) esiste l'integrale

$$\int_0^{\infty} \rho\, |f(\rho)|\, d\rho.$$

Non ci soffermiamo sulla dimostrazione di questa affermazione.

2. Alcuni integrali contenenti le funzioni di Bessel. Nelle applicazioni più disparate si incontrano frequentemente integrali definiti contenenti le funzioni di Bessel.

Fra i più diffusi integrali di questo tipo rientra l'integrale

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \quad (z>0). \tag{10}$$

Per dimostrare questa formula sostituiamo a J_0 la sua espressione integrale (la (16) del § 4) e quindi cambiamo l'ordine di integrazione:

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-z\lambda}\, d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\lambda \operatorname{sen}\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-(z+i\rho \operatorname{sen}\varphi)\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{z+i\rho\operatorname{sen}\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\, d\varphi}{z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{z\, d\varphi}{z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi},$$

poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi} = 0$$

essendo l'espressione integranda dispari.

Ponendo prima $\operatorname{tg}\varphi = \xi$ e quindi $\sqrt{\frac{z^2+\rho^2}{z^2}}\,\xi = \eta$, otteniamo

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{z\, d\varphi}{z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{2z}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{2z}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{z^2(1+\xi^2)+\rho^2\xi^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{z^2+\rho^2}}\int_0^\infty \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}};$$

la formula (10) è così dimostrata. Applicando la (10) troviamo immediatamente

$$\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\, e^{-z\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right). \tag{11}$$

Ponendo nelle formule (10) e (11) $z = ia$ e separando le parti reale e immaginaria, otteniamo alcune conseguenze:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-a^2}},\\
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\rho},\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\,d\lambda = \frac{a}{\rho\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{per} \quad \rho > a; \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{per} \quad a > \rho; \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right),\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\,d\lambda = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{per} \quad a > \rho. \tag{13'}$$

Dimostriamo la seconda formula integrale

$$B_2 = \int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho)\,e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}\,d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^\nu e^{-\frac{\rho^2}{4t}}. \tag{14}$$

Sostituiamo in luogo di J_ν la serie di potenze e integriamo termine a termine ($t > 0$!):

$$B_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+\nu} \int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1} e^{-t\lambda^2}\,d\lambda.$$

Calcolando l'integrale ausiliario

$$\int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1} e^{-t\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2t^{k+\nu+1}} \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{k+\nu}\,d\xi = \frac{1}{2t^{k+\nu+1}}\,\Gamma(k+\nu+1),$$

otteniamo

$$B_2 = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right)^k = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu} e^{-\frac{\rho^2}{4t}}$$

come dovevasi dimostrare.

Notiamo che il calcolo di B_1 si può realizzare analogamente, sviluppando la funzione di Bessel in serie e quindi integrando termine a termine.

Consideriamo l'integrale

$$C = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \lambda\, d\lambda. \tag{15}$$

È facile vedere che esso è una soluzione dell'equazione

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

La funzione

$$v_0 = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r = \sqrt{\rho^2 + z^2})$$

verifica anch'essa l'equazione d'onda $(r > 0)$

$$\Delta v_0 + k^2 v_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r v_0) + k^2 v_0 = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} + k^2 v_0 = 0.$$

Sviluppiamo la funzione $v_0(\rho) = e^{ik\rho}/\rho$ come integrale di Fourier-Bessel:

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\rho\lambda) \lambda\, d\lambda, \tag{16}$$

dove

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho)\, d\rho. \tag{17}$$

Per calcolare $F(\lambda)$ usiamo le formule (12)

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho)(\cos k\rho + i \operatorname{sen} k\rho)\, d\rho =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{se} \quad \lambda > k, \\ \dfrac{i}{\sqrt{k^2-\lambda^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{se} \quad k > \lambda. \end{cases}$$

Quindi,

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\,\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, \tag{18}$$

vale a dire la funzione

$$v_0 = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

coincide con l'integrale $C(\rho, z)$ per $z = 0$. Dunque, ambedue le funzioni

$$v_0(\rho, z) \quad \text{e} \quad C(\rho, z)$$

sono soluzioni dell'equazione d'onda, coincidono per $z = 0$ e hanno nel punto $z = 0$, $\rho = 0$ una medesima singolarità.

Ne segue che esse sono identicamente uguali, cioè

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\,d\lambda = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{19}$$

La formula ottenuta è stata largamente usata da A. Sommerfeld per indagini fisiche e spesso si chiama formula di Sommerfeld.

Parte II

FUNZIONI SFERICHE

Le funzioni sferiche sono state introdotte in relazione allo studio delle soluzioni dell'equazione di Laplace e, in particolare, alla teoria del potenziale. Nel § 1 abbiamo considerato i polinomi di Legendre, utilizzati quindi per la costruzione delle funzioni sferiche (§ 2). Le funzioni sferiche rappresentano un apparato assai efficace per la soluzione di numerosi problemi della fisica matematica.

§ 1. Polinomi di Legendre

1. Funzione generatrice e polinomi di Legendre. I polinomi di Legendre sono strettamente legati alla soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace $\frac{1}{R}$, dove R è la distanza fra un punto M e un punto fisso M_0. Siano r e r_0 i raggi vettori dei punti M e M_0, e θ l'angolo da essi formato (fig. 101). È evidente che si

può scrivere

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r_0^2-r^2-2rr_0\cos\theta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2-2\rho x}} & \text{per} \quad r<r_0,\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2-2\rho x}} & \text{per} \quad r>r_0,\end{cases} \tag{1}$$

dove $x=\cos\theta$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ e $\rho=\dfrac{r}{r_0}<1$, oppure $\rho=\dfrac{r_0}{r}<1$ (in entrambi i casi ρ è inferiore a 1).

La funzione

$$\Psi(\rho,\ x)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2-2\rho x}} \quad (0<\rho<1,\ -1\leqslant x\leqslant 1) \tag{2}$$

si chiama *funzione generatrice* dei polinomi di Legendre.

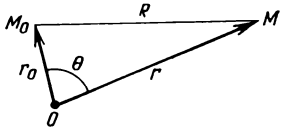


Fig. 101

Sviluppiamo la funzione $\Psi(\rho,\ x)$ in serie di potenze di ρ:

$$\Psi(\rho,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,\rho^n. \tag{3}$$

I coefficienti $P_n(x)$ dello sviluppo (3) sono polinomi dell'n-esimo grado e si chiamano polinomi di Legendre.

In virtù del teorema di Cauchy, dalla formula (3) risulta

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi}{\partial\rho^n}\Big|_{\rho=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Psi(\zeta,\ x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \tag{4}$$

dove C è un **contorno** chiuso qualsiasi nel piano della variabile complessa $\zeta=\xi+i\eta$, contenente il punto $\zeta=0$. Ponendo $\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}=1-\zeta z$, otteniamo $\zeta=2(z-x)/(z^2-1)$, $d\zeta=2(1-\zeta z)\,dz/(z^2-1)$, $\Psi(\zeta,\ x)\,d\zeta=2dz/(z^2-1)$.

La formula (4) diventa

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz, \tag{5}$$

dove C_1 è un contorno qualsiasi che circonda il punto $z=x$.

Tenendo conto che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz=(x^2-1)^n$$

e usando la formula della derivata

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz = n!\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz,$$

ricaviamo dalla (5) la formula per $P_n(x)$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{6}$$

Si vede immediatamente dalla formula (6) che: 1) $P_n(x)$ è un polinomio di grado n; 2) $P_n(x)$ contiene le sole potenze di x che hanno la stessa parità dell'indice n, di modo che

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{7}$$

Ponendo $x = 1$ troviamo

$$\Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \ldots + \rho^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\,\rho^n,$$

vale a dire $P_n(1) = 1$ e, in virtù della (7),

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{7'}$$

L'espressione (6) si chiama formula differenziale per i polinom di Legendre, o formula di Rodrigo.

Osserviamo che dalle formule (1) e (3) deriva lo sviluppo del potenziale

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{per} \quad r < r_0, \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{per} \quad r > r_0. \end{cases} \tag{8}$$

2. Formule ricorrenti. Derivando $\Psi(\rho, x)$ rispetto a ρ e x, otteniamo due identità

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\,\Psi_\rho - (x - \rho)\,\Psi = 0, \tag{9}$$

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\,\Psi_x - \rho\Psi = 0. \tag{10}$$

Scriviamo il primo membro della formula (9) sotto forma di serie di potenze di ρ, sostituendo la serie (3) per Ψ e la serie $\Psi_\rho = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,P_{n+1}(x)\,\rho^n$. Il coefficiente di ρ^n della serie ottenuta, in virtù della (9), è nullo per ogni x:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - x\,(2n+1)\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{11}$$

Questa identità è la formula ricorrente che lega tre polinomi successivi. Essa permette di trovare successivamente tutti i $P_n(x)$

$(n > 1)$ pur di tener conto che la (6) dà

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$

Così, ad esempio, ponendo nell'(11) $n = 1$, troviamo $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Introduciamo ancora due formule ricorrenti:

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

ossia

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \tag{12}$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \tag{13}$$

Eliminando Ψ dalle formule (9) e (10), otteniamo l'identità $\rho\Psi_\rho - (x - \rho)\Psi_x = 0$ dalla quale deriva immediatamente la (12) se al primo membro di questa identità si sostituisce la serie (3) e si uguaglia a zero il coefficiente di ρ^n. Derivando quindi rispetto a x ed eliminando $P'_{n-1} = xP'_n - nP_n$, otteniamo $P'_{n+1} - xP'_n - (n + 1)P_n = 0$, oppure la formula (13) dopo la sostituzione di $n + 1$ con n.

3. Equazione di Legendre. Troviamo un'equazione differenziale la cui soluzione è $P_n(x)$. A tale scopo eliminiamo dalle (12) e (13) P_{n-1} e P'_{n-1}. Dapprima portiamo P'_{n-1} dalla (12) nella (13):

$$P'_n - xP'_{n-1} - nP_{n-1} = (1 - x^2)P'_n + nxP_n - nP_{n-1} = 0,$$

quindi deriviamo l'identità ottenuta rispetto a x e applichiamo ancora una volta la formula (12) per P'_{n-1}:

$$[(1 - x^2)P'_n]' + nxP'_n + nP_n - nP'_{n-1} = [(1 - x^2)P'_n] +$$
$$+ nxP'_n + nP_n - (nxP'_n - n^2P_n) = 0.$$

Come risultato otteniamo l'equazione

$$[(1 - x^2)P'_n]' + n(n + 1)P_n = 0. \tag{14}$$

Abbiamo dimostrato con ciò che i polinomi di Legendre $P_n(x)$ sono autofunzioni corrispondenti agli autovalori $\lambda_n = n(n + 1)$ del problema seguente:

trovare dei valori λ tali che nell'intervallo $-1 \leqslant x \leqslant 1$ esistano soluzioni non banali dell'equazione di Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{15}$$

limitate per $x = \pm 1$ e soddisfacenti alla condizione di normalizzazione $y(1) = 1$.

4. Ortogonalità dei polinomi di Legendre. L'equazione di Legendre (15) è un caso particolare (per $q = 0$, $\rho = 1$, $k(x) = 1 - x^2$) dell'equazione

$$(k(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \tag{16}$$

studiata nell'Introduzione. Pertanto ad essa è applicabile la teoria generale dell'equazione (16) la quale afferma che:

1) polinomi di Legendre di ordini distinti sono mutuamente ortogonali

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \quad \text{per} \quad m \neq n;$$

2) la seconda soluzione linearmente indipendente dell'equazione di Legendre per $\lambda = n(n+1)$ diventa infinita per $x = \pm 1$ come $\ln(1 \mp x)$.

Come è noto, il sistema di polinomi ortogonali è chiuso *). Pertanto l'equazione di Legendre non ha soluzioni limitate non banali per alcun $\lambda \neq n(n+1)$. Infatti, se esistesse una solu-

*) Un sistema di funzioni ortogonali $\{\varphi_n\}$ si dice *chiuso* se non esiste una funzione continua, non identicamente nulla e ortogonale a tutte le altre funzioni di questo sistema.

Un sistema di funzioni ortogonali $\{\varphi_n\}$ si dice *completo* nell'intervallo (a, b) se ogni funzione continua si può approssimare in media, con qualsiasi grado di precisione, mediante una combinazione lineare delle funzioni $\{\varphi_n\}$. In altre parole, qualunque sia $\varepsilon > 0$ si può sempre trovare una combinazione lineare di funzioni

$$S_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

tale che

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\, dx < \varepsilon.$$

Per un sistema di funzioni completo $\{\varphi_n\}$ si verifica la relazione

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2,$$

dove f_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$, cioè

$$\left(f_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi\right).$$

La chiusura è conseguenza della completezza. Supponiamo che sia dato un sistema di funzioni ortogonali $\{\varphi_n(x)\}$ e che esista una funzione continua $f(x) \not\equiv 0$, ortogonale a tutte le $\varphi_n(x)$. Allora in virtù della completezza del sistema di funzioni $\{\varphi_n\}$ deve essere verificata l'uguaglianza

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2 = 0,$$

poiché, per ipotesi, $f_n = 0$. Ne segue $f \equiv 0$, il che contraddice l'ipotesi, cioè $\{\varphi_n(x)\}$ sia chiuso.

La completezza e, quindi, la chiusura del sistema di polinomi ortogonali $\{P_n(x)\}$ è conseguenza del *teorema di Weierstrass* sulla possibilità di appros-

zione $y(x)$ per $\lambda \neq n(n+1)$ essa sarebbe ortogonale a tutti i polinomi $P_n(x)$. Ne segue, in virtù della chiusura del sistema dei polinomi ortogonali $\{P_n(x)\}$, che $y(x) \equiv 0$. Abbiamo dimostrato così di aver trovato tutte le soluzioni non banali limitate dell'equazione di Legendre.

5. Norma dei polinomi di Legendre. Calcoliamo la norma $\| P_n \|$ dei polinomi $P_n(x)$:

$$\| P_n \| = \left(\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Applichiamo due volte la formula ricorrente (11): dapprima esprimiamo per suo tramite P_n in funzione di P_{n-1} e P_{n-2} (sostituendo nell'(11) $n+1$ con n), e quindi xP_n in funzione di P_{n+1} e P_{n-1}. Tenendo conto dell'ortogonalità dei polinomi P_n, P_{n-1} e P_{n-2}, otteniamo

$$\| P_n \|^2 = \frac{1}{n} \int_{-1}^{1} P_n(x) \{(2n-1)\, xP_{n-1}(x) - (n-1)\, P_{n-2}\}\, dx =$$

$$= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} (xP_n)\, P_{n-1}\, dx = \frac{2n-1}{2n+1} \| P_{n-1} \|^2.$$

L'applicazione successiva di questa formula dà $\| P_n \|^2 = \frac{1}{2n+1} \| P_0 \|^2$. Sostituendo $\| P_0 \|^2 = \| 1 \|^2 = 2$, troviamo il quadrato della norma

$$\| P_n \|^2 = \frac{2}{2n+1} \quad \text{e} \quad \| P_n \| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \tag{17}$$

Quindi,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{18}$$

6. Zeri dei polinomi di Legendre. Mediante la formula di Rodrigo (6) si può dimostrare il teorema:

Il polinomio di Legendre $P_n(x)$ ha n zeri che si trovano nell'intervallo $-1 < x < 1$, e la sua derivata del k-esimo ordine, $k \leqslant n$,

---

simare una funzione continua mediante polinomi: *qualunque sia la funzione continua $f(x)$ data nell'intervallo (a, b) e qualunque sia $\varepsilon > 0$ esiste sempre un polinomio $Q_n(x)$ tale che*

$$| f(x) - Q_n(x) | < \varepsilon. \tag{A}$$

Rappresentando infatti il polinomio $Q_n(x)$ come combinazione lineare di polinomi ortogonali $\{P_n(x)\}$ e usando la disuguaglianza (A), otteniamo la condizione di completezza del sistema dei polinomi ortogonali.

ha $n - k$ zeri all'interno dell'intervallo $(-1,1)$ e non si annulla ai suoi estremi.

Infatti, la funzione $w = (x^2 - 1)^n$ si annulla agli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$. La sua derivata $w'(x)$ si annulla per $x = 1$ e $x = -1$ e, secondo il teorema dello zero della derivata, ha almeno uno zero all'interno dell'intervallo $(-1, 1)$. La derivata seconda $w''(x)$ ha almeno due zeri all'interno dell'intervallo e non si annulla ai suoi estremi (fig. 102). Continuando a ragionare in questo modo, concludiamo che l'n-esima derivata $w^{(n)}(x)$ ha almeno n zeri nell'intervallo $(-1, 1)$ o, più precisamente, esattamente n zeri in quanto essa è un polinomio di grado n. La prima parte dell'affermazione è dimostrata. In accordo con lo stesso teorema la derivata $P_n'(x)$ deve avere almeno $n - 1$ zeri all'interno di $(-1, 1)$, ma essa è un polinomio di grado $(n - 1)$ e perciò ha esattamente $n - 1$ zeri all'interno dell'intervallo. Ne concludiamo che $\frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$ ha $n - k$ zeri all'interno dell'intervallo $(-1, 1)$.

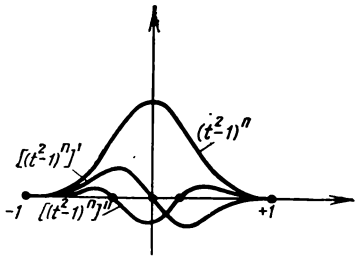


Fig. 102

7. Limitatezza dei polinomi di Legendre. Mostriamo che i polinomi di Legendre $P_n(x)$ sono uniformemente limitati per tutti i valori dell'argomento $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$$| P_n(x) | \leqslant 1.$$

A tale scopo avremo bisogno della rappresentazione integrale

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x + i\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}\varphi]^n \, d\varphi. \tag{19}$$

Deduciamo la formula (19). Consideriamo nell'espressione (5), in luogo del contorno C_1, una circonferenza di raggio $R = \sqrt{1-x^2}$ ($|x| < 1$) e centro nel punto $z = x$. Allora $z = x + \sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}$, $dz = i\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi} d\varphi$, $(z-x)^{n+1} = (1-x^2)^{(n+1)/2} \times e^{i(n+1)\varphi}$, $z^2 - 1 = x^2 - 1 + (1-x^2)e^{2i\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi} = \sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}[2x + \sqrt{1-x^2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})] = 2\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}[x + i\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}\varphi]$. Sostituendo queste espressioni nella (5), otteniamo la formula (19). Se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, allora $|x + i\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen}\varphi| \leqslant 1$ e dalla (19) deriva immediatamente la limitatezza di $P_n(x)$.

§ 2. Funzioni associate di Legendre

1. Funzioni associate. Consideriamo il problema seguente: *trovare le autofunzioni e gli autovalori dell'equazione*

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \quad -1<x<1, \tag{1}$$

sotto la condizione di limitatezza

$$|\,y(\pm 1)\,|<\infty. \tag{2}$$

L'equazione (1) è un caso particolare dell'equazione (8) considerata nell'Introduzione, per $k(x)=1-x^2$, $q(x)=m^2/(1-x^2)$, $\rho=1$, $a=-1$, $b=1$. Poiché il coefficiente $k(x)=1-x^2$ si annulla in ambedue gli estremi dell'intervallo $-1\leqslant x\leqslant 1$, la condizione di limitatezza naturale si pone per $x=-1$ e $x=1$. In virtù del lemma 2 dell'Introduzione la soluzione $y(x)$ del problema (1) deve avere, per $x=\pm 1$, due zeri d'ordine ν, dove $\nu=m/2$. Ne segue che è naturale cercare la soluzione del problema (1) sotto la forma

$$y(x)=(1-x^2)^{m/2}v(x), \quad v(\pm 1)\neq 0. \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione (3) nell'equazione (1), otteniamo

$$(1-x^2)v''-2(m+1)v'+[\lambda-m(m+1)]v=0. \tag{4}$$

La stessa equazione si ottiene per la derivata $\frac{d^m z}{dx^m}$ della soluzione dell'equazione di Legendre (15) del § 1 dopo averla derivata m volte. Una soluzione limitata non banale $z=P_n(x)$ dell'equazione di Legendre esiste unicamente per $\lambda=n(n+1)$, dove n è un intero positivo. Ne segue che

$$v(x)=\frac{d^m P_n}{dx^m}, \quad \lambda=n(n+1) \tag{5}$$

è una soluzione dell'equazione (2) e che

$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n}{dx^m} \tag{6}$$

è l'autofunzione del problema (1), corrispondente all'autovalore

$$\lambda_n=n(n+1), \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

La $P_n^{(m)}(x)$ si chiama funzione associata di Legendre di ordine m. È evidente che $P_n^{(0)}(x)=P_n(x)$, $P_n^{(m)}(x)\not\equiv 0$ soltanto per $m\leqslant n$.

2. Norma delle funzioni associate. Secondo il teorema generale di pag. 642 le funzioni associate $P_n^{(m)}$ formano un sistema ortogonale. Calcoliamo la norma $\|P_n^{(m)}\|$ delle funzioni associate e, nel frattempo, dimostriamo la loro ortogonalità. Moltiplichiamo l'equazione (4) per $(1-x^2)^m$ e teniamo conto della (5). Dopo

la sostituzione di $m+1$ con m, otteniamo

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\right] = -[\lambda - m(m-1)](1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}. \quad (8)$$

Introduciamo la notazione

$$L^m_{n,k} = \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)\, P_k^{(m)}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\frac{d^m P_k}{dx^m}\, dx.$$

L'integrazione per parti dà

$$L^m_{n,k} = \left[\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d^m P_n}{dx^m}(1-x^2)^m\right]_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^m P_n}{dx^m}\right]dx.$$

La sostituzione si annulla e il termine integrando, in virtù delle (8) e (7), si riduce alla forma

$$L^m_{n,k} = [n(n+1) - m(m-1)]\, L^{m-1}_{n,k} = (n+m)(n-m+1)\, L^{m-1}_{n,k}.$$

Da questa formula ricorrente segue

$$L^m_{n,k} = (n+m)(n+m-1)\ \ldots\ (n+1)\, n\ \ldots\ (n-m+1)\, L^0_{n,k} =$$

$$= \frac{(n+m)!}{n!}\frac{n!}{(n-m)!}L^0_{n,k} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}L^{(0)}_{n,k}.$$

L'espressione di $L^0_{n,k}$ è data dalla formula (18) del § 1 poiché $P_n^{(0)} = P_n$. Come risultato otteniamo

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)\, P_k^{(m)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{per } k = n, \end{cases} \quad (9)$$

vale a dire le funzioni associate sono mutuamente ortogonali e il quadrato della norma della funzione associata $P_n^{(m)}$ vale

$$\| P_n^{(m)} \|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (10)$$

3. Chiusura del sistema di funzioni associate. Dimostriamo che il sistema di funzioni associate $\{P_n^{(m)}(x)\}$ esaurisce completamente tutte le soluzioni limitate dell'equazione (1).

Infatti, per $\lambda = n(n+1)$ una soluzione linearmente indipendente da $P_n^{(m)}(x)$ diventa infinita per $x = \pm 1$. Quanto alla soluzione limitata, essa per $\lambda \neq n(n+1)$ deve essere ortogonale a tutte le $P_n^{(m)}(x)$.

Per provare che non esistono soluzioni limitate dell'equazione (1), diverse da $P_n^{(m)}(x)$, è sufficiente stabilire che il sistema di funzioni associate $\{P_n^{(m)}(x)\}$ è chiuso, cioè che non esiste nessuna funzione continua che non sia identicamente nulla e sia ortogonale a tutte le funzioni del sistema.

Lemma. *Ogni funzione $f(x)$, che è continua nell'intervallo* $[-1, 1]$ *e si annulla ai suoi estremi per* $x = 1$ *e* $x = -1$, *può essere uniformemente approssimata con qualsiasi grado di precisione mediante una combinazione lineare di funzioni associate di ordine qualsiasi* m.

Osserviamo innanzitutto che le derivate $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ dei polinomi di Legendre sono polinomi di grado $n - m$. Poiché ogni polinomio in x può essere rappresentato sotto forma di combinazione lineare di questi polinomi, allora, in virtù del teorema di Weierstrass, ogni funzione $\overline{f}(x)$, continua nell'intervallo $[-1, 1]$ può essere approssimata uniformemente con qualsiasi grado di precisione mediante la combinazione lineare $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$:

$$\left| \overline{f}(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad n_0 > N(\varepsilon).$$

Moltiplicando questa disuguaglianza per $(1-x^2)^{m/2}$, troviamo

$$\left| f_1(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x) \right| < \varepsilon, \text{ se } \quad n_0 > N(\varepsilon),$$

dove

$$f_1(x) = \overline{f}(x)\,(1-x^2)^{m/2}, \tag{11}$$

vale a dire ogni funzione $f(x)$, rappresentata nella forma (11), dove $\overline{f}(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$, può essere uniformemente approssimata con qualsiasi grado di approssimazione mediante una combinazione lineare di funzioni associate.

Diremo che la funzione $f_1(x)$ appartiene alla classe H_1 se è continua nell'intervallo $[-1, 1]$ e identicamente nulla in piccoli intorni dei punti $x = -1$ e $x = 1$, cioè

$$f_1(x) = 0 \quad \text{per} \quad |1 - \delta| \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Poiché per ogni funzione $f_1(x)$ di classe H_1 la funzione

$$\overline{f}(x) = \frac{f_1(x)}{(1-x^2)^{m/2}}$$

è continua nell'intervallo $[-1, 1]$, il lemma è dimostrato per le funzioni della classe H_1.

Consideriamo una funzione $f(x)$, continua nell'intervallo $[-1, 1]$ e nulla ai suoi estremi. È evidente che questa funzione si può uniformemente approssimare mediante la funzione $f_1(x)$ di classe H_1 con la precisione $\varepsilon/2$:

$$|f(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Approssimando $f_1(x)$ mediante una combinazione lineare di funzioni associate con la precisione $\varepsilon/2$,

$$\left| f_1(x) - \sum\nolimits_1(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum\nolimits_1(x) = \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x),$$

otteniamo la disuguaglianza

$$\left| f(x) - \sum\nolimits_1(x) \right| < \varepsilon$$

la quale dimostra il lemma.

Questo lemma consente di dimostrare facilmente la completezza del sistema di funzioni associate e, quindi, la sua chiusura.

Ricordiamo che un sistema di funzioni $\{\varphi_n(x)\}$ si dice completo in un intervallo $[a, b]$ se ogni funzione $F(x)$, continua in $[a, b]$, si può approssimare in media con qualsiasi grado di precisione mediante una combinazione lineare di queste funzioni

$$\int_a^b \left[F(x) - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \varphi_n(x) \right]^2 dx < \varepsilon, \quad \text{se} \quad n_0 > N(\varepsilon).$$

È evidente che ogni funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$ si può approssimare in media con qualsiasi grado di precisione mediante una funzione $f(x)$ continua in $[-1, 1]$ e nulla per $x = \pm 1$:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon'.$$

Considerando la combinazione lineare di funzioni associate che approssimano uniformemente la funzione $f(x)$

$$\left| f(x) - \sum\nolimits_1(x) \right| < \varepsilon''$$

e usando la disuguaglianza

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

otteniamo

$$\int_{-1}^{1} \left[F(x) - \sum\nolimits_1 \right]^2 dx \leqslant 2 \int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 dx +$$

$$+ 2 \int_{-1}^{1} \left[f(x) - \sum\nolimits_1 \right]^2 dx < \varepsilon$$

(se $2\varepsilon' + 4(\varepsilon'')^2 \leqslant \varepsilon$),

che dimostra la completezza e, quindi, la chiusura del sistema di funzioni associate.

§ 3. Polinomi armonici e funzioni sferiche

1. Polinomi armonici. Si chiama armonico un polinomio omogeneo che verifica l'equazione di Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{1}$$

È facile vedere che i primi due polinomi armonici omogenei hanno la forma

$$u_1(x, y, z) = Ax + By + Cz,$$

$$u_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A + B) z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$

dove A, B, C sono coefficienti arbitrari.

Determiniamo il numero di polinomi armonici omogenei linearmente indipendenti di grado n

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} \alpha_{p, q, r} x^p y^q z^r. \tag{2}$$

Una funzione omogenea intera di grado n ha $(n + 1)(n + 2)/2$ coefficienti. Infatti, il secondo membro dell'uguaglianza (2) si può rappresentare nella forma

$$\alpha_{0, 0, n} z^n + (\alpha_{1, 0, n-1} x + \alpha_{0, 1, n-1} y) z^{n-1} \ldots +$$

$$+ (\alpha_{n-1, 0, 1} x^{n-1} + \alpha_{n-2, 1, 1} x^{n-2} y + \ldots + \alpha_{0, n-1, 1} y^{n-1}) z +$$

$$+ (\alpha_{n, 0, 0} x^n + \alpha_{n-1, 1, 0} x^{n-1} y + \ldots + \alpha_{0, n, 0} y^n) z^0.$$

Per z^n esiste un solo coefficiente, per z^{n-1} ce ne sono due, . . ., per z abbiamo n coefficienti, e per z^0 il loro numero è $(n + 1)$, cosicché il numero totale di coefficienti è

$$1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \tag{3}$$

L'equazione (1) impone sui coefficienti $n(n - 1)/2$ relazioni lineari omogenee poiché Δu_n è una funzione omogenea di grado $n - 2$. In tal modo il polinomio deve avere non meno di $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - \frac{(n - 1)n}{2} = 2n + 1$ coefficienti indipendenti. Se le suddette $(n - 1)\, n/2$ relazioni fossero linearmente dipendenti il numero di coefficienti indipendenti sarebbe superiore a $2n + 1$.

Mostriamo che soltanto $2n + 1$ coefficienti sono linearmente indipendenti. I coefficienti $\alpha_{p, q, r}$ di un polinomio omogeneo si possono rappresentare nella forma

$$\alpha_{p, q, r} = \frac{1}{p!\, q!\, r!} \frac{\partial^n u_n}{\partial x^p\, \partial y^q\, \partial z^r}.$$

Se u_n è un polinomio armonico, allora $\alpha_{p, q, r}$ per $r \geqslant 2$ possono essere espressi in funzione dei coefficienti $\alpha_{p, q, 0}$ o $\alpha_{p, q, 1}$ il cui numero è esattamente $2n + 1$.

Infatti,

$$\alpha_{p,\,q,\,r} = \frac{1}{p!\,q!\,r!}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r-2}}\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!\,r!}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r-2}}\left[-\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right] =$$

$$= \beta_1 \alpha_{p+2,\,q,\,r-2} + \beta_2 \alpha_{p,\,q+2,\,r-2}.$$

Procedendo analogamente per i coefficienti $\alpha_{p+2,\,q,\,r-2}$ e $\alpha_{p,\,q+2,\,r-2}$, esprimeremo infine $\alpha_{p,\,q,\,r}$ in funzione di coefficienti della forma $\alpha_{p,\,q,\,0}$ $(p + q = n)$ e $\alpha_{p,\,q,\,1}$ $(p + q + 1 = n)$. Il numero di coefficienti della forma $\alpha_{p,\,q,\,0}$ è $(n + 1)$, e il numero di quelli della forma $\alpha_{p,\,q,\,r}$ è n. Quindi, il numero totale di coefficienti linearmente indipendenti e, di conseguenza, di polinomi armonici indipendenti di grado n è uguale esattamente a $2n + 1$.

I polinomi armonici omogenei si chiamano *funzioni sferiche.*

2. Funzioni sferiche. Le funzioni sferiche possono essere introdotte con maggiore facilità risolvendo l'equazione di Laplace per un dominio sferico mediante il metodo di separazione delle variabili.

Cercheremo la soluzione dell'equazione di Laplace nelle variabili $(r,\ \theta,\ \varphi)$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad (1)$$

ponendo

$u\ (r,\ \theta,\ \varphi) = R\ (r)\ Y\ (\theta,\ \varphi)$.

Per determinare $R\ (r)$ otteniamo l'equazione di Eulero

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \qquad (4)$$

e per determinare $Y\ (\theta,\ \varphi)$ l'equazione

$$\Delta_{\theta,\,\varphi} Y + \lambda Y = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 \qquad (5)$$

sotto la condizione complementare di limitatezza della funzione Y su tutta la sfera.

In particolare, la funzione $Y\ (\theta,\ \varphi)$ soddisfa le condizioni

$$\left.\begin{aligned} &Y\ (\theta,\ \varphi + 2\pi) = Y\ (\theta,\ \varphi), \\ &|\ Y\ (0,\ \varphi)\ | < \infty, \quad |\ Y\ (\pi,\ \varphi)\ | < \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Le soluzioni limitate dell'equazione (5), aventi derivate continue comprese quelle del secondo ordine, si chiamano *funzioni sferiche.*

Cerchiamo la soluzione del problema per $Y(\theta, \varphi)$ applicando il metodo di separazione delle variabili e ponendo

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

La funzione $\Phi(\varphi)$ verifica l'equazione

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$

e la condizione di periodicità

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Il problema per $\Phi(\varphi)$ è risolubile soltanto per $\mu = m^2$ intero e due sue soluzioni linearmente indipendenti sono le funzioni $\cos m\varphi$ e $\operatorname{sen} m\varphi$. La funzione $\Theta(\theta)$ viene definita mediante l'equazione

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\Theta = 0$$

e le condizioni di limitatezza per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Introducendo la variabile $t = \cos\theta$ e indicando $X(t)\,|_{t=\cos\theta} = X(\cos\theta) = \Theta(\theta)$, otteniamo per $X(t)$ l'equazione delle funzioni associate

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX}{dt}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right)X = 0 \quad (-1 < t < 1). \tag{6}$$

L'equazione (6), come abbiamo già visto nel § 2, consente di ottenere soluzioni limitate soltanto per $\lambda = n\,(n+1)$,

$$X(t)\,|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(t)\,|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(\cos\theta) = \Theta(\theta),$$

dove $m \leqslant n$.

Scriviamo il sistema di funzioni sferiche dell'n-esimo ordine ottenuto e conveniamo di attribuire l'indice negativo superiore alle funzioni contenenti $\cos k\varphi$ e quello positivo alle funzioni contenenti $\operatorname{sen} k\varphi$. Allora avremo

$$\left.\begin{aligned}
&m = 0 \quad Y_n^{(0)}(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta),\\
&m = 1 \quad Y_n^{(-1)}(\theta, \varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi, \quad Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) =\\
&\qquad\qquad = P_n^{(1)}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m = k \quad Y_n^{(-k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi, \quad Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) =\\
&\qquad\qquad = P_n^{(k)}(\cos\theta)\operatorname{sen} k\varphi\\
&\qquad (k = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Il numero di funzioni sferiche dell'n-esimo ordine $Y_n^{(m)}$ è uguale a $2n + 1$. La combinazione lineare di queste $2n + 1$ funzioni

sferiche (7)

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta) \qquad (7^*)$$

oppure

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^{n} C_{mn} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi),$$

dove

$$C_{mn} = \begin{cases} A_{nm} & \text{per} \quad m \leqslant 0, \\ B_{nm} & \text{per} \quad m > 0 \end{cases}$$

è anch'essa una funzione sferica, detta armonica sferica.

Le funzioni $Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta)$ non dipendono da φ e si dicono *zonali*. Poiché, in virtù del lemma del § 1, n. 6, $P_n(t)$ ha esattamente n zeri all'interno dell'intervallo $(-1, +1)$, la sfera viene divisa in $(n+1)$ zone parallele all'interno delle quali una funzione zonale conserva il segno.

Studiamo l'andamento sulla sfera della funzione

$$Y_n^{(\pm k)} = \operatorname{sen}^k\theta \left[\frac{d^k}{dt^k} P_n(t) \right]_{t=\cos\theta} \begin{cases} \operatorname{sen} k\varphi, \\ \cos k\varphi. \end{cases}$$

Poiché $\operatorname{sen}\theta$ si annulla ai poli, $\operatorname{sen} k\varphi$ o $\cos k\varphi$ diventano nulle su $2k$ meridiani e $\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)$, in virtù del suddetto lemma, su $(n-k)$ paralleli, tutta la sfera viene suddivisa in celle in cui le $Y_n^{(\pm k)}$ conservano il segno costante (fig. 103). Le funzioni $Y_n^{(\pm k)}$ (per $k > 0$) sono dette *tesserali*.

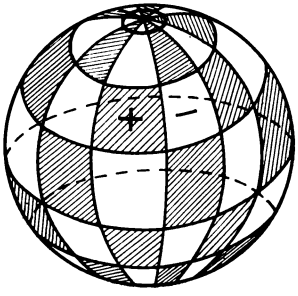


Fig. 103

Torniamo ora alla ricerca della funzione $R(r)$ che cercheremo sotto la forma $R = r^\sigma$.

Sostituendo la forma cercata della soluzione nell'equazione (4), otteniamo l'equazione caratteristica per determinare σ:

$$\sigma(\sigma + 1) - n(n+1) = 0,$$

dalla quale ricaviamo due valori di σ

$$\sigma = n \text{ e } \sigma = -(n+1).$$

Di conseguenza, l'equazione di Laplace ha come soluzioni particolari le funzioni

$$r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \qquad (7')$$

$$r^{-(n+1)} Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \qquad (7'')$$

la prima delle quali corrisponde, evidentemente, alla soluzione dei problemi interni, e la seconda dei problemi esterni (si veda § 4, n. 1).

Mostriamo che le soluzioni trovate dell'equazione di Laplace sono polinomi omogenei di grado n. Il termine generale, ad esempio della formula (7′), si può scrivere come segue:

$$v = r^n \operatorname{sen}^k\theta \cos k\varphi \cos^{n-k-2q}\theta,$$

dove q varia da 0 a $(n - k)/2$. La funzione v si può rappresentare sotto forma di prodotto di tre polinomi

$$v = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3,$$

dove

$$u_1 = r^k \operatorname{sen}^k\theta \cos k\varphi = \operatorname{Re}\,[r \operatorname{sen}\theta e^{i\varphi}]^k = \operatorname{Re}\,[(x+iy)^k],$$

$$u_2 = r^{n-k-2q}\cos^{n-k-2q}\theta = z^{n-k-2q},$$

$$u_3 = r^{2q} = (x^2+y^2+z^2)^q.$$

Di qui si vede chiaramente che $r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)$ è un polinomio armonico di grado $k + n - k - 2q + 2q = n$.

È evidente che le funzioni sferiche rappresentano i valori delle funzioni (7′) e (7″) sulla sfera di raggio unità.

3. Ortogonalità del sistema di funzioni sferiche. Dimostriamo che funzioni sferiche corrispondenti a valori distinti di λ sono ortogonali sulla sfera Σ. Y_1 e Y_2 verifichino le equazioni

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \quad \Delta_{\theta,\varphi}Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0, \tag{5}$$

dove

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

È facile vedere che sussiste la formula

$$\iint_\Sigma Y_2\Delta_{\theta,\varphi}Y_1\,d\Omega = -\iint_\Sigma \left\{\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\right\} d\Omega \quad (d\Omega = \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi), \tag{8}$$

che si ottiene facilmente integrando per parti.

Sulla superficie della sfera si ha

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

di modo che

$$\Delta_{\theta,\varphi}u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

e la formula (8) si può scrivere come segue:

$$\int\int_{\Sigma} Y_2 \Delta Y_1 \, d\Omega = -\int\int_{\Sigma} \operatorname{grad} Y_1 \cdot \operatorname{grad} Y_2 \cdot d\Omega.$$

Scambiando di posto le funzioni Y_1 e Y_2 nell'(8) e sottraendo la formula così ottenuta dall'(8), avremo

$$J = \int\int_{\Sigma} \{Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta,\varphi} Y_2\} \, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Le espressioni (8) e (9) sono le formule di Green per l'operatore delle funzioni sferiche.

Dalla formula (9) deriva facilmente l'ortogonalità delle funzioni Y_1 e Y_2. Usando infatti le equazioni (5), ricaviamo dalla formula (9)

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1) \int\int_{\Sigma} Y_1 Y_2 \, d\Omega = 0,$$

da cui, per $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue

$$\int\int_{\Sigma} Y_1 Y_2 \, d\Omega = 0$$

oppure

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_1(\theta, \varphi) \, Y_2(\theta, \varphi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Abbiamo dimostrato così l'ortogonalità di funzioni sferiche corrispondenti a valori distinti di λ.

Abbiamo ottenuto sopra per $\lambda = n(n+1)$ un sistema di $2n+1$ funzioni sferiche di ordine n. Dimostriamo che queste *funzioni sono anch'esse ortogonali fra di loro sulla sfera.*

Siano $Y_n^{(k_1)}$ e $Y_n^{(k_2)}$ due funzioni sferiche. Integrando il loro prodotto e applicando la formula (9) del § 2, otteniamo

$$\int\int_{\Sigma} Y_n^{(k_1)} Y_n^{(k_2)} \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)}(\theta, \varphi) \, Y_n^{(k_2)}(\theta, \varphi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos \theta) \, P_n^{(k_2)}(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi \, d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(k_1)}(t) \, P_n^{(k_2)}(t) \, dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{2\pi}{2n+1} \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{per} \quad k_1 = k_2 = k \neq 0, \\ 2\pi \cdot \dfrac{2}{2n+1} & \text{per} \quad k_1 = k_2 = 0, \end{cases} \tag{8'}$$

vale a dire le funzioni sferiche *definite dalla formula* (7) formano un sistema ortogonale nel dominio $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ e hanno il quadrato della norma che vale

$$\| Y_n^{(k)} \|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)]^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{2n+1} \pi \varepsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \tag{8''}$$

dove $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_k = 1$ per $k > 0$.

Supponendo la possibilità di sviluppare una funzione qualsiasi $f(\theta, \varphi)$ in serie di funzioni sferiche (la possibilità di questo sviluppo per una funzione continua e due volte derivabile verra giustificata in dettaglio più avanti, il n. 5) la quale consente l'integrazione termine a termine, otteniamo

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

dove A_{nm} e B_{nm} sono i coefficienti di Fourier definiti dalle formule

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi}{\| Y_n^{(m)} \|^2}, \\ B_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \operatorname{sen} m\varphi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi}{\| Y_n^{(m)} \|^2}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\| Y_n^{(m)} \|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{per } m = 0, \\ 1 & \text{per } m > 0. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione di Laplace si può rappresentare nella forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi)$$

per il problema ai limiti interno, oppure

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

per il problema ai limiti esterno, dove

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \{\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \operatorname{sen} m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos \theta)$$

è un'armonica sferica.

4. Completezza del sistema di funzioni sferiche. Dimostriamo la completezza del sistema di funzioni sferiche definite dalla formula (7). Dimostriamo prima che ogni funzione $f(\theta, \varphi)$ avente derivate seconde continue può essere approssimata uniformemente mediante un polinomio di funzioni sferiche.

Consideriamo lo sviluppo di questa funzione in serie di Fourier

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \operatorname{sen} m\varphi].$$

Tenendo conto della limitatezza della derivata seconda, è facile valutare i coefficienti A_m e B_m di questo sviluppo

$$|A_m| < \frac{M}{m^2}; \quad |B_m| < \frac{M}{m^2},$$

dove

$$M = \max |f_{\varphi\varphi}|.$$

Ne segue che per il termine restante della serie di Fourier è valida la valutazione uniforme seguente:

$$\left| f - \sum_{m=0}^{m_0} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \operatorname{sen} m\varphi] \right| =$$

$$= |R_{m_0}| < 2M \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \varepsilon', \tag{10}$$

dove $\varepsilon' > 0$ è un numero prefissato qualsiasi.

In base a quanto dimostrato nel n. 3 del § 2 i coefficienti di Fourier $A_m(\theta)$ e $B_m(\theta)$, quali funzioni continue di θ che si annullano per θ uguale a 0 e π, possono essere approssimati uniformemente mediante combinazioni lineari di funzioni associate dell'm-esimo ordine

$$\left| A_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0+1},$$

$$\left| B_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} b_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0+1}. \tag{11}$$

Allora dalle disuguaglianze (10) e (11) segue

$$\left| f(\theta, \varphi) - \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{k=0}^{n} [a_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi + \right.$$

$$\left. + b_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \operatorname{sen} m\varphi] \right| < 2\varepsilon', \tag{12}$$

ciò che dimostra la possibilità di approssimazione uniforme di qualsiasi funzione $f(\theta, \varphi)$, doppiamente derivabile, mediante

un polinomio di funzioni sferiche. Ne segue che anche ogni funzione continua può essere approssimata uniformemente mediante un polinomio di funzioni sferiche, ciò che dimostra la completezza del sistema di funzioni definite dalla formula (7). Dalla completezza di questo sistema deriva la sua chiusura.

Abbiamo dimostrato così che l'equazione delle funzioni sferiche non ha soluzioni limitate per $\lambda \neq n(n+1)$ e che ogni funzione sferica dell'n-esimo ordine (per $\lambda = n(n+1)$) è rappresentabile dalla formula (7*).

5. Sviluppo in funzioni sferiche. Le funzioni sferiche sono autofunzioni dell'equazione

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\lambda u=0 \quad \text{o} \quad \Delta_{\theta,\varphi}u+\lambda u=0 \tag{13}$$

sulla superficie della sfera $\sum$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ sotto condizioni di limitatezza aggiuntive.

Per giustificare la sviluppabilità di una funzione qualsiasi $f(\theta, \varphi)$, continua e doppiamente derivabile, in serie di funzioni sferiche passiamo a un'equazione integrale corrispondente. A tale scopo costruiamo la funzione di sorgente dell'equazione

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \tag{14}$$

che verifica la condizione di limitatezza della soluzione per $\theta = 0, \pi$.

Come è stato notato sopra,

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=(\operatorname{div}\operatorname{grad}u)_{\theta,\varphi} \tag{15}$$

sulla superficie della sfera. L'equazione (14) si può considerare come equazione della distribuzione stazionaria di temperatura o di corrente elettrica stazionaria sulla superficie sferica.

Da questo punto di vista è chiaro che è impossibile costruire la soluzione dell'equazione omogenea

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=0 \tag{16}$$

che abbia singolarità in un solo punto, poiché per la possibilità di esistenza di una temperatura stazionaria è necessario che la somma di sorgenti e di deflussi sia nulla.

Introduciamo la funzione di sorgente generalizzata la quale nel caso in esame deve essere soluzione dell'equazione

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=q \quad (q=1/4\pi), \tag{17}$$

regolare ovunque, tranne che nel polo $\theta = 0$ in cui essa deve avere una singolarità logaritmica. Il secondo membro dell'equazione (17) indica la densità di sorgenti negative (deflussi) di calore distribuite uniformemente sulla superficie sferica in modo

tale che

$$\int\int_{\Sigma} q\, d\sigma = 1. \tag{18}$$

Supponendo che la funzione di sorgente cercata u sia funzione della sola variabile θ, otteniamo per essa un'equazione differenziale la cui soluzione dà

$$u = -q \ln \operatorname{sen} \theta + c \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \tag{19}$$

Chiedendo che u abbia singolarità nel solo punto $\theta = 0$, otteniamo

$c = -q$

e

$$u = -2q \ln \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - q \ln 2.$$

Poiché $u_1 =$ costante è la soluzione dell'equazione omogenea, la funzione di sorgente G è definita, quindi, a meno di una costante arbitraria. Perciò possiamo scrivere

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \tag{20}$$

Se la sorgente è collocata in un punto M_0, la funzione di sorgente ha forma

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\gamma_{MM_0}}{2}, \tag{21}$$

dove γ_{MM_0} è la distanza angolare fra i punti M_0 (θ_0, φ_0) e M (θ, φ) *).

Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione non omogenea

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -F(\theta, \varphi). \tag{22}$$

Questa equazione può avere una soluzione regolare ovunque su Σ soltanto se è soddisfatta la condizione

$$\int\int_{\Sigma} F\, d\sigma = 0, \tag{23}$$

esprimente che la somma di sorgenti e deflussi deve essere nulla. La si può dedurre facilmente dalle formule di Green per l'operatore $\Delta_{\theta, \varphi}$, stabilite nel n. 3.

---

*) L'angolo γ è dato dalla formula

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0).$$

Mostriamo che ogni soluzione dell'equazione (22), soddisfacente alla condizione (23), è rappresentabile sotto la forma

$$u(M) = \int\int_{\Sigma} G(M,\ P)\, F(P)\, d\sigma_P + A,$$

dove A è una costante e $G(M, P)$ è la funzione di sorgente definita dalla formula (21). Siano M un punto fissato della sfera in cui si trova il polo nord ($\theta = 0$) e M_1 il suo punto diametralmente opposto. M e M_1 sono due punti singolari dell'equazione (22). Pertanto costruiamo su Σ in questi punti due piccoli cerchietti K_ε^M e $K_\varepsilon^{M_1}$ e consideriamo l'integrale

$$I = \int\int_{\Sigma_1 = \Sigma - K_\varepsilon^M - K_\varepsilon^{M_1}} (u\Delta G - G\Delta u)\, d\sigma.$$

Sostituendo a secondo membro le espressioni di Δu e ΔG, abbiamo

$$I = \int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial G}{\partial\theta}\right) - G\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right] d\theta\, d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} \int_0^{2\pi} \left[u\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2} - G\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] d\varphi.$$

Tenendo conto che fra parentesi quadra figurano derivate precise delle espressioni

$$\operatorname{sen}\theta\left[u\frac{\partial G}{\partial\theta} - G\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \quad \text{e} \quad u\frac{\partial G}{\partial\varphi} - G\frac{\partial u}{\partial\varphi} = v, \quad \text{dove} \quad v\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

otteniamo dopo integrazione

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}\theta\left(u\frac{\partial G}{\partial\theta} - G\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} d\varphi.$$

Quindi, osservando che

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2},$$

avremo

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\cdot u\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{sen}\theta\ln\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\theta}\, d\varphi\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} = I_1 + I_2.$$

Di qui si vede che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_1 = u(M) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} I_2 = 0.$$

Di conseguenza,

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P) F(P) \, d\sigma_P + A, \tag{24}$$

dove

$$A = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \, d\sigma \text{ è una costante.}$$

La soluzione del problema in esame è definita a meno di una costante additiva. La soluzione per la quale $\iint_{\Sigma} u \, d\sigma = 0$ è definita dalla formula

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P) F(P) \, d\sigma_P.$$

Applicando la formula (24) all'equazione delle funzioni sferiche $\Delta_{\theta, \varphi} u = -\lambda u$, concludiamo che

le funzioni sferiche definite dalla formula (7) *rappresentano la totalità di tutte le autofunzioni linearmente indipendenti dall'equazione integrale*

$$u(M) = \lambda \iint_{\Sigma} G(M, P) u(P) \, d\sigma_P$$

a nucleo simmetrico $G(M, P)$ *definito dalla formula* (21).

A questa equazione è applicabile la teoria generale delle equazioni integrali a nucleo simmetrico. Ne segue che una funzione arbitraria doppiamente derivabile $f(\theta, \varphi)$ può essere sviluppata in serie di funzioni sferiche assolutamente e uniformemente convergente

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \tag{25}$$

dove

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \tag{26}$$

e A_{nm} e B_{nm} sono i coefficienti di Fourier.

§ 4. Alcuni esempi di applicazione delle funzioni sferiche

Consideriamo alcuni problemi tipici di fisica matematica, la cui soluzione richiede l'applicazione delle funzioni sferiche.

Ricordiamo che la soluzione generale delle equazioni di Laplace in coordinate sferiche (r, θ, φ) ha la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) Y_n(\theta, \varphi),$$

dove $Y_n(\theta, \varphi)$ è un'armonica sferica, ossia una combinazione lineare di tutte le $2n + 1$ funzioni sferiche. Se la soluzione si cerca nel dominio $r < a$ (problema interno), allora $B_n = 0$; per il caso $r > a$ (problema esterno) si deve porre $A_n = 0$ e, infine, nel caso del dominio $a < r < b$ non contenente né $r = 0$ né $r = \infty$, nella soluzione in generale figurano termini in r^n e $1/r^{n+1}$.

1. Problema di Dirichlet per la sfera. Sia data una sfera di raggio a. Collochiamo al centro di questa sfera l'origine delle coordinate sferiche (r, θ, φ) e consideriamo i due problemi di Dirichlet seguenti:

$$\Delta u = 0 \text{ per } r < a, \; u \mid_{r=a} = f(\theta, \varphi) \text{ (problema interno)}, \qquad (1)$$

$$\Delta u = 0 \text{ per } r > a, \; u \mid_{r=a} = f(\theta, \varphi) \text{ (problema esterno)}, \qquad (1')$$

dove $f = f(\theta, \varphi)$ è una funzione data sulla superficie della sfera. Sviluppiamo $f(\theta, \varphi)$ in serie di funzioni sferiche

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

dove A_{nm} e B_{nm} vanno calcolati mediante la formula (9) del § 3.

Cerchiamo la soluzione del problema interno sotto la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \overline{Y}_n(\theta, \varphi) \quad \text{per} \quad r \leqslant a.$$

Usando la condizione al contorno per $r = a$ e tenendo conto dello sviluppo di $f(\theta, \varphi)$, troviamo

$$\overline{Y}_n(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi).$$

Analogamente si trova la soluzione del problema esterno (2)

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\ \varphi) \quad \text{per} \quad r \geqslant a.$$

2. Sfera conduttrice nel campo di una carica puntuale. Troviamo il campo elettrostatico della carica puntuale e nel punto P in presenza di una sfera perfettamente conduttrice di raggio a. Supporremo che la sfera sia a terra, cioè il suo potenziale sia nullo. Collochiamo al centro della sfera O l'origine delle coordinate sferiche $(r,\ \theta,\ \varphi)$ e tracciamo l'asse polare $(\theta = 0)$ per il punto P; $OP = r_0 > a$.

Il campo elettrostatico $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$. Il potenziale $u = u(M)$, dove $M = M(r,\ \theta,\ \varphi)$, verifica l'equazione di Laplace ovunque all'esterno della sfera, tranne che nel punto $M = P$ in cui si ha una singolarità della forma $e/R_{MP} = u_0$, dove u_0 è il potenziale della carica e nello spazio illimitato (in assenza di sfera). Sulla superficie della sfera il potenziale $u \mid_{r=a} = 0$. È naturale cercare la soluzione del problema nella forma

$$u(M) = \frac{e}{R} + v(M), \quad R = R_{MP} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta},$$

dove v è la soluzione del problema di Dirichlet esterno

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v = 0 \quad \text{per} \quad r > a, \\ &v\Big|_{r=a} = -\frac{e}{R}\Big|_{r=a}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In questo caso la funzione f della formula (1) ha la forma $f(\theta) = -\frac{e}{R}\Big|_{r=a}$. Ricordiamo lo sviluppo di $1/R$ in serie per $r < r_0$) si veda il § 1, n. 1)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad \text{per} \quad r < r_0. \tag{3}$$

La soluzione del problema di Dirichlet esterno (2) si cerca sotto la forma

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\ \varphi).$$

Dalle (2) e (3) troviamo $Y_n = -ea^n r_0^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$. In tal modo il potenziale $u = u(r,\ \theta)$ vale

$$u = u(r,\ \theta) = \frac{e}{R} - e \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1} r_0^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

3. Polarizzazione di una palla in un campo omogeneo. Supponiamo che nel campo elettrostatico di un mezzo isotropo omogeneo di costante dielettrica ε_1 sia collocata una palla di raggio a, fabbricata di sostanza dielettrica di costante ε_2 (fig. 104). Cercheremo il potenziale del campo così creato sotto forma di somma

$$u = \begin{cases} u_1 = u_0 + v_1 & \text{all'esterno della palla,} \\ u_2 = u_0 + v_2 & \text{all'interno della palla,} \end{cases}$$

dove u_0 è il potenziale del campo imperturbato (in assenza della palla dielettrica) e v la perturbazione creata dall'introduzione

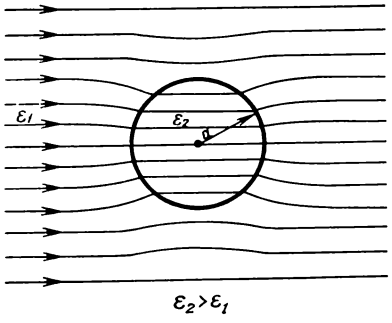


Fig. 104

della palla nel campo. Il potenziale u verifica l'equazione

$$\Delta u = 0$$

sotto le condizioni aggiuntive

$$u_1 = u_2 \qquad \text{su} \quad S,$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \qquad \text{su} \quad S,$$

dove S è la frontiera della palla, u_1 e u_2 i valori della funzione u all'esterno e all'interno della palla. Ne segue che il potenziale v sarà definito dalle condizioni

$$\Delta v = 0,$$

$$v_1 = v_2 \qquad \text{su} \quad S, \tag{4}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{\partial u_0}{\partial n} \qquad \text{su} \quad S, \tag{4'}$$

poiché per la funzione u_0 abbiamo

$\Delta u_0 = 0,$

$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{su} \quad S,$

$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_2 \quad \text{su} \quad S.$

A secondo membro dell'uguaglianza (4') figura una funzione nota di θ e φ, che sviluppiamo in serie di funzioni sferiche

$$\frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi).$$

Ponendo

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \overline{Y}_n(\theta, \varphi); \quad v_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \overline{\overline{Y}}_n$$

e ricorrendo alle condizioni al contorno (4) e (4'), otteniamo

$\overline{Y}_n = \overline{\overline{Y}}_n$

e

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \overline{Y}_n \,|_{r=a} -$$

$$- \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \overline{Y}_n \,|_{r=a} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

da cui

$$\overline{Y}_n = Y_n \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a}{\varepsilon_1 (n+1) + \varepsilon_2 n}. \qquad (4'')$$

Consideriamo ora un caso particolare. La palla è collocata in un campo esterno parallelo omogeneo E_0, diretto lungo l'asse z. Il potenziale di questo campo vale

$u_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta,$

di modo che

$$\frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial u_0}{\partial r}\Big|_{r=a} = -E_0 \cos\theta = Y_1(\theta).$$

La formula (4'') dà

$\overline{Y}_n = 0 \quad \text{per} \quad n \neq 1,$

$$\overline{Y}_1 = -E_0 \cos\theta \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Per il potenziale del campo perturbato abbiamo

$$u_1 = -E_0 z\left[1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \text{ all'esterno della palla } (r > a),$$

$$u_2 = -E_0 z \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \text{ all'interno della palla } (r < a),$$

da cui segue

$$E_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{2a^3}{r^3}\right] E_0,$$

$$E_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0,$$

vale a dire il campo all'interno della palla è parallelo e omogeneo.

Se $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, allora le superfici equipotenziali, pur rimanendo piani perpendicolari alla direzione del campo, saranno disposte più raramente che nel campo imperturbato. Le linee di forza come traiettorie ortogonali alle superfici equipotenziali tenderanno all'interno di una palla di costante dielettrica elevata. Nel caso $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ il quadro sarà opposto.

Lo stesso metodo permette di risolvere il problema della polarizzazione di una palla in presenza di una sorgente puntuale, sviluppando $1/R$ in serie di funzioni sferiche (si veda il § 1).

Bisogna notare che problemi analoghi si incontrano nello studio dei campi magnetici e termici e anche del campo di corrente elettrica stazionaria in presenza di inclusione sferica le cui caratteristiche sono distinte da quelle del mezzo circostante. Nel caso del problema termico, nella condizione al contorno (3) in luogo di ε_1 ed ε_2 figureranno i coefficienti di conduzione termica k_1 e k_2, per il problema magnetico le permeabilità magnetiche μ_1 e μ_2, e per l'ultimo problema le conducibilità λ_1 e λ_2.

4. Autovibrazioni di una sfera. Consideriamo il problema delle autovibrazioni di una sfera di raggio r_0 sotto condizioni al contorno nulle di prima specie. Questo problema si riduce alla ricerca degli autovalori e delle autofunzioni dell'equazione

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{5}$$

con la condizione al contorno sulla superficie della sfera

$$v = 0. \tag{6}$$

Sistemando l'origine delle coordinate sferiche al centro della sfera, riscriviamo l'equazione (5) nella forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} v + \lambda v = 0, \tag{5'}$$

dove

$$\Delta_{\theta,\varphi} v = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Cercheremo la soluzione con il metodo di separazione delle variabili ponendo

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi). \tag{6'}$$

Dopo la sostituzione di questa espressione nell'equazione (5) otteniamo

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right)}{R} + \lambda r^2 + \frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y}{Y} = 0, \tag{7}$$

da cui segue

$$\Delta_{\theta, \varphi}\, Y + \mu Y = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) R = 0. \tag{9}$$

Risolvendo l'equazione (8) sotto le condizioni di limitateza naturali ai poli della sfera

$$| Y |_{\theta=0, \pi} < \infty \tag{10}$$

e la condizione di periodicità in φ: $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$, otteniamo gli autovalori

$$\mu = n(n+1), \tag{11}$$

a ciascuno dei quali corrispondono le $2n + 1$ funzioni sferiche

$$\left.\begin{aligned} Y_n^{(0)}(\theta, \varphi) &= P_n(\cos\theta), \\ Y_n^{(-j)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos\theta)\cos j\varphi, \\ Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\, j\varphi \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Passiamo ora all'equazione (9). Tenendo conto dell'uguaglianza (11), delle condizioni al contorno per $r = r_0$ e della condizione di limitatezza naturale per $r = 0$, otteniamo per la funzione $R(r)$ il problema degli autovalori seguente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0, \tag{9'}$$

$$R(r_0) = 0, \tag{13}$$

$$| R(0) | < \infty. \tag{14}$$

Con la sostituzione

$$R(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}} \tag{15}$$

questa equazione si riduce all'equazione di Bessel di ordine $(n + 1/2)$:

$$y'' + \frac{1}{r} y' + \left[\lambda - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right] y = 0, \tag{16}$$

la cui soluzione generale ha la forma (si veda Complemento II, parte I, § 1)

$$y(r) = AJ_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r) + BN_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r). \tag{17}$$

Dalla condizione di limitatezza (14) deriva

$B = 0$.

La condizione al contorno (13) dà

$$AJ_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0.$$

Poiché cerchiamo soluzioni non banali dell'equazione, allora $A \neq 0$ e, di conseguenza,

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0.$$

Indicando con $\nu_1^{(n)}$, $\nu_2^{(n)}$, ..., $\nu_m^{(n)}$ le radici dell'equazione trascendente

$$J_{n+1/2}(\nu) = 0, \tag{18}$$

troviamo gli autovalori

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{19}$$

A ciascun autovalore $\lambda_{m,n}$ corrisponde la $(2n+1)$-esima autofunzione. Introduciamo la notazione

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+1/2}(x). \tag{20}$$

Allora le autofunzioni dell'equazione (5) sotto la condizione al contorno (6) si possono rappresentare nella forma

$$v_{n,m,j}(r, \theta, \varphi) = \psi_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\, r\right) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$$

$$(n = 0, 1, \ldots; m = 1, 2, \ldots; j = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Consideriamo ora il primo problema ai limiti per l'equazione d'onda

$$\Delta v + k^2 v = 0 \tag{22}$$

sotto la condizione al contorno

$$v = f(\theta, \varphi) \tag{23}$$

sulla superficie di una sfera di raggio r_0.

Dalle considerazioni precedenti risulta con chiarezza che la soluzione di questo problema è rappresentabile sotto la forma

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} \frac{\psi_n(kr)}{\psi_n(kr_0)}\, Y_n^{(j)}(\theta, \varphi), \tag{24}$$

dove f_{nj} sono i coefficienti dello sviluppo della funzione $f(\theta, \varphi)$ in serie di funzioni sferiche $\{Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)\}$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi). \tag{25}$$

Se k^2 coincide con uno degli autovalori

$$k^2 = \lambda_{m_0 n_0} = \left(\frac{\nu_{m_0}^{(n_0)}}{r_0} \right)^2,$$

il problema ai limiti (22)-(23) non ha soluzione per ogni funzione $f(\theta, \varphi)$. La formula (24) mostra che la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità del problema in esame in questo caso è l'annullamento dei coefficienti $f_{n_0 j}$

$$f_{n_0 j} = 0$$

oppure

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, Y_{n_0}^{(i)}(\theta, \varphi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, la soluzione sarà definita dalla formula (24) nella quale mancano i termini corrispondenti a $n = n_0$. Ma in questo caso la soluzione non è definita univocamente poiché ad essa si può sempre associare una combinazione lineare di autofunzioni corrispondenti a $k^2 = \lambda_{m_0 n_0}$.

5. Problema ai limiti esterno per una sfera. Consideriamo il primo problema ai limiti esterno per la sfera (si veda il capitolo VII, § 3)

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (k^2 > 0),$$

$$v \mid_{r=r_0} = f(\theta, \varphi),$$

$$v = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{per} \quad r \to \infty,$$

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) = 0 \quad \text{(condizione di radiazione)}.$$

Come è stato mostrato nel § 3 del capitolo VII, questo problema ha un'unica soluzione. Sviluppiamo la funzione cercata $f(\theta, \varphi)$ in serie di funzioni sferiche

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} R_n(r)\, Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi).$$

I coefficienti di sviluppo $R_n(r)$ verificheranno, evidentemente, l'equazione

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0,$$

la condizione al contorno

$$R_n(r_0) = f_n$$

e le condizioni di radiazione per $r \to \infty$

$$R_n(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \lim_{r\to\infty} r(R_n' + ikR_n) = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione ha la forma (si veda il n. 4 e il Complemento I, § 3)

$$R_n(r) = A_n \zeta_n^{(1)}(kr) + B_n \zeta_n^{(2)}(kr),$$

dove

$$\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(\rho),$$

$$\zeta_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(2)}(\rho) \quad (\rho = kr).$$

Tenendo conto delle formule asintotiche per le funzioni di Hankel $H_n^{(1)}(\rho)$ e $H_n^{(2)}(\rho)$ (si veda il Complemento I, § 3)

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots,$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots$$

(i puntini di sospensione indicano termini infinitesimi di ordine superiore a $1/\rho$), otteniamo per le funzioni $\zeta_n^{(1)}$ e $\zeta_n^{(2)}$ le formule asintotiche seguenti:

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \frac{e^{i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots,$$

$$\zeta_n^{(2)}(kr) = \frac{e^{-i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots$$

Si vede di qui che è la sola funzione $\zeta_n^{(2)}$ a verificare la condizione di radiazione.

Pertanto

$$A_n = 0.$$

Ricorrendo alla condizione al contorno per $r = r_0$, troviamo che

$$B_{nj} = \frac{f_{nj}}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)}.$$

In tal modo, abbiamo ottenuto la funzione $v(r, \theta, \varphi)$ nella forma

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{\infty} \frac{f_{nj} \zeta_n^{(2)}(kr)}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

dove

$$f_{nj} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi}{\| Y_n^{(j)} \|^2}$$

e

$$\| Y_n^{(j)} \|^2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [Y_n^{(j)}]^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi \varepsilon_j}{2n+1} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!},$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 2, & j = 0, \\ 1, & j > 0 \end{cases}$$

è il quadrato della norma della funzione sferica $Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$.

Parte III

POLINOMI DI ČEBYŠEV-HERMITE E DI ČEBYŠEV-LAGUERRE

§ 1. Polinomi di Čebyšev-Hermite

1. Formula differenziale. Definiamo i polinomi di Čebyšev-Hermite $H_n(x)$ per analogia con i polinomi di Legendre mediante la funzione generatrice $\Psi(\rho; x)$, ponendo

$$\Psi(\rho, x) = e^{2x\rho - \rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{\rho^n}{n!}. \tag{1}$$

Ne segue, in virtù del teorema di Cauchy,

$$H_n(x) = \frac{\partial^n \Psi(\rho, x)}{\partial \rho^n}\Big|_{\rho=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-(x-\zeta)^2}}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \tag{2}$$

dove C è un contorno chiuso nel piano della variabile complessa ζ, che circonda il punto $\zeta = 0$. Introducendo una variabile di

integrazione nuova $z = x - \zeta$, riduciamo la (2) alla forma

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz =$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{d^n}{dx^n} \int_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{z-x} dz \right\}, \tag{3}$$

dove il contorno C_1 comprende il punto $z = x$. In virtù del teorema di Cauchy l'espressione fra parentesi graffa è uguale a $\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$. Come risultato dalla (3) ricaviamo la formula differenziale

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \tag{4}$$

Questa formula mostra che $H_n(x)$ è un polinomio di grado n e che

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \tag{5}$$

Dalla formula (4) troviamo $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$ e via di seguito.

2. Formule ricorrenti. Derivando la funzione generatrice rispetto a ρ e x, troviamo

$$\Psi_x - 2\rho\Psi = 0, \quad \Psi_\rho - 2(x - \rho)\Psi = 0. \tag{6}$$

Sostituiamo la serie (1) di $\Psi(\rho, x)$ in ciascuna delle identità (6). Raggruppando i termini in ρ^n e uguagliandoli a zero, otteniamo due formule ricorrenti

$$H_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \tag{7}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \tag{8}$$

La formula (8) permette di definire successivamente H_n per tutti i valori di n a partire da $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$. Così, per esempio, $H_2(x) = 2xH_1 - 2H_0 = 4x^2 - 2$, $H_3 = 2xH_2 - 4H_1 = 8x^3 - 12x$, ecc.

3. Equazione di Čebyšev-Hermite. Troviamo un'equazione cui soddisfa $H_n(x)$. A tale scopo usiamo le formule ricorrenti (7) e (8). Mediante la (7) escludiamo dapprima $2nH_{n-1}$ dalla (8):

$$H_{n+1} - 2xH_n + H_n' = 0;$$

deriviamo questa equazione rispetto a x:

$$H_{n+1}' - 2xH_n' - 2H_n + H_n'' = 0$$

e sostituiamo $H_{n+1}' = 2(n+1)H_n'$ dalla (7). Infine otteniamo

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \frac{dH_n}{dx}\right) + 2ne^{-x^2}H_n = 0. \tag{9}$$

Si vede di qui che il polinomio di Čebyšev-Hermite è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda = 2n$ del problema seguente (problema di Sturm-Liouville):

trovare i valori di λ *per cui l'equazione di Čebyšev-Hermite*

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{10}$$

ha una soluzione non banale crescente per $x \to \infty$ *non più rapidamente che una potenza finita di* x.

La soluzione di questo problema si potrebbe cercare sotto forma di serie di potenze $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Sostituendo questa serie nell'equazione (10), otteniamo, per i coefficienti, la formula ricorrente

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{11}$$

Si vede dalla formula (11) che per $\lambda = 2n$ tutti i coefficienti $a_k = 0$ (per $k > n$) e la serie si interrompe. Soltanto per $\lambda = 2n$ può essere verificata la condizione all'infinito. I polinomi che si ottengono in questo modo sono definiti a meno di un fattore costante. Considerando $a_n = 2^n$, otteniamo i polinomi $H_n(x)$.

4. Norma dei polinomi $H_n(x)$. Dimostriamo (senza utilizzare la teoria generale) che i polinomi di Čebyšev-Hermite formano un sistema di funzioni di peso e^{-x^2} sulla retta infinita $-\infty < x < \infty$ e calcoliamo la norma di queste funzioni (di peso $\rho(x) = e^{-x^2}$):

$$\| H_n \| = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}. \tag{12}$$

Consideriamo l'espressione

$$L_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) dx.$$

Per fissare le idee, poniamo $m \leqslant n$. Integrando per parti, tenendo conto della formula (7) e del fatto che il prodotto di un polinomio per e^{-x^2} si annulla all'infinito, otteniamo

$$L_{mn} = (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2}) dx =$$

$$= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2}) dx,$$

poiché $H_0 = 1$. Di qui si vede che

$$L_{mn} = (-1)^{n-m} 2^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(e^{-x^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \text{per} \quad m < n.$$

Se $m = n$, allora

$$L_{mn} = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi} = \| H_n \|^2.$$

Con ciò abbiamo dimostrato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & m = n. \end{cases}$$

Il sistema dei polinomi di Čebyšev-Hermite è chiuso (non ci soffermiamo sulla dimostrazione di questo fatto) e, di conseguenza, abbiamo trovato tutte le soluzioni del problema (10), vale a dire $\lambda \neq 2n$ non può essere autovalore.

5. Funzioni di Čebyšev-Hermite. Nelle applicazioni (si veda la pag. 724) si ricorre spesso alle funzioni di Čebyšev-Hermite

$$\psi_n(x) = h_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\| H_n(x) \|},$$

che formano un sistema ortogonale e normalizzato di peso $\rho(x) = 1$ nell'intervallo infinito $-\infty < x < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Queste funzioni si annullano per $x \to \pm\infty$ e verificano l'equazione

$$\psi_n'' + (\lambda - x^2)\, \psi_n = 0 \quad \text{per} \quad \lambda = 2n + 1.$$

§ 2. Polinomi di Čebyšev-Laguerre

1. Formula differenziale. Definiamo i polinomi di Čebyšev-Laguerre $L_n(x)$ mediante la funzione generatrice

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{1-\rho}\, e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}. \tag{1}$$

Sviluppandola in serie di potenze

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, \rho^n, \quad L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n}\Big|_{\rho=0} \tag{2}$$

e applicando il teorema di Cauchy, troviamo

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

dove C è un contorno comprendente il punto $\zeta = 0$. Introduciamo una variabile d'integrazione nuova z, ponendo $\zeta = 1 - \frac{x}{z}$ e $d\zeta = \frac{x\,dz}{z^2}$; allora

$$L_n(x) = e^x \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}\, dz, \tag{3}$$

dove C_1 è un contorno comprendente il punto $z = x$. La formula (3) dà

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\, e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{4}$$

Di qui concludiamo che $L_n(x)$ è un polinomio di grado n. In particolare, abbiamo $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$.

2. Formule ricorrenti. Derivando la funzione generatrice $\Psi(\rho, x)$ rispetto a ρ e x, otteniamo due identità

$$(1-\rho)^2 \Psi_\rho - (1 - \rho - x)\Psi = 0, \tag{5}$$

$$(1-\rho)\Psi_x + \rho\Psi = 0. \tag{6}$$

Sostituiamo la serie (2) nelle identità (5), (6) e uguagliamo a zero i coefficienti di ρ^{n-1}; questa operazione dà le formule ricorrenti

$$n + 1)\, L_{n+1} - (2n + 1 - x)\, L_n + nL_{n-1} = 0, \tag{7}$$

$$L'_{n+1} - L'_n + L_n = 0. \tag{8}$$

La formula (7) stabilisce un legame fra i polinomi L_{n+1}, L_n, L_{n-1} e consente di definire successivamente tutti i L_n, per esempio,

$$L_2(x) = \frac{1}{2}[(3-x)L_1 - L_0] = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

Deduciamo ancora una formula ricorrente

$$x\,L'_n + (n + 1 - x)\,L_n - (n+1)\,L_{n+1} = 0. \tag{9}$$

A tale scopo sostituiamo nella (7) n con $n + 1$ e deriviamo rispetto a x:

$$(n+2)\,L'_{n+2} - (2n + 3 - x)\,L'_{n+1} + L_{n+1} + (n+1)\,L'_n = 0;$$

applicando due volte la formula (8), eliminiamo L'_{n+2} e L'_{n+1} e infine otteniamo la formula (9).

3. Equazione di Čebyšev-Laguerre. Troviamo un'equazione la cui soluzione è $L_n(x)$. Derivando la (9) rispetto a x, otteniamo $xL''_n + (n + 2 - x)\,L'_n - L_n - (n+1)\,L'_{n+1} = 0$ eliminiamo quindi L'_{n+1} mediante la (8). Come risultato otteniamo per L_n

l'equazione

$$xL_n'' + (1-x)\,L_n' + nL_n = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dL_n}{dx}\right) + ne^{-x}L_n = 0, \quad (10)$$

che si chiama equazione di Čebyšev-Laguerre.

Abbiamo dimostrato così che $L_n(x)$ è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda = n$ del problema seguente:

trovare i valori di λ *per cui l'equazione*

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (11)$$

abbia nel dominio $0 < x < \infty$ *una soluzione non banale, limitata per* $x = 0$ *e crescente per* $x \to \infty$ *non più rapidamente che una potenza finita di* x.

Osserviamo che l'equazione (10) per $L_n(x)$ si può dedurre derivando $n+2$ volte la funzione $z = x^n e^{-x}$ e applicando la formula differenziale (4).

4. Ortogonalità e norma dei polinomi di Čebyšev-Laguerre. Dimostriamo, partendo dalla formula (4), che i polinomi $L_n(x)$ sono ortonormali di peso e^{-x}. Consideriamo l'integrale

$$J_{mn} = \int_0^\infty L_m(x)\,L_n(x)\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m(x)\,\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx.$$

Sia $m \leqslant n$. Integrando per parti m volte e tenendo conto che per la presenza di un fattore della forma $x^h e^{-x}$ $(k > 0)$ tutte le sostituzioni si annullano, otteniamo

$$J_{mn} = (-1)^m \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{d^m L_m}{dx^m}\,\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x})\,dx. \quad (12)$$

Se $m < n$, allora, integrando ancora una volta, otteniamo $J_{mn} = 0$ poiché $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} L_m = 0$. Nel caso $m = n$ abbiamo

$$\frac{d^n L_n}{dx^n} = (-1)^n$$

e

$$J_{nn} = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1 = \| L_n \|^2. \quad (13)$$

Dunque, i polinomi di Čebyšev-Laguerre formano un sistema di funzioni ortonormali di peso e^{-x}:

$$\int_0^\infty L_m(x)\,L_n(x)\,e^{-x}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (14)$$

5. Polinomi generalizzati di Čebyšev-Laguerre. Nello studio del moto di un elettrone in un campo di forze coulombiane e in altri problemi di fisica moderna, oltre ai polinomi $L_n(x)$, si incontrano anche polinomi generalizzati di Čebyšev-Laguerre $L_n^s(x)$. La teoria di questi polinomi si può costruire per analogia con i nn. 1-4 partendo dalla funzione generatrice

$$\Psi^s(\rho, x) = \frac{1}{(1-\rho)^{s+1}} e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}, \quad s > -1, \tag{15}$$

e sviluppandola in serie di potenze di ρ:

$$\Psi^s(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x)\,\rho^n; \quad L_n^s(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi^s}{\partial \rho^n}(\rho, x)\,|_{\rho=0}.$$

Ripetendo le considerazioni fatte per $s=0$ nel n. 1, troviamo

$$L_n^s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi^s(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = x^{-s} e^x \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{z^{n+s} e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}\, dz.$$

Ne segue

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+s} e^{-x}), \tag{16}$$

vale a dire $L_n^s(x)$ è effettivamente un polinomio di grado n. In particolare, $L_0^s(x) = 1$, $L_1^s(x) = 1 + s - x$.

Introducendo la funzione $z = x^{n+s} e^{-x}$ e derivandola $n+2$ volte rispetto a x, troviamo per la funzione $u = \frac{d^n z}{dx^n}$ l'equazione $xu'' + (x+1-s)\,u' + (n+1)\,u = 0$. Calcolando le derivate per $L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x u$ e tenendo conto dell'equazione per u, otteniamo l'equazione

$$x\,(L_n^s)'' - (x-s-1)\,(L_n^s)' + nL_n^s = 0, \tag{17}$$

cui soddisfano i polinomi generalizzati $L_n^s(x)$. Abbiamo dimostrato così che i polinomi generalizzati di Čebyšev-Laguerre sono autofunzioni corrispondenti agli autovalori

$$\lambda_n = n + \frac{s+1}{2}$$

del problema seguente:

trovare i valori di λ *per cui l'equazione*

$$xy'' + (s+1-x)\,y' + \left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right) y = 0$$

o

$$(x^{s+1} e^{-x} y')' + x^s e^{-x} \left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right) y = 0 \tag{18}$$

abbia nel dominio $0 \leqslant x < \infty$ *una soluzione non banale, limitata per* $x = 0$ *e crescente per* $x \to \infty$ *non più rapidamente che una potenza finita di* x.

Partendo dalla formula differenziale (16) e ragionando per analogia con il n. 4, è facile dimostrare che i polinomi L_n^s formano un sistema di funzioni ortonormali di peso $e^{-x}x^s$

$$\int_0^\infty L_n^s(x)\, L_m^s(x)\, e^{-x}x^s\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \qquad (s > -1), \\ \dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n. \end{cases}$$

Ai polinomi di Čebyšev-Laguerre corrispondono le funzioni ortonormali di peso $\rho(x) = 1$

$$\psi_n^s(x) = x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} l_n^s(x),$$

dove

$$\| l_n^s \| = 1,$$

le quali sono soluzioni dell'equazione

$$(x\psi')' + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x}\right)\psi = 0 \tag{19}$$

sotto le condizioni al contorno seguenti: limitatezza nel punto $x = 0$ e annullamento per $x \to \infty$, corrispondenti agli autovalori

$$\lambda_n = n + \frac{s+1}{2}.$$

Si vede dalla formula (18) che $L_n^0(x) = L_n(x)$ per λ_n uguale a $n + 1/2$ (se nella formula (18) sostituiamo λ con $\lambda + 1/2$, allora per $s = 0$ essa coinciderà con l'equazione di Čebyšev-Laguerre (10)).

Per concludere osserviamo che i sistemi ortogonali di polinomi $\{L_n(x)\}$ e $\{L_n^s(x)\}$ sono chiusi (non ci soffermiamo sulla dimostrazione di questo fatto evidente). Con ciò abbiamo trovato tutte autofunzioni dei problemi (10) e (18).

§ 3. Problemi elementari per l'equazione di Schrödinger *)

1. Equazione di Schrödinger. Nella meccanica quantistica il comportamento di una particella che si trova in un campo delle

*) I problemi qui considerati per l'equazione di Schrödinger danno alcuni esempi di applicazione dei polinomi di Čebyšev-Hermite e di Čebyšev-Laguerre. L'esposizione che segue non pretende di dare un'interpretazione esauriente delle questioni legate all'equazione di Schrödinger. Secondo il programma universitario, la meccanica quantistica si studia dopo il corso di fisica matematica.

forze potenziali è descritto dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\psi + U(x, y, z, t)\,\psi, \tag{1}$$

dove $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg·s è la costante di Planck, $i = \sqrt{-1}$, μ la massa della particella, U la sua energia potenziale nel campo di forze, $\psi = \psi(x, y, z, t)$ la funzione d'onda.

Se le forze non dipendono dal tempo, cioè se $U = U(x, y, z)$, allora sono possibili degli stati stazionari a stato di energia dato, vale a dire esistono soluzioni della forma

$$\psi = \psi^0(x, y, z)\, e^{-\frac{iE}{\hbar}t}, \tag{2}$$

dove E è l'energia generale della particella. Sostituendo questa espressione nell'equazione (1), otteniamo la seconda equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi^0 + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\,\psi^0 = 0, \tag{3}$$

nella quale E funge da autovalore che deve essere determinato. Nel seguito in luogo di ψ^0 scriveremo ψ:

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\,\psi = 0. \tag{4}$$

In assenza di campo di forze $U = 0$, l'equazione (4) diventa

$$\Delta\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{5}$$

È facile notare che questa equazione assomiglia all'equazione d'onda della fisica classica

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \tag{6}$$

dove $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda e λ la lunghezza d'onda. Ciononostante, questa somiglianza è puramente esteriore e formale, per il significato fisico diverso delle funzioni che figurano nelle equazioni (5) e (6).

Nell'equazione di Schrödinger un significato fisico diretto non l'ha la funzione stessa ψ, bensì $|\psi|^2$ che va interpretata in termini statistici, e cioè l'espressione $|\psi|^2\, dx\, dy\, dz$ indica la probabilità di esistenza d'una particella all'interno del volume elementare $dx\, dy\, dz$ nel punto (x, y, z) dello spazio.

Ne segue che la normalizzazione a uno delle autofunzioni, cui prima abbiamo ricorso frequentemente allo scopo di semplicità matematica, ora acquisisce un'importanza fondamentale. La condizione di normalizzazione

$$\int\int\int |\psi|^2\, dx\, dy\, dz = 1 \tag{7}$$

significa che la particella si trova in un punto dello spazio e perciò la probabilità di trovarla nello spazio vale uno (evento certo).

Consideriamo alcuni problemi elementari per l'equazione di Schrödinger.

2. Oscillatore armonico. L'equazione di Schrödinger per l'oscillatore armonico diventa

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+(E-U)\,\psi=0,$$

dove $U=\frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2$, ω_0 è l'autofrequenza (ciclica) dell'oscillatore. Il problema in questione consiste nella ricerca degli stati stazionari, cioè dello spettro degli autovalori dell'energia E e delle autofunzioni corrispondenti ψ mediante l'equazione

$$\psi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-\frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\right)\psi=0 \tag{8}$$

e la condizione di normalizzazione aggiuntiva

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,dx=1. \tag{9}$$

Introducendo le notazioni

$$\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega_0},\quad x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}},\quad \xi=\frac{x}{x_0}, \tag{10}$$

per la funzione $\psi=\psi(\xi)$ ed effettuando alcune trasformazioni evidenti, otteniamo l'equazione

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\lambda-\xi)^2\,\psi=0 \tag{11}$$

e la condizione di normalizzazione aggiuntiva

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,d\xi=\frac{1}{x_0}. \tag{12}$$

La soluzione di questo problema sarà rappresentata, in virtù di quanto detto nel n. 5, § 1, dalle funzioni

$$\psi_n(\xi)=\frac{1}{\sqrt{x_0}}\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!\,\sqrt{\pi}}},$$

corrispondenti agli autovalori

$\lambda_n=2n+1.$

Tornando alle notazioni iniziali, troviamo

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}, \tag{13}$$

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Nella meccanica classica l'energia dell'oscillatore è

$$E = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2} x^2,$$

dove p_x, l'impulso della particella, può assumere una serie continua di valori. Dal punto di vista della meccanica quantistica l'energia dell'oscillatore, come mostra la formula (14), può assumere unicamente una serie di valori discreta E_n. In questo caso si dice che l'energia viene quantizzata. L'indice n che definisce il numero dello stato quantistico si chiama numero quantico principale. Allo stato quantistico inferiore per $n = 0$ l'energia dell'oscillatore è non nulla e vale

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

3. Rotatore. Troviamo gli autovalori di un rotatore ad asse libero, cioè di una particella che ruota alla stessa distanza intorno a un centro fisso.

L'energia potenziale U del rotatore conserva il medesimo valore in tutte le posizioni della particella e la si può porre uguale a zero, $U = 0$.

In un sistema di coordinate sferiche (r, θ, φ) avente origine nel punto fisso l'equazione di Schrödinger del rotatore

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0$$

si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0. \tag{15}$$

In questo caso si ricorre alla condizione

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

Introducendo in luogo della massa μ il momento d'inerzia

$$I = \mu r^2,$$

otteniamo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \lambda\psi = 0,$$

o

$$\Delta_{\theta,\varphi}\psi + \lambda\psi = 0, \tag{16}$$

dove

$$\lambda = \frac{2I}{\hbar^2} E. \tag{17}$$

Abbiamo così il problema ai limiti degli autovalori per l'equazione

$$\Delta_{\theta,\varphi}\psi + \lambda\psi = 0 \tag{16}$$

sotto la condizione di limitatezza naturale nei punti $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e la condizione di normalizzazione

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\psi|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 1. \tag{18}$$

Come è noto, soluzioni di questo problema sono le funzioni sferiche normalizzate

$$\psi_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\varepsilon_m \pi (l+m)!}}\, Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$\left(\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{per } m = 0 \\ 1 & \text{per } m \neq 0 \end{cases}\right), \tag{19}$$

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi\end{matrix} \quad (m = 0, 1, \ldots, l),$$

corrispondenti agli autovalori

$$\lambda = l(l+1). \tag{20}$$

Sostituendo λ con il suo valore dato dalla formula (17), otteniamo l'espressione dei valori quantizzati per l'energia del rotatore

$$E_{lm} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

4. Moto dell'elettrone in un campo coulombiano. Uno dei problemi più semplici della meccanica atomica è quello del moto di un elettrone nel campo coulombiano del nucleo, il quale presenta un grande interesse pratico poiché la sua soluzione dà non soltanto la teoria dello spettro dell'idrogeno, ma anche la teoria approssimata degli spettri atomici con un elettrone valente (degli atomi idrogenoidi), ad esempio dell'atomo di sodio.

Nell'atomo d'idrogeno l'elettrone si trova nel campo elettrostatico coulombiano del nucleo (del protone), di modo che l'energia potenziale $U(x, y, z)$ vale

$$U = -\frac{e^2}{r}, \tag{22}$$

dove r è la distanza dell'elettrone dal nucleo, $-e$ la carica dell'elettrone, $+e$ la carica del nucleo.

In questo caso l'equazione di Schrödinger ha la forma

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{23}$$

Il problema in esame consiste nella ricerca di E tali che l'equazione (23) abbia una soluzione continua in tutto lo spazio che soddisfi alla condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int |\psi(x, y, z)|^2\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{24}$$

Introduciamo un sistema di coordinate sferiche avente origine nel nucleo supposto fisso,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0, \tag{25}$$

e cerchiamo la soluzione nella forma

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \chi(r)\, Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi). \tag{26}$$

Tenendo conto dell'equazione differenziale per le funzioni sferiche $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) + l(l+1)\, Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = 0,$$

otteniamo

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi = 0. \tag{27}$$

Introduciamo la grandezza

$$a = \hbar^2/\mu e^2$$

come unità di lunghezza e

$$E_0 = \frac{\mu e^4}{\hbar^2} = \frac{e^2}{a}$$

come unità di energia. Ponendo

$$\rho = r/a, \quad \varepsilon = E/E_0 \quad (\varepsilon < 0), \tag{28}$$

riscriviamo l'equazione (27) nella forma

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\chi}{d\rho} + \left(2\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\chi = 0. \tag{29}$$

Mediante la sostituzione

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\, y \tag{30}$$

l'equazione (29) si riduce alla forma

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{s^2}{4\rho^2}\right)y=0, \tag{31}$$

dove

$s = 2l + 1.$

Considerando la grandezza

$$x=\rho\sqrt{-8\varepsilon}, \tag{32}$$

come variabile indipendente, otteniamo al posto della (31) l'equazione

$$xy''+y'-\left(\frac{x}{4}+\frac{s^2}{4x}\right)y+y\lambda=0 \tag{33}$$

o

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{s^2}{4x}\right)y+y\lambda=0, \tag{33'}$$

dove

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}, \tag{34}$$

coincidente con l'equazione (19) studiata nel § 2.

Gli autovalori là trovati sono risultati uguali a

$$\lambda=n_r+\frac{s+1}{2}$$

e le autofunzioni (definite a meno di un fattore costante) sono state espresse mediante i polinomi generalizzati di Čebyšev-Laguerre $L^s_{n_r}$:

$$y_{n_r}(x)=x^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{x}{2}}L^s_{n_r}(x), \tag{35}$$

dove $L^s_{n_r}(x)$ sono definiti dalla formula (16) del § 2.

Tenendo conto che

$s = 2l + 1,$

otteniamo

$$\lambda = n_r + l + 1 = n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

L'intero n si chiama numero quantico principale, n_r numero quantico radiale, l numero quantico azimutale.

Sostituendo λ con la sua espressione secondo le formule (34) e (28), otteniamo i valori quantizzati dell'energia

$$E_n=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2n^2}, \tag{37}$$

iquali dipendono unicamente dal numero quantico n.

Poniamo E uguale all'energia di un quanto $\hbar\omega = h\nu$, $E = -h\nu$, dove $\nu = \omega/2\pi$ è la frequenza. Allora avremo

$$\nu = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2 h} = \frac{R}{n^2}, \tag{38}$$

dove $R = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 h} = \frac{\mu e^4}{2\pi\hbar^3}$ è la cosiddetta costante di Rydberg.

Troviamo le frequenze delle righe spettrali. La frequenza ν_{nn_1} della riga spettrale osservata corrisponde alla transizione dallo stato di energia E_n a quello di energia E_{n_1}.

La frequenza ν_{nn_1} del quanto irradiato per questa transizione quantistica vale

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{39}$$

Ponendo $n_1 = 1$ e $n = 2, 3, \ldots$, otteniamo una serie di righe, detta serie di Lyman

$$\nu_{nn_1} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Quindi, i valori $n_1 = 2$, $n = 3, 4, \ldots$ danno la serie di Balmer

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

e i valori $n_1 = 3$, $n = 4, 5, \ldots$ la serie di Paschen

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Passiamo ora alla definizione delle autofunzioni dell'atomo d'idrogeno. A tale scopo, in virtù della formula (26), sarà sufficiente trovare le funzioni radiali $\chi(\rho)$.

Partendo dalle formule (35), (32), (30), (34) e (36), possiamo scrivere

$$\chi_{nl}(\rho) = A_n \left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right), \tag{40}$$

dove A_n è un fattore di normalizzazione definibile mediante la condizione

$$\int_0^\infty \rho^2 \chi_{nl}^2(\rho)\, d\rho = 1. \tag{41}$$

Calcolando A_n, otteniamo la seguente espressione per le funzioni radiali normalizzate:

$$\chi_{nl}(\rho) = \left(\frac{2}{n}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n\cdot(n+l)!}} \left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right). \tag{42}$$

In virtù delle formule (26) e (19) le autofunzioni normalizzate hanno la forma

$$\psi_{mnl} = \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-m)!}{2\varepsilon_m \pi\,(l+m)!}}\, Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi)\, \chi_{nl}(\rho),$$

dove $\chi_{nl}(\rho)$ è data dalla formula (42).

L'indice m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$) si chiama numero quantico magnetico.

Poiché n_r è sempre non negativo ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$), allora per un dato n, in virtù della formula

$$n = n_r + l + 1,$$

il numero quantico l non può essere superiore a $n - 1$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Quindi, per un determinato valore del numero quantico principale n il numero l può assumere n valori $l = 0, 1, \ldots, n-1$, e a ciascun valore l corrispondono $2l + 1$ valori di m. Ne segue che a un dato valore dell'energia E_n, cioè a un dato valore n, corrispondono

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

autofunzioni distinte. Quindi, ogni livello energetico ha una degenerazione di molteplicità n^2.

Abbiamo trovato così lo spettro discreto degli autovalori negativi dell'energia E_n, composto da un insieme infinito di numeri avente come punto di addensamento lo zero.

Il secondo tratto caratteristico del problema considerato per l'equazione di Schrödinger sta nell'esistenza di uno spettro continuo di autovalori positivi (ogni numero positivo E è autovalore dell'equazione (23)). In questo caso l'elettrone non è legato più al nucleo, ma si trova ancora nel suo campo (atomo d'idrogeno ionizzato). Non ci soffermiamo sulla dimostrazione dell'esistenza dello spettro continuo rimandando il lettore alla letteratura specializzata *).

Parte IV

FORMULE, TABELLE, GRAFICI

Diamo le tabelle di alcune funzioni speciali con le quali abbiamo avuto a che fare risolvendo i problemi ai limiti della fisica matematica. Le tabelle sono accompagnate dall'elenco di proprietà elementari delle funzioni speciali.

*) Si vedano, ad esempio, V. A. Fok, *Elementi di meccanica quantistica*, 1932 (ed. russa); R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, New York.

I. *Proprietà fondamentali delle funzioni speciali*

1. *Integrale degli errori*

1. Integrale degli errori:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

2. Sviluppo per z piccolo

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{1!\cdot 3} + \frac{z^5}{2!\cdot 5} - \dots \right).$$

3. Formula asintotica per z grande:

$$\Phi(z) \cong 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left(1 - \frac{1}{(2z^2)} + \frac{3\cdot 4}{(2z)^4} - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2z)^6} + \dots \right).$$

2. *Funzioni cilindriche*

Serie	Formule asintotiche
1. Funzioni di Bessel	
$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} - \dots$	$J_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$
2. Funzioni di Neumann	
$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots$ ($C = 0{,}577215664901532$ è la costante di Eulero)	$N_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} \times \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$
$N_1(x) = -\frac{2}{\pi x} + \frac{2}{\pi} J_1(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) + \dots,$	$N_1(x) \cong \cong -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots,$
$N_n(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n (n-1)! + \dots$ ($n > 1$)	$N_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} \times \left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$

3. Funzioni di Hankel

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad H_\nu^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \qquad H_\nu^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots$$

4. Funzioni di argomento immaginario

$$I_\nu(x) = (-i)^\nu I_\nu(ix) = \qquad I_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x + \ldots$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \ldots$$

$$K_0(x) = \frac{\pi}{2} iH_0^{(1)}(ix) =$$

$$= -\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) I_0(x) + \qquad K_0(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$K_1(x) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) = \qquad K_1(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$= \frac{1}{x} + \ldots$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}n} H_n^{(1)}(ix) = \qquad K_n(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$= \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n + \ldots$$

5. Formule ricorrenti:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{Z_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{Z_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x),$$

dove $Z_\nu(x)$ è una funzione cilindrica qualsiasi di argomento reale.

Casi particolari:

$$J_0'(x) = -J_1(x), \qquad \int_0^x J_1(x)\,dx = 1 - J_0(x),$$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x), \qquad \int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Per le funzioni di argomento immaginario:

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x),$$

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2\frac{d}{dx} I_\nu(x),$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2\frac{d}{dx} K_\nu(x),$$

$$I_0'(x) = I_1(x) \qquad K_0'(x) = -K_1(x).$$

6. Wronskiano delle funzioni cilindriche:

$$J_\nu(x) N_\nu'(x) - N_\nu(x) J_\nu'(x) = \frac{2}{\pi x},$$

$$H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)\prime}(x) - H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(1)\prime}(x) = -\frac{4i}{\pi x},$$

$$I_\nu(x) K_\nu'(x) - K_\nu(x) I_\nu'(x) = -\frac{1}{x}.$$

7. Formule integrali:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\,\mathrm{sen}\varphi + in\varphi}\, d\varphi = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\varphi + in\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_{1,2}} e^{-ix\,\mathrm{sen}\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi,$$

dove i contorni di integrazione C_1 e C_2 sono rappresentati nella fig. 96;

$$K_\nu(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\xi - \nu\xi}\, d\xi.$$

8. Funzioni di ordine semintero:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\, x,$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right),$$

$$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x\right),$$

$$N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n-1} J_{-n-1/2}(x).$$

3. *Polinomi di Legendre*

1. Funzione generatrice:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(x), \quad 0<\rho<1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2. Formula ricorrente:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - x\,(2n+1)\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

3. Formula di Rodrigo:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

4. Equazione dei polinomi di Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)\,y = 0.$$

5. Formula integrale:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

6. Quadrato della norma:

$$\| P_n \|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

7.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

4. *Funzioni associate*

1. Equazione delle funzioni associate:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right]+\left(n\,(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0.$$

2.

$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,P_n(x).$$

3.

$$\|\,P_n^{(m)}\,\|^2=\int_{-1}^{+1}[P_n^{(m)}(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,.$$

5. *Polinomi di Čebyšev-Hermite*

1. Funzione generatrice:

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\,\frac{t^n}{n!}.$$

2. Formule ricorrenti:

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),\qquad H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0.$$

3. Formula differenziale:

$$H_n(x)=(-1)^n\,e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2}.$$

4.

$$\|\,H_n\,\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2(x)\,e^{-x^2}\,dx=2^n n!\,\sqrt{\pi}.$$

6. *Polinomi di Čebyšev-Laguerre*

1. Funzione generatrice:

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\,t^n.$$

2. Formula differenziale:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}\,e^x\,\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}x^n).$$

3.

$$\|\,L_n(x)\,\|^2=1.$$

Tabella 1

Integrale degli errori $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \quad 0 \leqslant z \leqslant 2{,}8$

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
0,00	0,0000	0,40	0,4284	0,80	0,7421	1,20	0,9103
0,01	0,0113	0,41	0,4380	0,81	0,7480	1,21	0,9130
0,02	0,0226	0,42	0,4475	0,82	0,7538	1,22	0,9155
0,03	0,0338	0,43	0,4569	0,83	0,7595	1,23	0,9181
0,04	0,0451	0,44	0,4662	0,84	0,7651	1,24	0,9205
0,05	0,0564	0,45	0,4755	0,85	0,7707	1,25	0,9229
0,06	0,0676	0,46	0,4847	0,86	0,7761	1,26	0,9252
0,07	0,0789	0,47	0,4937	0,87	0,7814	1,27	0,9275
0,08	0,0901	0,48	0,5027	0,88	0,7867	1,28	0,9297
0,09	0,1013	0,49	0,5117	0,89	0,7918	1,29	0,9319
0,10	0,1125	0,50	0,5205	0,90	0,7969	1,30	0,9340
0,11	0,1236	0,51	0,5292	0,91	0,8019	1,31	0,9361
0,12	0,1348	0,52	0,5379	0,92	0,8068	1,32	0,9381
0,13	0,1459	0,53	0,5465	0,93	0,8116	1,33	0,9400
0,14	0,1569	0,54	0,5549	0,94	0,8163	1,34	0,9419
0,15	0,1680	0,55	0,5633	0,95	0,8209	1,35	0,9438
0,16	0,1790	0,56	0,5716	0,96	0,8254	1,36	0,9456
0,17	0,1900	0,57	0,5798	0,97	0,8299	1,37	0,9473
0,18	0,2009	0,58	0,5879	0,98	0,8342	1,38	0,9490
0,19	0,2118	0,59	0,5959	0,99	0,8385	1,39	0,9507
0,20	0,2227	0,60	0,6039	1,00	0,8427	1,40	0,9523
0,21	0,2335	0,61	0,6117	1,01	0,8468	1,41	0,9539
0,22	0,2443	0,62	0,6194	1,02	0,8508	1,42	0,9554
0,23	0,2550	0,63	0,6270	1,03	0,8548	1,43	0,9569
0,24	0,2657	0,64	0,6346	1,04	0,8586	1,44	0,9583
0,25	0,2763	0,65	0,6420	1,05	0,8624	1,45	0,9597
0,26	0,2869	0,66	0,6494	1,06	0,8661	1,46	0,9611
0,27	0,2974	0,67	0,6566	1,07	0,8698	1,47	0,9624
0,28	0,3079	0,68	0,6633	1,08	0,8733	1,48	0,9637
0,29	0,3183	0,69	0,6708	1,09	0,8768	1,49	0,9649
0,30	0,3286	0,70	0,6778	1,10	0,8802	1,50	0,9661
0,31	0,3389	0,71	0,6847	1,11	0,8835	1,51	0,9661
0,32	0,3491	0,72	0,6914	1,12	0,8868	1,6	0,9763
0,33	0,3593	0,73	0,6981	1,13	0,8900	1,7	0,9838
0,34	0,3694	0,74	0,7047	1,14	0,8931	1,8	0,9891

(segue)

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,35	0,3794	0,75	0,7112	1,15	0,8961	1,9	0,9928
0,36	0,3893	0,76	0,7175	1,16	0,8991	2,0	0,9953
0,37	0,3992	0,77	0,7238	1,17	0,9020	2,1	0,9970
0,38	0,4090	0,78	0,7300	1,18	0,9048	2,2	0,9981
0,39	0,4187	0,79	0,7361	1,19	0,9076	2,3	0,9989
						2,4	0,9993
						2,5	0,9996
						2,6	0,9998
						2,7	0,9999
						2,8	0,9999

Tabella 2

Valori delle funzioni di Bessel di ordine zero e uno da $x=0$ a $x=12{,}00$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	+1,000	+0,000	4,00	−0,397	−0,066	8,00	+0,172	+0,235
0,10	+0,997	+0,050	4,10	−0,389	−0,103	8,10	+0,148	+0,248
0,20	+0,990	+0,099	4,20	−0,377	−0,139	8,20	+0,122	+0,258
0,30	+0,977	+0,148	4,30	−0,361	−0,172	8,30	+0,096	+0,266
0,40	+0,960	+0,196	4,40	−0,342	−0,203	8,40	+0,069	+0,271
0,50	+0,938	+0,242	4,50	−0,321	−0,231	8,50	+0,042	+0,273
0,60	+0,912	+0,288	4,60	−0,296	−0,257	8,60	+0,015	+0,273
0,70	+0,881	+0,329	4,70	−0,269	−0,279	8,70	−0,013	+0,270
0,80	+0,846	+0,369	4,80	−0,240	−0,298	8,80	−0,039	+0,264
0,90	+0,808	+0,406	4,90	−0,210	−0,315	8,90	−0,065	+0,256
1,00	+0,765	+0,440	5,00	−0,178	−0,328	9,00	−0,090	+0,245
1,10	+0,720	+0,471	5,10	−0,144	−0,337	9,14	−0,114	+0,232
1,20	+0,671	+0,498	5,20	−0,110	−0,343	9,20	−0,137	+0,217
1,30	+0,620	+0,522	5,30	−0,076	−0,346	9,30	−0,158	+0,200
1,40	+0,567	+0,542	5,40	−0,041	−0,345	9,40	−0,177	+0,182
1,50	+0,512	+0,558	5,50	−0,007	−0,341	9,50	−0,194	+0,161
1,60	+0,455	+0,570	5,60	+0,027	−0,334	9,60	−0,209	+0,140
1,70	+0,398	+0,578	5,70	+0,060	−0,324	9,70	−0,222	+0,117
1,80	+0,340	+0,582	5,80	+0,092	−0,311	9,80	−0,232	+0,093
1,90	+0,282	+0,581	5,90	+0,122	−0,295	9,90	−0,240	+0,068
2,00	+0,224	+0,577	6,00	+0,151	−0,277	10,00	−0,246	+0,043
2,10	+0,167	+0,568	6,10	+0,177	−0,256	10,10	−0,249	+0,018
2,20	+0,110	+0,556	6,20	+0,202	−0,233	10,20	−0,250	−0,007
2,30	+0,056	+0,540	6,30	+0,224	−0,208	10,30	−0,248	−0,031
2,40	+0,002	+0,520	6,40	+0,243	−0,182	10,40	−0,243	−0,055
2,50	−0,048	+0,497	6,50	+0,260	−0,154	10,50	−0,237	−0,079
2,60	−0,097	+0,471	6,60	+0,274	−0,125	10,60	−0,228	−0,101

(*segue*)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
2,70	−0,142	+0,442	6,70	+0,285	−0,095	10,70	−0,216	−0,122
2,80	−0,185	+0,410	6,80	+0,293	−0,065	10,80	−0,203	−0,142
2,90	−0,224	+0,375	6,90	+0,298	−0,035	10,90	−0,188	−0,160
3,00	−0,260	+0,339	7,00	+0,300	−0,005	11,00	−0,171	−0,177
3,10	−0,292	+0,301	7,10	+0,299	+0,025	11,10	−0,153	−0,191
3,20	−0,320	+0,261	7,20	+0,295	+0,054	11,20	−0,133	−0,204
3,30	−0,344	+0,221	7,30	+0,288	+0,083	11,30	−0,112	−0,214
3,40	−0,364	+0,179	7,40	+0,279	+0,110	11,40	−0,090	−0,222
3,50	−0,380	+0,137	7,50	+0,266	+0,135	11,50	−0,068	−0,228
3,60	−0,392	+0,095	7,60	+0,252	+0,159	11,60	−0,045	−0,232
3,70	−0,399	+0,054	7,70	+0,235	+0,181	11,70	−0,021	−0,233
3,80	−0,403	+0,013	7,80	+0,215	+0,201	11,80	+0,002	−0,232
3,90	−0,402	−0,027	7,90	+0,194	+0,219	11,90	+0,025	−0,229
						12,00	+0,048	−0,223

Tabella 3

Radici successive dell'equazione $J_0(\mu_n)=0$ e valori corrispondenti di $|J_1(\mu_n)|$

n	μ_n	$J_1(\mu_n)$	n	μ_n	$J_1(\mu_n)$
1	2,4048	0,5191	6	18,0711	0,1877
2	5,5201	0,3403	7	21,2116	0,1733
3	8,6537	0,2715	8	24,3525	0,1617
4	11,7915	0,2325	9	27,4935	0,1522
5	14,9309	0,2065	10	30,6346	0,1442

Tabella 4

Valori delle funzioni $K_0(x)$ e $K_1(x)$

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,1	2,4271	9,8538	3,1	0,0310	0,0356
0,2	1,7527	4,7760	3,2	0,0276	0,0316
0,3	1,3725	3,0560	3,3	0,0246	0,0281
0,4	1,1145	2,1844	3,4	0,0220	0,0250
0,5	0,9244	1,6564	3,5	0,0196	0,0222
0,6	0,7775	1,3028	3,6	0,0175	0,0198
0,7	0,6605	1,0503	3,7	0,0156	0,0176
0,8	0,5653	0,8618	3,8	0,0140	0,0157
0,9	0,4867	0,7165	3,9	0,0125	0,0140
1,0	0,4210	0,6019	4,0	0,0112	0,0125
1,1	0,3656	0,5098	4,1	0,0098	0,0111
1,2	0,3185	0,4346	4,2	0,0089	0,0099
1,3	0,2782	0,3725	4,3	0,0080	0,0089
1,4	0,2437	0,3208	4,4	0,0071	0,0079
1,5	0,2138	0,2774	4,5	0,0064	0,0071
1,6	0,1880	0,2406	4,6	0,0057	0,0063
1,7	0,1655	0,2094	4,7	0,0051	0,0056
1,8	0,1459	0,1826	4,8	0,0046	0,0051
1,9	0,1288	0,1597	4,9	0,0041	0,0045
2,0	0,1139	0,1399	5,0	0,0037	0,0040
2,1	0,1008	0,1227	5,1	0,0033	0,0036
2,2	0,0893	0,1079	5,2	0,0030	0,0032
2,3	0,0791	0,0950	5,3	0,0027	0,0029
2,4	0,0702	0,0837	5,4	0,0024	0,0026
2,5	0,0623	0,0739	5,5	0,0021	0,0023
2,6	0,0554	0,0653	5,6	0,0019	0,0021
2,7	0,0492	0,0577	5,7	0,0017	0,0019
2,8	0,0438	0,0511	5,8	0,0015	0,0017
2,9	0,0390	0,0453	5,9	0,0014	0,0015
3,0	0,0347	0,0402	6,0	0,0012	0,0013

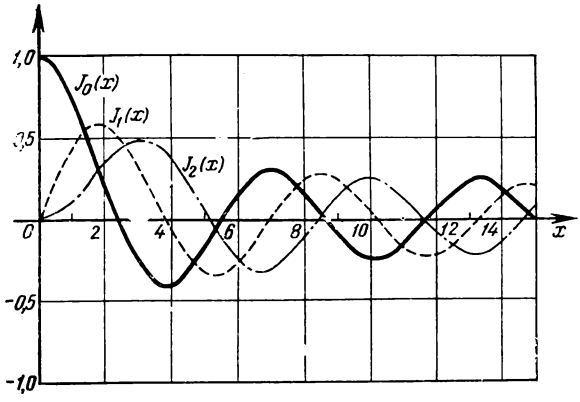


Fig. 105.
Grafici delle funzioni di Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$ *e* $J_2(x)$.

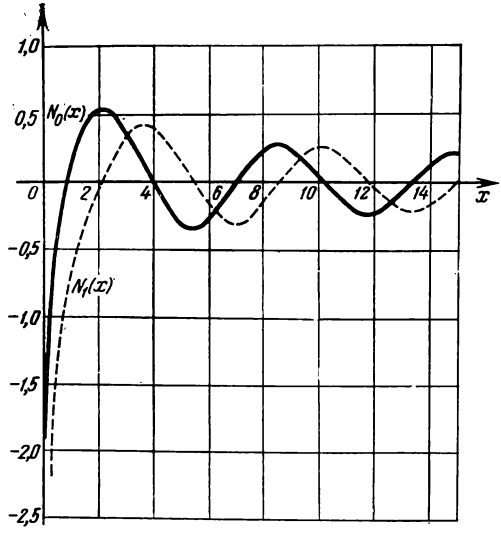


Fig. 106.
Grafici delle funzioni di Neumann $N_0(x)$ *e* $N_1(x)$.

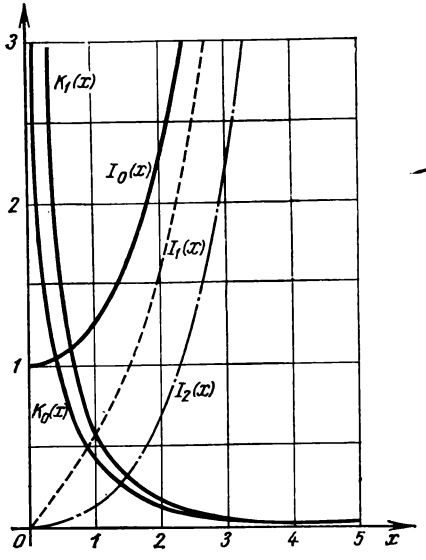


Fig. 107.

Grafici delle funzioni cilindriche di argomento immaginario $I_0(x), I_1(x), I_2(x), K_0(x), K_1(x)$.

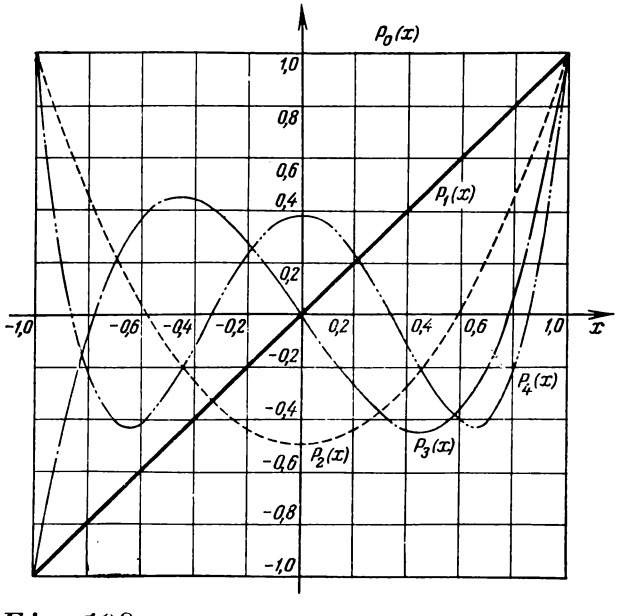


Fig. 108.

Grafici dei polinomi di Legendre.

IV. *Vari sistemi di coordinate ortogonali*

Siano x, y, z le coordinate cartesiane di un punto e x_1, x_2, x_3 le coordinate ortogonali curvilinee di questo punto. Il quadrato dell'elemento di lunghezza è dato dalla formula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

dove

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

sono i coefficienti metrici, detti coefficienti di Lamé. Un sistema di coordinate ortogonali è caratterizzato completamente da tre coefficienti metrici h_1, h_2, h_3.

Diamo l'espressione generale per gli operatori grad, div, rot, Δ in coordinate curvilinee ortogonali:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{du}{dx_j} \boldsymbol{i}_j,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h_2 h_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(h_1 h_2 A_3 \right) \right] \right],$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \boldsymbol{i}_1 & h_2 \boldsymbol{i}_2 & h_3 \boldsymbol{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right],$$

dove $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ sono tre vettori unità di base, $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ un vettore qualsiasi e u scalare.

1. *Coordinate rettangolari.*

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1,$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i + \ldots,$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

dove i, j e k sono vettori unità in direzione degli assi x, y, z.

2. *Coordinate cilindriche.*

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z$$

sono legate a quelle rettangolari dalle equazioni

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z.$$

Le superfici coordinate sono: r = costante, cilindri, φ = costante, piani, z = costante, piani.

I coefficienti metrici valgono

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1,$$

di modo che

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} i_2 + \frac{\partial u}{\partial z} i_3,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) i_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r} \right) i_2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \right] i_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. *Coordinate sferiche.*

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi$$

sono legate alle coordinate rettangolari dalle formule

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Le superfici coordinate sono: r = costante, sfere concentriche, φ = costante, piani, θ = costante, coni.

I coefficienti metrici valgono

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \operatorname{sen} \theta,$$

in modo che

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \boldsymbol{i}_3,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_2) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] \boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] \boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r A_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) \right] \boldsymbol{i}_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

4. *Coordinate ellittiche.*

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = z$$

sono definite mediante le formule di trasformazione

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z,$$

dove c è un fattore dimensionale di scala.

I coefficienti metrici valgono

$$h_1 = c \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = 1.$$

Le superfici coordinate sono: λ = costante, cilindri di sezione ellittica con fuochi nei punti $x = \pm c$, $y = 0$, μ = costante, famiglia di cilindri iperbolici confocali, z = costante, piani.

5. *Coordinate paraboliche.*

Se r, θ sono le coordinate polari di un punto nel piano, le coordinate paraboliche si possono introdurre mediante le formule

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2}, \quad x_3 = z.$$

Le superfici coordinate λ = costante e μ = costante rappresentano due cilindri parabolici intersecantisi a generatrici paral-

lele all'asse z. Il legame con le coordinate cartesiane è dato dalle formule

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda\mu, \quad z = z.$$

I coefficienti metrici $h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $h_3 = 1$.

6. *Coordinate ellissoidali.*

Queste coordinate vengono introdotte mediante le equazioni seguenti $(a > b > c)$:

$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$ $(\lambda > -c^2)$ (equazione dell'ellissoide),

$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1$ $(-c^2 > \mu > -b^2)$ (equazione dell'iperboloide a una falda),

$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1$ $(-b^2 > \nu > -a^2)$ (equazione dell'iperboloide a due falde).

A ciascun punto (x, y, z) corrisponde un solo sistema di valori λ, μ, ν. I parametri $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$ e $x_3 = \nu$ si chiamano coordinate ellissoidali. Le coordinate x, y, z si esprimono esplicitamente in funzione di λ, μ, ν:

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}.$$

I coefficienti di Lamé valgono

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{R^2(\lambda)}},$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{R^2(\mu)}}, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{R^2(\nu)}},$$

dove

$$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \quad (s = \lambda, \mu, \nu).$$

L'operatore di Laplace si può rappresentare nella forma

$$\Delta u = \frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\left[(\mu-\nu)R(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(R(\lambda)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)+\right.$$

$$+(\nu-\lambda)R(\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(R(\mu)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+$$

$$\left.+(\lambda-\mu)R(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(R(\nu)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right].$$

La soluzione particolare dell'equazione di Laplace, dipendente unicamente da λ, cioè $U = U(\lambda)$, è data dalla formula

$$U = A\int\frac{d\lambda}{R(\lambda)}+B,$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie.

7. *Coordinate ellissoidali degeneri.*

a) Le coordinate ellissoidali degeneri (α, β, φ) per l'ellissoide di rotazione allungato sono definite dalle formule

$$x = c\,\text{sen}\,\beta\cos\varphi, \quad y = c\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\varphi, \quad z = c\,\text{ch}\,\alpha\cos\beta,$$

dove c è un fattore dimensionale di scala, $0\leqslant\alpha<\infty$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Le superfici coordinate sono: α = costante, ellissoidi di rotazione allungati, β = costante, iperboloidi di rotazione a due falde e φ = costante, piani.

Il quadrato dell'elemento di lunghezza è dato dall'espressione

$$ds^2 = c^2(\text{sh}^2\alpha+\text{sen}^2\beta)(d\alpha^2+d\beta^2)+c^2\,\text{sh}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta\,d\varphi^2,$$

da cui derivano i valori dei coefficienti metrici

$$h_1 = h_2 = c\sqrt{\text{sh}^2\alpha+\text{sen}^2\beta}, \quad h_3 = h_\varphi = c\,\text{sh}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

L'equazione di Laplace ha la forma

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\text{sh}^2\alpha+\text{sen}^2\beta)}\left[\frac{1}{\text{sh}\,\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\text{sh}\,\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\text{sen}\,\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\text{sen}\,\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\left(\frac{1}{\text{sh}^2\alpha}+\frac{1}{\text{sen}^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

b) Il sistema di coordinate ellissoidali degeneri (α, β, φ) per l'ellissoide di rotazione schiacciato è definito mediante le uguaglianze seguenti:

$$x = c\,\text{ch}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\varphi, \quad y = c\,\text{ch}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\varphi,$$

$$z = c\,\text{ch}\,\alpha\cos\varphi,$$

$$0\leqslant\alpha<\infty, \quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi, \quad -\pi<\varphi\leqslant\pi.$$

Le superfici coordinate sono: α = costante, ellissoidi di rotazione schiacciati, β = costante, iperboloidi di rotazione a una falda e φ = costante, piani passanti per l'asse z.

Il quadrato dell'elemento lineare e l'operatore di Laplace nel sistema di coordinate considerato hanno la forma

$$ds^2 = c^2 (\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sen}^2\beta)\,(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \mathrm{ch}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\beta\,d\varphi^2,$$

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sen}^2\beta)}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\mathrm{ch}\,\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\mathrm{sen}\,\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

8. *Coordinate toroidali.*

Il sistema di coordinate toroidali (α, β, φ) è definito mediante le formule

$$x = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}, \qquad y = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}, \qquad z = \frac{c\,\mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta},$$

dove c è un fattore dimensionale di scala, $0 \leqslant \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leqslant \pi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Le superfici coordinate sono: α = costante, tori,

$$(\rho - c\,\mathrm{cth}\,\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\mathrm{sh}\,\alpha}\right)^2 \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

β = costante, sfere,

$$(z - c\,\mathrm{cotg}\,\beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\mathrm{sen}\,\beta}\right)^2,$$

φ = costante, piani.

L'espressione del quadrato dell'elemento lineare ha la forma

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)^2}[d\alpha^2 + d\beta^2 + \mathrm{sh}^2\alpha\,d\varphi^2],$$

i coefficienti metrici valgono

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}, \qquad h_\varphi = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta},$$

e l'operatore di Laplace è dato dall'espressione

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)\,\mathrm{sh}\,\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Al posto di u è comodo introdurre una nuova funzione v mediante la relazione

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta}\cdot v,$$

e allora l'equazione $\Delta u = 0$ si riduce alla forma

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{cth}\alpha + \frac{1}{4}v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}v_{\varphi\varphi} = 0.$$

9. *Coordinate bipolari.*

a) Coordinate bipolari nel piano. Le variabili

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = z$$

si chiamano coordinate bipolari se sono verificate le uguaglianze

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = z.$$

I coefficienti metrici valgono $h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}$, $h_3 = 1$.

b) Le coordinate bisferiche $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$ sono definite mediante le formule

$$x = \frac{c\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad y = \frac{c\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad z = \frac{c\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha},$$

dove c è un fattore costante, $0 \leqslant \alpha < \beta$, $-\infty < \beta < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Queste formule si possono rappresentare in modo conciso

$$z + i\rho = ci\operatorname{cotg}\frac{\alpha + i\beta}{2} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Le superfici coordinate sono: α = costante, superfici di rotazione a forma di fuso,

$$(\rho - c\operatorname{cotg}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2,$$

β = costante, sfere,

$$\rho^2 + (z - c\operatorname{cotg}\beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh}\beta}\right)^2,$$

ρ = costante, piani.

L'espressione del quadrato dell'elemento lineare in coordinate bipolari spaziali ha la forma

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha)^2}\,[d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\varphi^2],$$

da cui segue

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \qquad h_3 = \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha},$$

e l'equazione di Laplace diventa

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\,(\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Per la soluzione dell'equazione di Laplace è comoda la sostituzione

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha}\, v.$$

Allora per la funzione v si ottiene l'equazione

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{cotg}\alpha - \frac{1}{4}v + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}v_{\varphi\varphi} = 0.$$

10. *Coordinate sferoidali.*

a) Coordinate sferoidali allungate

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\cos\varphi,$$

$$z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\lambda \geqslant 1, \quad -1 \leqslant \mu < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}},$$

$$h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

b) Coordinate sferoidali schiacciate

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu\operatorname{sen}\varphi, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Le superfici $\lambda =$ costante sono sferoidi schiacciati e $\mu =$ costante, iperboloidi a una falda. I coefficienti metrici sono

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\lambda\mu.$$

11. *Coordinate paraboloidali.* Le variabili

$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$

definite dalle relazioni

$$x = \lambda\mu \cos\varphi, \quad y = \lambda\mu \operatorname{sen}\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2),$$

si chiamano coordinate paraboloidali. I coefficienti metrici valgono $h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $h_3 = \lambda\mu$.

Le superfici coordinate λ, μ = costanti sono paraboloidi di rotazione intorno all'asse di simmetria Oz.